

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS VII

en vue de l'obtention du Doctorat

Discipline : Physique

Spécialité : Champs, Particules, Matière

par

Jérôme Godelle

**Analyse non linéaire de dynamiques
de jets liquides cylindriques.**

Soutenue le 22 Juin 1999.

Rapporteurs

- **Léon Bolle**, Professeur à l'Université Catholique de Louvain, Belgique,
- **Laurent Limat**, Chargé de Recherche, ESPCI, Paris,

Membres du jury

- **Wamadeva Balachandran**, Professeur à l'Université de Brunel, Grande Bretagne,
- **Maurice Courbage**, Professeur à l'Université Paris VII,
- **Christophe Dumouchel**, Chargé de Recherche, CORIA - UMR 6614, Rouen,
- **Gérard Gouesbet**, Professeur à l'I.N.S.A. de Rouen,
- **Michel Ledoux**, Professeur à l'Université de Rouen,
- **Christophe Letellier**, Maître de Conférence à l'Université de Rouen,
- **François Lusseyran**, Chargé de Recherche, LEMTA ENSEM-INPL, Nancy,
- **Hans Nüglisch**, Ingénieur de Recherche, SIEMENS, Toulouse.

à ma famille,

Je remercie Monsieur **Michel Trinité** et Monsieur **Gérard Gouesbet** de m'avoir accueilli dans le **CO**mplexe de **R**echerche **I**nterprofessionnel en **A**érothermochimie (**CORIA**, Unité Mixte de Recherche 6614), au sein du **L**aboratoire d'**E**nergétique des **S**ystèmes et **P**rocédés (**LESP**).

Je remercie messieurs

Léon Bolle, Professeur à l'Université Catholique de Louvain, Belgique,

Laurent Limat, Chargé de Recherche, ESPCI, Paris,

d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse

et

Wamadeva Balachandran, Professeur à l'Université de Brunel, Grande Bretagne,

Maurice Courbage, Professeur à l'Université Paris VII,

Christophe Dumouchel, Chargé de Recherche, CORIA - UMR 6614, Rouen,

Gérard Gouesbet, Professeur à l'I.N.S.A. de Rouen,

Michel Ledoux, Professeur à l'Université de Rouen,

Christophe Letellier, Maître de Conférence à l'Université de Rouen,

François Lusseyran, Chargé de Recherche, LEMTA ENSEM-INPL, Nancy,

Hans Nüglisch, Ingénieur de Recherche, SIEMENS, Toulouse,

d'avoir accepté de juger ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement

Christophe Letellier pour avoir accepté de diriger ce travail de thèse. C'est avec lui que mon intérêt pour la physique et notamment les systèmes dynamiques non linéaires a pu trouver un écho.

Gérard Gouesbet pour avoir accepté de diriger cette thèse.

Michel Ledoux pour m'avoir donné accès au savoir-faire de son équipe.

Christophe Dumouchel pour son écoute, sa disponibilité et pour avoir su me communiquer son intérêt pour les mécanismes d'atomisation.

Tous les membres de l'équipe "Atomisation et sprays" du CORIA, en particulier **Jean-Bernard Blaisot** et **Samuel Leroux** pour m'avoir initié à quelques astuces expérimentales utiles à l'obtention d'un jet liquide cylindrique bien contrôlé, ainsi que **Daniel Sindayihebura**.

Siegfried Meunier-Guttin-Cluzel pour sa disponibilité. Il a su me dépanner à maintes reprises lorsque je programmais en langage C, notamment pour la périlleuse programmation du logiciel d'acquisition de données.

Je remercie également **Henri Cavalier** et **Jean Maquet** pour la gestion très efficace des moyens informatiques du LESP, ainsi que **Nathalie Delahaye** pour sa légendaire disponibilité, sans oublier **Murielle Grébonval**.

Je remercie **Pascal Achim**, **Alain Berlemont**, **Damien Blondel**, **Guillaume Boulnois**, **Hervé Bultynck**, **Marie-Sophie Cabot**, **Frédérique Corbin**, **Jérôme Dechoz**, **Thierry Girasole**, **Henri Labro**, **Hervé Leborgne**, **Bruno Maheu**, **Loc Mees**, **Olivier Ménard**, **Nicolas Michoux**, **Christian NjeNje**, **Claude Rozé**, **Anne-Gaëlle Tafforin**, **Yves Wanner** (et j'espère n'avoir oublié personne) pour leur sympathie et leur aptitude à mettre une ambiance chaleureuse dans le laboratoire.

Je remercie aussi **BSA**¹.

¹Bures Sud Association, un groupe d'amis qui m'a supporté avant, pendant et qui j'espère continuera à me supporter encore un peu après cette thèse...

Contents

Introduction générale	1
1 Les sprays	5
1.1 Introduction	5
1.2 Caractéristiques générales des processus d'atomisation	6
1.2.1 La formation d'un spray	6
1.2.2 Grandeurs caractéristiques d'un spray	12
1.2.3 Modélisation de l'atomisation	16
1.3 L'atomisation d'un jet liquide cylindrique	19
1.3.1 Etablissement du champ de vitesses en sortie de buse	19
1.3.2 Particularités de la rupture d'un jet liquide cylindrique	24
1.3.3 Théorie linéaire	29
1.3.4 Prédiction de la position de la vitesse critique	35
1.4 Les apports de la théorie des systèmes dynamiques	38
1.4.1 Introduction à la dynamique des systèmes	39
1.4.2 Deux cas expérimentaux	51
1.5 Conclusion	57
2 Mesures par diffusion de la lumière	65
2.1 Introduction	65
2.2 Dispositif expérimental	67
2.3 Simulations numériques	71
2.3.1 Modèles $2D$	71
2.3.2 Modèle $3D$	76
2.3.3 Validation du modèle $3D$	86
2.3.4 Résultats des simulations	87
2.4 Croissance des perturbations sur un jet d'eau excité	92
2.4.1 Analyse de la dynamique du jet excité	95
2.4.2 Extraction d'orbites périodiques et croissance des perturbations	102
2.4.3 Conclusion	107
2.5 Instabilités d'un jet d'eau libre	108
2.6 Conclusion	115

3	Mesures par ombroscopie	123
3.1	Introduction	123
3.2	Montage optique	124
3.2.1	Description du dispositif	124
3.2.2	Validation de la méthode de mesure	129
3.3	Diffusion et ombroscopie dans le cas d'un jet d'eau excité	130
3.3.1	Comparaison des deux dynamiques	131
3.3.2	Intermittence de phase, de type-I	139
3.3.3	Conclusion	149
3.4	Instabilités de jets d'eau libre en Zone 1 et Zone 3	150
3.4.1	Points de fonctionnement	150
3.4.2	Dynamique des perturbations - Comparaison avec le jet excité	154
3.4.3	Croissance des perturbations le long du jet	157
3.5	Conclusion	163
4	Analyse des phénomènes par la dynamique symbolique	167
4.1	Introduction	167
4.2	Dynamique symbolique	168
4.2.1	Cas unimodal	168
4.2.2	Cas bimodal	173
4.2.3	Cas faiblement dissipatif et $2D$	180
4.2.4	Dynamique symbolique probabiliste	181
4.3	Analyse de la dynamique des jets	186
4.4	Conclusion	195
	Conclusion générale	199
A	Caractéristiques générales d'un spray	203
A.1	Grandeurs caractéristiques d'un spray	203
A.2	Modélisation de l'atomisation	206
B	Simulations optiques: liste des instructions MAPLE	213
B.1	Première réfraction	213
B.2	Seconde réfraction	215
C	Séries temporelles du jet excité: mesures par diffusion et ombroscopie	219
D	Evolution des portraits de phase pour les jets libres	223

Introduction générale

La théorie des systèmes dynamiques non linéaires est souvent considérée comme étant éloignée des applications à des systèmes réels et encore plus à des systèmes proches des préoccupations des industriels. Il est vrai que les études théoriques menées sur des modèles numériques simples semblent très en amont de possibles applications à des systèmes concrets. Certains concepts ne se révéleront sans doute utiles qu'au niveau de la connaissance pure, mais d'autres suffiront à légitimer ce type d'approche en permettant une meilleure compréhension de systèmes dont le comportement reste, essentiellement, incompris.

Les sprays, c'est-à-dire la formation d'un système de gouttelettes à partir d'un système liquide donné représentent un exemple de ce genre de systèmes réels complexes dont l'intérêt n'est plus à prouver. Ils sont abondamment utilisés dans la vie quotidienne (parfumerie, applications pharmaceutiques) comme dans certains procédés industriels (combustion, revêtements de surface, conditionnements alimentaires, *etc.*) où le contrôle de leur fonctionnement est capital pour améliorer l'efficacité des techniques utilisées.

Au CORIA, l'équipe "Atomisation et Sprays", animée par Michel Ledoux et Christophe Dumouchel, travaille sur l'amélioration des techniques de génération de sprays et sur la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Devant la complexité des phénomènes rencontrés, une collaboration s'est établie entre cette équipe et celle consacrée aux "Systèmes dynamiques non linéaires", animée par Christophe Letellier et Gérard Gouesbet, afin d'utiliser les concepts de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires pour l'étude des processus d'atomisation. En effet, la théorie linéaire est omniprésente dans la modélisation de ces processus d'atomisation. Il existe bien des théories non linéaires, mais basées sur l'élaboration de simulations numériques qui, même si elles ont leur intérêt propre, ne tentent pas d'analyser de front les comportements expérimentaux. L'enjeu de cette thèse est donc de taille: utiliser les concepts de l'analyse des dynamiques non linéaires afin d'obtenir une nouvelle classification des comportements d'atomisation en gouttes et, dans certains cas, fournir des amorces d'explications. Parallèlement, nous verrons qu'un objectif préliminaire de cette thèse était aussi de mettre au point un dispositif expérimental capable de donner des mesures interprétables par l'approche des systèmes dynamiques non linéaires.

Bien entendu, certains systèmes expérimentaux ont déjà été étudiés avec succès, nous en reparlerons au **chapitre 1**. Il existe même certains exemples en dynamique des fluides mais ils sont souvent considérés comme des cas d'école à cause de leur éloignement du contexte

industriel ou plus simplement à cause de leur caractéristiques idéales de fonctionnement choisies pour générer des comportements chaotiques par exemple (convection de Rayleigh-Bénard, expérience du fil chaud ², *etc.*). Ici, il ne s'agit pas de chercher à mettre en évidence un comportement chaotique, mais d'utiliser les concepts de la théorie qui explique ces comportements complexes.

Nous allons donc nous intéresser au cas le plus classique des processus d'atomisation: la rupture en gouttes de jets liquides cylindriques. C'est Plateau, puis Rayleigh ³ qui ont construit la première modélisation du processus de déstabilisation puis de rupture en gouttes d'une colonne liquide cylindrique. Depuis, beaucoup d'améliorations y ont été apportées et beaucoup d'autres méthodes ont été implémentées: nous en passons quelques-une en revue dans le premier chapitre. Nous y introduisons aussi les concepts fondamentaux de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires et leurs applications à des systèmes assez proches de notre sujet d'étude.

Du point de vue expérimental, les techniques d'imagerie permettant la détermination de la longueur de rupture (longueur du corps du jet) sont prédominantes. Certaines autres techniques, basées sur des sondes optiques ou des mesures d'impédances, permettent de mesurer d'autres grandeurs caractéristiques du jet: essentiellement le diamètre absolu du jet où la taille (relative) des perturbations évoluant sur le jet. Dans notre cas, nous verrons qu'une technique originale est à mettre au point pour analyser les comportements de jets liquides cylindriques à l'aide des outils de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires sans imposer des contraintes sur la nature du liquide utilisé ou plus généralement sur les caractéristiques du spray que nous souhaitons étudier. Ce problème est traité tout au long du **chapitre 2** à travers des simulations optiques et l'interprétation des mesures réalisées sur différents types de jet. Nous y verrons aussi les premiers résultats présentant notamment un thème récurrent dans ce travail de thèse: la notion de processus intermittent. Par soucis de clarté, nous avons choisi de ne pas présenter les caractéristiques de chacune des techniques de mesures envisagées pour aller à l'essentiel de ce travail de thèse.

Le **chapitre 3** permet de présenter la méthode de mesure retenue pour étudier les jets liquides cylindriques: les mesures par ombroscopie. Différents types de jets y sont étudiés successivement pour arriver à associer les régimes de fonctionnement mis en évidence dans de précédents travaux sur des critères phénoménologiques avec les différents comportements dynamiques que l'on peut distinguer à l'aide de nos outils.

Au cours de cette étude, la nécessité de développer un nouvel outil plus adapté à des systèmes complexes, mais dérivé de concepts pré-existants, est apparue. La dynamique symbolique *probabiliste*, présentée au **chapitre 4** sur des systèmes théoriques d'abord puis appliquée aux jets liquides cylindriques ensuite, permet d'analyser plus finement les processus de déstabilisation d'un jet menant à sa rupture en gouttes, en fonction de la position dans le jet.

²voir les références [60] et [62] du chapitre 1.

³voir les références [8-10] du chapitre 1.

Bien entendu ce mémoire sera clos par une conclusion à cette étude et par une description de quelques perspectives.

Chapter 1

Les sprays

Résumé

Dans un premier temps, nous proposons un tour d’horizon du problème de l’atomisation en allant du cas général vers les résultats portant sur les jets liquides cylindriques, sujets d’étude de cette thèse. Notamment, nous mettons en évidence l’un des points clefs de l’étude de tels jets, à savoir la prédiction de la position du point critique sur la courbe de stabilité. Dans ce cadre, nous introduisons le problème de l’influence du profil des vitesses dans le jet sur les processus de déstabilisation menant le jet à se rompre en gouttes.

Dans la deuxième partie, nous présentons les concepts principaux de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires dont l’utilisation dans cette thèse a pour objectif une meilleure compréhension des processus de rupture en gouttes d’un jet cylindrique. Cette présentation conduit à passer en revue certaines études expérimentales qui, sans correspondre au cas des jets envisagés dans ce travail de thèse, apportent des exemples d’applications des outils de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires à deux phénomènes proches de notre sujet d’étude (robinet qui goutte, jet cylindrique d’air dans de l’air).

1.1 Introduction

Ce chapitre introductif propose un état de l’art concernant les processus de rupture en gouttes d’un système liquide. Il est destiné à sensibiliser aux problèmes de l’atomisation ceux qui n’en connaissent pas bien la physique, et ceux qui, la connaissant bien, veulent savoir comment la théorie des systèmes dynamiques non linéaires peut apporter des outils utiles à une meilleure compréhension du comportement des sprays.

Nous allons d’abord nous intéresser aux caractéristiques générales des sprays liquides (majoritairement rencontrés, contrairement aux sprays de particules solides) évoluant dans un environnement gazeux. Ces sprays sont produits par la désintégration d’un écoulement liquide, libre de toute contrainte pariétale, dans une atmosphère gazeuse. Ensuite, nous verrons plus précisément les particularités de cette désintégration, appelée ”atomisation”, dans le cas d’un jet liquide cylindrique qui est l’objet d’étude de ce travail de thèse. Enfin, nous passerons en revue les travaux impliquant l’utilisation d’outils venant de la théorie

des systèmes dynamiques non linéaires pour l'analyse du comportement de certains jets. Dans ces pages, nous ne nous attacherons pas aux problèmes particuliers liés aux liquides non-newtoniens.

1.2 Caractéristiques générales des processus d'atomisation

Dans cette section, nous présentons de manière générale les étapes successives menant à la création du spray, ce qui nous permettra de dégager les premiers facteurs influençant la production des gouttelettes. Ensuite, nous passons en revue quelques grandeurs caractéristiques d'un spray permettant de définir sa composition et son état. Enfin, les avantages de quelques modèles de l'atomisation seront brièvement présentés: modèles linéaire et numériques; ainsi que le formalisme de l'entropie maximum qui est brièvement décrit puisqu'il permet la prédiction, par le calcul, des distributions des tailles des gouttes d'un spray *a priori* quelconque.

1.2.1 La formation d'un spray

Quel que soit le type d'atomiseur rencontré, le domaine d'application considéré (pharmaceutique, combustion, etc.) et le liquide injecté, nous pouvons distinguer la même succession d'étapes qui mènent à la rupture en gouttelettes. Chacune de ces étapes a ses caractéristiques propres et influence celles qui la suivent, en aval de l'écoulement.

De manière générale, nous distinguons cinq étapes guidant le processus de l'atomisation en gouttes (fig. 1.1) [1]. Ces étapes peuvent être suivies de manière séquentielles (cas du "premier type d'atomisation"), ou se chevaucher les unes par rapport aux autres (dans le cas du "deuxième type d'atomisation", voir définition ci-après).

Écoulement interne à l'injecteur. Influençant fortement la forme du spray, l'injecteur est la pièce maîtresse initiant le processus de l'atomisation. Sa fonction est de former un système liquide à partir de l'écoulement circulant à l'intérieur. Sa géométrie interne, associée aux propriétés physiques du liquide injecté et de la pression d'injection, conditionne l'écoulement qui se développe au sein même de l'injecteur. Cet écoulement détermine les caractéristiques du système liquide libre ainsi formé.

En premier lieu, la géométrie interne de l'injecteur peut déjà imposer la forme du système liquide comme c'est le cas pour les jets cylindriques, les nappes annulaires ou coniques, et les nappes planes rétrécissantes. Le système liquide a donc, respectivement, une, deux, ou trois caractéristiques géométriques. Mais cette géométrie interne, associée à la valeur de la pression d'injection et aux propriétés physiques du liquide, notamment la viscosité, détermine aussi le champ des vitesses dans le système liquide qui se forme, et va donc fortement influencer le futur de ce système liquide.

En particulier, comme nous le verrons plus en détail dans la suite, l'augmentation de la viscosité va abaisser la valeur du nombre de Reynolds de l'écoulement défini par $Re = \rho vl / \mu$, où ρ est la masse volumique, μ la viscosité dynamique et l est une dimension caractéristique de l'écoulement. Le nombre de Reynolds compare les forces d'inertie aux forces de viscosité. Aux faibles nombres de Reynolds, les forces visqueuses jouent un rôle

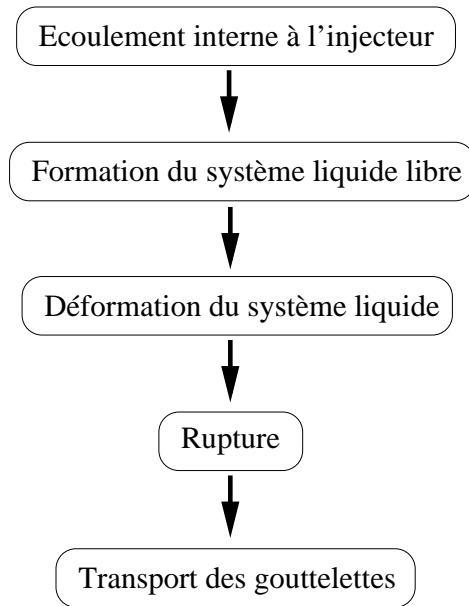


Figure 1.1: *Étapes de la formation d'un spray.*

très important, et l'écoulement est laminaire. Aux grands nombres de Reynolds, les forces d'inertie sont dominantes, et l'écoulement est turbulent.

Les injecteurs se partagent en deux groupes:

- **les injecteurs mécaniques** qui produisent un écoulement liquide libre dans un environnement gazeux au repos. Le différentiel de vitesse liquide/gaz est alors uniquement imposé par l'écoulement du liquide.
- **les injecteurs assistés** qui génèrent un écoulement liquide libre entouré d'un ou deux écoulements gazeux. Dans ce cas, l'écoulement gazeux, qui est le plus rapide, impose le différentiel de vitesse. Cela permet d'obtenir des différentiels plus importants et, par conséquent, des sprays aux gouttes plus fines.

Formation du système liquide libre. Comme nous l'avons vu, la formation du système liquide découle directement des paramètres de l'injection. Et c'est l'évolution libre de ce système liquide, dans un environnement gazeux, qui génère les mécanismes menant à la rupture en gouttes. C'est pourquoi l'étape de formation du système liquide est intimement liée à celle de la déformation de ce système.

Globalement, nous retiendrons que l'ordre de grandeur de la taille moyenne des gouttes est relié par une relation du type $D_g \propto \epsilon_c^n$ à l'échelle caractéristique ϵ_c du système liquide. Par exemple, pour le jet cylindrique, ϵ_c est le diamètre et $n = 1$; dans le cas d'une nappe liquide, ϵ_c est l'épaisseur et $n = 1/2$.

Déformation du système liquide. Cette étape voit les perturbations apparaître, s'installer, et croître jusqu'à l'apparition de la rupture en gouttes. Deux classes de phénomènes physiques participent à ce processus: les mécanismes internes à l'écoulement, et les interactions avec le gaz environnant. Parmi les phénomènes physiques appartenant à ces deux classes, certains tendent à stabiliser et d'autres à déformer le système liquide. Cette compétition entre actions stabilisantes et déstabilisantes fait apparaître des perturbations de l'interface et, surtout, sélectionne les déformations qui perdureront. Ces déformations sont appelées *perturbations naturelles*, ou *perturbations dominantes*. Les perturbations qui perdurent et croissent grâce à ce processus de compétition assurent la rupture du système liquide en gouttes.

Une des deux classes de phénomènes physiques participant à la déformation de la surface du système liquide est constituée par les mécanismes internes à l'écoulement. Ils sont liés à la structure du champ de vitesse et à son évolution dans l'espace et le temps. A la sortie de l'injecteur, le système liquide est libéré des contraintes pariétales. La modification brutale de ces conditions aux limites entraînent la relaxation du profil initial des vitesses. Ce phénomène est un exemple des mécanismes internes pouvant initier et influencer la déformation du système liquide.

La tension de surface du couple liquide/gaz détermine la réaction des forces de tensions superficielles aux courbures locales de la surface du jet. Son action peut être stabilisante ou déstabilisante selon la géométrie de l'écoulement liquide.

Enfin, les phénomènes physiques liés à l'interaction liquide-gaz sont dus à la présence des forces aérodynamiques qui interviennent à la surface du jet, proportionnellement au carré du différentiel de vitesses entre le liquide et le gaz.

Rupture et formation des gouttes. A la rupture en gouttes, l'amplitude des déformations devient de l'ordre de grandeur de la taille caractéristique du jet. Des gouttelettes se forment par détachement d'un paquet liquide du jet. La géométrie du jet, déterminée par les caractéristiques de l'injection et les déformations subies, déterminent les tailles locales caractéristiques et donc la multiplicité des tailles de gouttes obtenues. En fait, deux types d'atomisation sont mis en évidence:

- Premier type d'atomisation: Quand la différence de vitesse entre l'écoulement liquide et le milieu environnant est relativement faible (typiquement inférieure à $35-40$ m/s, ce critère dépendant beaucoup de l'écoulement envisagé), la longueur d'onde des perturbations est du même ordre de grandeur que la dimension caractéristique du système liquide. Leur croissance entraîne des déformations suivies par l'intégralité de l'écoulement liquide. La rupture s'opère à l'échelle du système liquide et les gouttes formées sont du même ordre de grandeur que la dimension caractéristique du système liquide. Ici le processus d'atomisation semble plus ou moins ordonné, les premières gouttes apparaissant à une distance relativement constante du nez de l'injecteur (un exemple est donné dans le cas du jet cylindrique sur la figure 1.2.a). Dans ce cas, les étapes du processus d'atomisation présentées sur la figure 1.1 se suivent en apparaissant les unes à la suite des autres.
- Second type d'atomisation: Quand le différentiel de vitesse est important, la longueur d'onde des perturbations peut être beaucoup plus faible que la dimension du système

liquide. Ici, la croissance des perturbations entraîne des déformations localisées de l'interface. La rupture qui s'ensuit, souvent appelée *épluchage de l'interface*, produit des gouttes de tailles beaucoup plus faibles que la dimension du système liquide. Contrairement au cas précédent, la rupture n'a aucun caractère ordonné ici: les gouttes sont produites très près du nez de l'injecteur et sur toute l'interface (fig. 1.2.b). Les différentes étapes de formation du spray (fig. 1.1) se chevauchent.

Ces deux types d'atomisation ne sont pas exclusifs et bien souvent coexistent. La présence de ces deux processus d'atomisation génère forcément des sprays très poly-dispersés, ce qui est le cas du jet photographié de la figure 1.2.b.

Transport des gouttes. Lorsqu'aucun nouveau processus d'atomisation ne force les gouttes à se rompre en de nouvelles gouttes de tailles plus petites, les gouttes sont dites stables et le processus d'atomisation peut être considéré comme terminé. C'est pourquoi nous pouvons distinguer l'atomisation primaire de l'atomisation secondaire. L'atomisation primaire est le processus de formation du premier ensemble de gouttes provenant de la déformation du système liquide. L'atomisation secondaire fait référence à la désintégration éventuelle des gouttes issues de l'atomisation primaire. En effet, une goutte dans un environnement gazeux est un système liquide libre à part entière, sur lequel le processus d'atomisation basé sur l'action des forces aérodynamiques peut éventuellement prendre place. Pour qu'il y ait de nouveau rupture, il faut que les forces aérodynamiques dues au déplacement de la goutte par rapport au gaz environnant soient plus efficaces que les forces de tension de surface qui assurent la cohésion de la goutte. C'est le cas lorsque le diamètre ou la vitesse de la goutte est suffisamment grand. Ce mécanisme est très bien décrit par Shraiber *et al.* [2]. Un schéma décrivant un exemple de ce type de mécanisme est présenté sur la figure 1.3.

Chaque étape présentée précédemment (l'écoulement interne à l'injecteur, la formation du système liquide libre, la déformation du système liquide et la rupture en gouttes) influence le processus menant à la rupture en gouttes. Cependant, il est facile de voir combien les propriétés du liquide injecté et celles du gaz environnant conditionnent ces influences successives.

Par exemple, la valeur de la **tension de surface** du couple liquide/gaz induit évidemment une variété de comportements. En effet, une manière de définir la qualité d'un spray est de quantifier l'augmentation de la surface liquide en contact avec le gaz environnant. La surface avant atomisation est simplement celle du système liquide émergeant de l'injecteur, alors qu'après l'atomisation, cette surface est égale à la somme des surfaces de chacune des gouttes. Le rapport entre ces deux valeurs donne directement une indication du niveau d'atomisation obtenu; ce qui est d'autant plus pertinent que l'on s'intéresse à des phénomènes de surfaces tels que l'évaporation (combustion) et l'absorption. La tension de surface est donc importante en atomisation des gouttes puisqu'elle représente la force résistante à la création de nouvelles interfaces liquide/gaz. Le nombre sans dimension per-

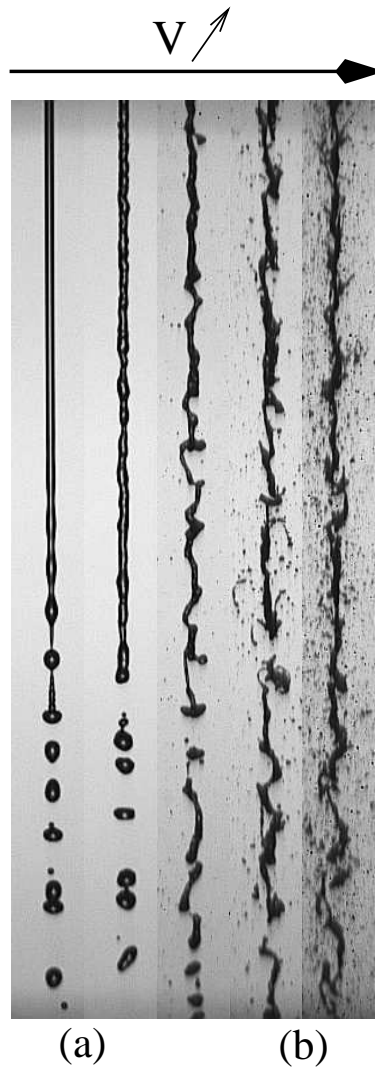


Figure 1.2: Photographies d'un jet liquide cylindrique illustrant les deux types d'atomisation rencontrés (Samuel Leroux/CORIA). (a) Premier type d'atomisation: les gouttes se détachent du corps du jet les unes à la suite des autres; (b) Second type d'atomisation: il y a "épluchage de l'interface" sous l'action des forces aérodynamiques.

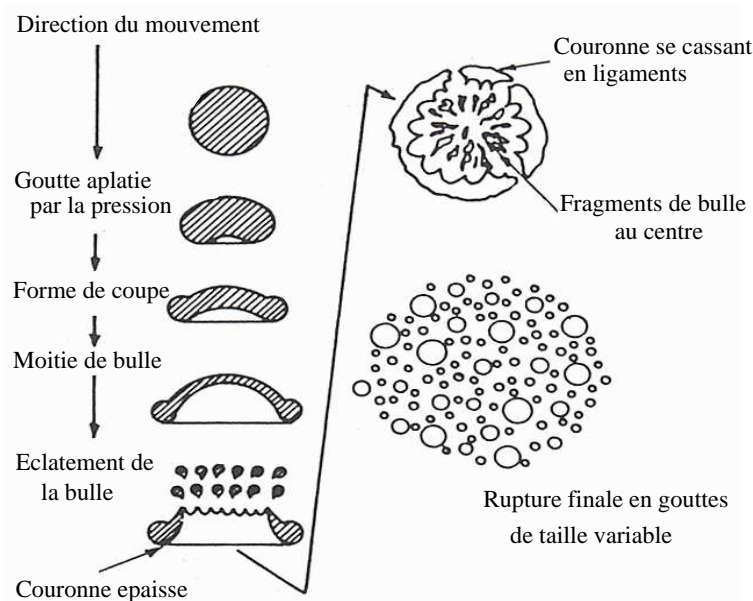


Figure 1.3: Schéma représentatif des mécanismes de l'atomisation secondaire (d'après [1]).

mettant de quantifier cette action est le nombre de Weber ¹, car il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de tension superficielle.

Bien que cela soit moins évident, l'influence de la **viscosité** est encore plus grande. Cela vient de son action double, d'une part sur le débit et la géométrie du système liquide formé à la sortie de l'injecteur et, d'autre part, directement sur la taille des gouttes du spray obtenu.

Une augmentation de la viscosité diminue le débit ² et la valeur du nombre de Reynolds, mais peut aussi retarder le développement des instabilités sur le jet ou la nappe liquide. Ici, on peut faire le lien avec l'influence du profil de vitesses à la sortie de l'injecteur et son éventuelle relaxation. Plus la viscosité est grande, plus le temps caractéristique de relaxation du profil de vitesses est importante. Cette action peut donc influencer l'établissement des instabilités initiales. Mais nous pouvons ajouter qu'une réduction du Reynolds induit une "tranquillisation" de l'écoulement (vis-à-vis de la turbulence), et donc peut provoquer une diminution des amplitudes des perturbations initiales. La diminution de la valeur du nombre de Reynolds et le retard du développement des instabilités ont pour effet de retarder la désintégration du système liquide. Cela a aussi pour effet d'augmenter la taille des gouttes du spray. Cette deuxième conséquence peut par exemple s'expliquer par une

¹ $We = \rho v^2 l / \sigma$ (où σ représente la tension superficielle, correspondant à une énergie par unité de surface): le nombre de Weber compare l'énergie cinétique par unité de volume aux forces de pression associées à la tension superficielle.

²sauf dans certains cas, comme celui des injecteurs produisant des nappes liquides coniques, et pour une plage de fonctionnement donnée.

diminution de l'influence de l'atomisation secondaire.

De manière générale, une augmentation de la viscosité a invariablement un effet néfaste sur le rendement de l'atomisation car, lorsque les pertes de charge dues à la viscosité sont grandes, il y a moins d'énergie disponible pour assurer l'atomisation. Les gouttes du spray sont alors plus grosses.

Les propriétés du gaz environnant sont aussi très importantes. Les plages de fonctionnement en pression et en température sont très grandes. Pour s'en rendre compte, il suffit de prendre pour exemple les conditions d'utilisation en combustion, comparées à celles d'un spray médical. Or, ces propriétés influencent aussi les processus décrit précédemment en agissant sur la valeur de la **densité** du gaz. La densité du gaz modifie notamment la géométrie du système liquide injecté.

De manière générale, la distribution en tailles de gouttes, la vitesse du spray, la géométrie de l'espace occupé par les gouttes dépendent de la densité du gaz.

Comme nous avons pu le voir, les mécanismes d'atomisation sont complexes et dépendent de beaucoup de paramètres. Nous comprenons alors la nécessité de bien caractériser l'état d'un spray en définissant des paramètres plus ou moins complexes, comme nous allons le voir maintenant.

1.2.2 Grandeurs caractéristiques d'un spray

De manière à optimiser le choix d'un spray pour une utilisation donnée, et donc celui d'un atomiseur, il faut en définir ses caractéristiques.

Tout d'abord, les distributions en tailles et en vitesses, qui sont des fonctions du type "*densité de probabilité*", permettent de connaître la répartition en tailles ou en vitesses des gouttes d'un spray. Mais ces *distributions numériques* peuvent aussi renseigner sur la répartition en volume (ou en masse), c'est-à-dire donner le pourcentage de gouttes ayant un volume donné.

Nous pouvons aussi distinguer les distributions numériques, des *distributions volumiques*. Les premières donnent la proportion du nombre de gouttes ayant une de leurs caractéristiques (taille, masse, vitesse) dans une classe de valeurs donnée. Les secondes sont définies pour donner la proportion du volume du spray composé de gouttes ayant une de leurs caractéristiques dans une classe de valeurs donnée. Bien entendu, pour un même spray et dans des conditions particulières sur la forme des gouttes, ces deux représentations se déduisent l'une de l'autre. En effet, pour un ensemble de gouttes sphériques, nous pouvons montrer que les distributions numérique (f_n) et volumique (f_V) sont liées par la relation:

$$f_V = \frac{D^3}{D_{30}^3} f_n(D) \quad (1.1)$$

où D est la variable désignant le diamètre des gouttes, et D_{30} , le diamètre de la goutte dont le volume, multiplié par le nombre de gouttes du spray, est égal au volume total du spray³.

³Dans la suite, nous définissons précisément les diamètres D_{ab} , où a et b sont des constantes (ici 3 et 0 respectivement pour D_{30}).

De manière à avoir un modèle de ces fonctions, les distributions normale ou Log-normale classiques peuvent être utiles [1]. La distribution normale est donnée par:

$$\frac{dN}{dD} = f_n(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_n} e^{-\frac{1}{2s_n^2}(D - \bar{D})^2} \quad (1.2)$$

où N , est le nombre de gouttes et s_n une mesure de la déviation de la valeur de D par rapport à la valeur moyenne \bar{D} . En règle générale, s_n est la déviation standard, et s_n^2 est la variance.

Souvent, la distribution en taille suit mieux cette distribution gaussienne si la valeur prise en compte pour D est la valeur du logarithme du diamètre de la particule. Alors, nous obtenons une distribution Log-normale dérivant de la distribution précédente. La distribution Log-normale est aussi valable pour les distributions en surface ou en volume.

Cependant, des représentations empiriques plus adéquates ont été proposées. La distribution de Nukiyama et Tanasawa [2] et ses dérivées sont les plus courantes:

$$\frac{dN}{dD} = aD^p \exp[-(bD)^q] \quad (1.3)$$

où b , p , et q sont des constantes arbitraires indépendantes généralisant la distribution proposée par les auteurs (a est déduite par normalisation de la fonction).

Celle de Rosin et Rammler [3] a autorité en ce qui concerne la distribution volumique en tailles des gouttes; elle s'énonce:

$$1 - Q = e^{-(D/X)^q} \quad (1.4)$$

où Q est une fraction du volume total, somme des volumes de chaque goutte dont le diamètre est inférieur à D . X et q sont des constantes arbitraires.

Il existe une distribution de Rosin-Rammler modifiée [4], spécifique au cas d'un injecteur à swirl, et une fonction à limite supérieure de Mugele et Evans [5] fonctionnant avec des valeurs finies pour le minimum et le maximum des tailles de gouttes (distribution bornée), donc plus réaliste.

A l'aide des distributions précédentes, il est facile de définir un autre type de paramètres très pratiques pour la caractérisation de l'état d'un spray. Il s'agit des *diamètres moyens*. L'expression générale d'un diamètre moyen D_{ab} , défini par les constantes entières a et b , est donnée par:

$$D_{ab} = \left[\frac{\int_{D_0}^{D_m} D^a (dN/dD) dD}{\int_{D_0}^{D_m} D^b (dN/dD) dD} \right] \left(\frac{1}{a-b} \right) \quad (1.5)$$

sachant que dN est le nombre de gouttes du spray dont le diamètre est dans l'intervalle dD . La somme $(a + b)$ s'appelle l'ordre du diamètre moyen. Par exemple, D_{10} est le diamètre

moyen au sens commun du terme; il s'agit de la moyenne arithmétique sur la distribution numérique des diamètres du spray. Son expression est

$$D_{10} = \left[\frac{\int_{D_0}^{D_m} D (dN/dD) dD}{\int_{D_0}^{D_m} (dN/dD) dD} \right] \quad (1.6)$$

D_{30} est le diamètre d'une goutte dont le volume, lorsqu'il est multiplié par le nombre total de gouttes, est égal au volume liquide total qu'occupe le spray. D_{32} , le *diamètre de Sauter*, est le diamètre d'une goutte dont le rapport volume sur surface est égal à celui du spray entier. Le tableau A.1 récapitule quelques uns des diamètres moyens les plus courants et leur domaine d'application (d'après [1], p. 91).

a	b	$a + b$	Symbole	Nom du diamètre moyen	Application
1	0	1	D_{10}	Longueur	Comparaisons entre sprays
2	0	2	D_{20}	Surface	Contrôle de la surface
3	0	3	D_{30}	Volume	Contrôle du volume
2	1	3	D_{21}	Surface sur longueur	Absorption
3	1	4	D_{31}	Volume sur longueur	Evaporation, diffusion moléculaire
3	2	5	D_{32}	Sauter	Transfert de masse, réaction
4	3	7	D_{43}	De Brouckere et Herdan	Equilibre de combustion

Table 1.1: *Diamètres moyens et leurs applications.*

D'autres diamètres permettent de connaître certaines caractéristiques de la distribution en tailles des gouttes. Par exemple, les *diamètres représentatifs* D_X , sont égaux aux diamètres de gouttes pour lesquels $X\%$ du volume total de liquide est contenu dans les gouttes ayant un diamètre inférieur à cette valeur. Ou bien encore, D_{max} , correspondant à la valeur du diamètre au maximum de la courbe de distribution. Mais ils existent encore d'autres paramètres associés à l'utilisation de tel ou tel modèle de courbe de distribution.

Enfin, des informations sur la dispersion en tailles des gouttes peuvent être connues à l'aide de coefficients dont la liste qui suit donne quelques exemples.

- Un index permet de mesurer le degré d'uniformité des gouttes:

$$\text{Index d'uniformité des gouttes} = \frac{\sum_i V_i (D_{0.5} - D_i)}{D_{0.5}} \quad (1.7)$$

où D_i est la valeur du diamètre à l'intérieur d'une classe ⁴ i , pour laquelle $i\%$ du volume total de liquide est contenu dans les gouttes ayant un diamètre inférieur à cette valeur.

Cette expression indique l'importance de la dispersion relative autour du diamètre médian $D_{0.5}$.

- Le facteur Δ défini par:

$$\Delta = \frac{D_{0.9} - D_{0.1}}{D_{0.5}} \quad (1.8)$$

détermine le domaine sur lequel les diamètres des gouttes du spray se répartissent autour du diamètre médian $D_{0.5}$. De plus, il est directement calculable à partir de la distribution de Rosin-Rammler qui donne alors: $\Delta = (3.322)^{1/q} - (0.152)^{1/q}$.

- L'index de dispersion est un autre paramètre utilisé pour connaître le domaine de dispersion en taille, qui, défini pour la distribution de Rosin-Rammler, s'écrit:

$$\delta = \int_{D_0}^{D_m} D \frac{dQ}{dD} dD = \int_{D_0}^{D_m} q \left(\frac{D}{X} \right)^q \exp \left[- \left(\frac{D}{X} \right)^q \right] dD \quad (1.9)$$

Sa forme relativement compliquée fait préférer l'utilisation de l'expression précédente du facteur Δ .

- Enfin, pour accéder à une indication de la taille maximale possible pour une goutte, un autre facteur est efficace. Son expression a une forme très proche de celle de Δ et s'écrit:

$$\Delta_B = \frac{D_{0.999} - D_{0.5}}{D_{0.5}} \quad (1.10)$$

En considérant une distribution de Rosin-Rammler, nous avons

$$\frac{D_{0.999}}{X} = (6.908)^{1/q},$$

et, par conséquent, $\Delta_B = (9.967)^{1/q} - 1$.

Parmi les caractéristiques présentées, la *fonction densité de probabilité*, caractérisant la distribution des tailles ou des vitesses des gouttes d'un spray, va nous intéresser plus particulièrement dans la mesure où elle peut être prédite grâce au formalisme de l'entropie maximum.

⁴Notons ici que les équations sont discrétisées comme leur utilisation le nécessite. Cette notation est équivalente à la notation "continue" utilisée pour présenter les diamètres moyens dans le paragraphe précédent.

1.2.3 Modélisation de l'atomisation

Les premiers modèles décrivant un processus d'atomisation sont dus à Plateau [7] et Rayleigh [6, 8]. La **théorie linéaire** de Rayleigh permet de décrire simplement, grâce à un formalisme mathématique très accessible, les mécanismes fondamentaux de déstabilisation de l'interface liquide/gaz. En outre, cette description donne accès à la connaissance des longueurs d'onde des perturbations dominantes s'installant à la surface du jet, de leur taux de croissance (diagramme de dispersion), et d'une bonne approximation de la longueur de rupture. Connaissant la longueur d'onde associée à la perturbation dominante, un schéma simple de rupture en gouttes permet de calculer une valeur de la taille des gouttes obtenues avec un bon accord expérimental. Ce modèle est présenté dans la section suivante pour le cas particulier de l'instabilité d'un jet liquide cylindrique.

Ce modèle est aussi à la base des développements successifs de la théorie linéaire dont nous reparlerons dans le cadre du jet liquide cylindrique. Ces théories plus récentes ont été mises au point dans le but de tenir compte de comportements plus fins mis en évidence par des études expérimentales basées essentiellement sur l'étude statistique de mesures de longueurs de rupture.

La théorie linéaire est construite sur la linéarisation des équations du mouvement du jet. Au delà de cette linéarisation, en tenant compte des termes d'ordre supérieur, naissent les **théories faiblement non linéaires**. Leur limite actuelle est fixée par la complexité de l'étude analytique, actuellement située à l'ordre 3. Ces méthodes ont l'avantage de fournir des schémas du processus d'atomisation pouvant inclure l'apparition de satellites. Les satellites sont des gouttes de petites tailles accompagnant la formation d'une goutte correspondant à la perturbation dominante dans un processus classique comme celui décrit par la théorie de Rayleigh. Ces modèles permettent aussi de retrouver l'évolution de la puissance des modes fondamental et harmoniques associés à la longueur d'onde naturelle déstabilisant le jet. Nous retrouverons plus précisément cet aspect dans l'étude de nos propres résultats expérimentaux (cf. Chap. 2). Globalement, nous pouvons dire que ces méthodes permettent de tenir compte de plusieurs échelles sur le processus de rupture capillaire, contrairement à la théorie linéaire limitée à l'échelle caractéristique de la perturbation principale.

Grâce à l'augmentation continue des performances de calculs, les méthodes numériques se développent en permanence et font apparaître des méthodes plus sophistiquées basées sur le principe des nappes tourbillonnaires, ou sur celui des volumes de fluide (*abréviation: V.O.F.*), par exemple. Ces méthodes, **fortement non linéaires**, ont l'avantage de ne pas limiter leur domaine de validité aux petites amplitudes de perturbations comme c'est le cas, en toute rigueur, pour les théories linéaires et faiblement non linéaires, même si les résultats de ces dernières sont malgré tout systématiquement extrapolés jusqu'à la rupture en gouttes.

Encore difficilement exploitables à cause des temps de calculs qu'elles demandent et de leur sensibilité aux paramètres d'entrée, ces méthodes sont néanmoins très représentatives des observations. Par exemple, comme nous pouvons le constater sur un exemple particulier présenté sur la figure A.1, l'utilisation des "volumes de fluide" donne de très bonnes simulations de l'atomisation secondaire. Par ailleurs, nous pouvons noter que, du point

de vue de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, la sensibilité aux paramètres d'entrée que ces méthodes accusent ressemble fortement à une des caractéristiques classiques permettant d'identifier un phénomène non linéaire: la sensibilité aux conditions initiales. Il n'est donc pas étonnant de constater un tel type de comportement sur des méthodes construites à partir de systèmes d'équations non linéaires.

La grande faiblesse de ces méthodes numériques est qu'elles ne permettent généralement pas la détermination des caractéristiques des perturbations qui vont conduire le système liquide à la rupture. Elles calculent l'évolution de la ou des déformations interfaciales, introduites au temps initial par l'utilisateur, et souvent déduites des résultats de la théorie linéaire. De la même manière, les méthodes numériques permettant d'accéder à l'évolution globale d'un spray (ruptures secondaires, évaporation, recombinaisons entre gouttes, et collisions entre particules et sur des parois), nécessitent souvent l'introduction un peu artificielle d'une fonction de distribution initiale des tailles de gouttes.

Enfin, notons que ces méthodes fortement non linéaires sont limitées à des sauts de masse volumique relativement faible. Elles sont notamment très utilisées pour la modélisation des jets de gaz dans un gaz ⁵.

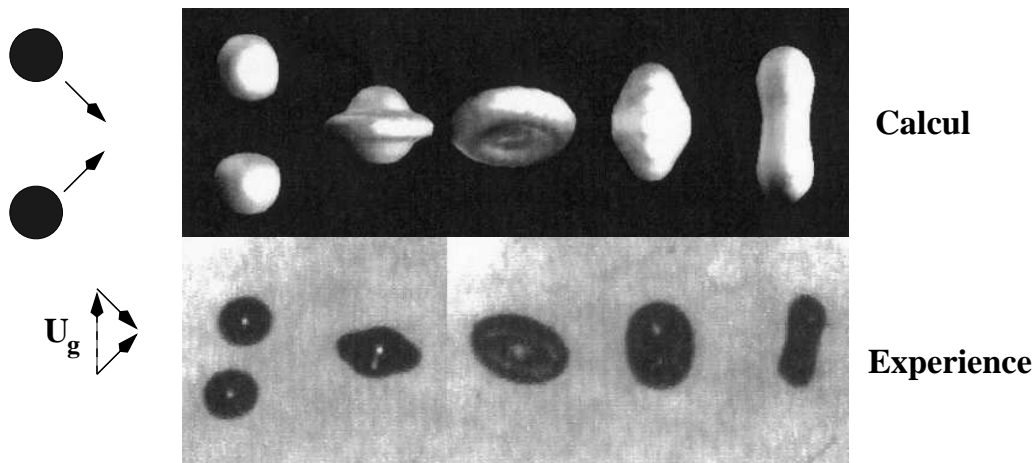


Figure 1.4: Exemple d'une collision avec coalescence entre deux gouttelettes d'un point de vue expérimental (Visualisation ONERA/CERT/DERMES) et d'un point de vue numérique à l'aide de la méthode des "volumes de fluides" (V.O.F., code SURFER). Les paramètres physiques sont: $We = \frac{\rho_l d_g U_g^2}{\sigma_l} = 52$; $Re = \frac{\rho_l d_g U_g}{\mu_l} = 420$; où $d_g = 200\mu m$ est le diamètre des gouttelettes.

Enfin, en marge de ces formalismes basés sur les équations du mouvement, nous trouvons le **formalisme de l'entropie maximum**. Il offre la possibilité de prédire la fonction

⁵Même si ce problème est plus complexe encore car il doit tenir compte du mélange possible entre les deux phases gazeuses: celle du jet et celle du gaz environnant.

de densité de probabilité caractérisant la distribution numérique des tailles ou des vitesses des gouttes d'un spray. Cette théorie permet de calculer la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire dont le comportement est contraint par certaines propriétés. Par exemple, ces contraintes peuvent s'exprimer par la connaissance de la valeur moyenne ou des moments de différents ordres de la variable aléatoire. En outre, une contrainte supplémentaire est imposée par la condition de normalisation que toute fonction de densité de probabilité doit satisfaire. Par conséquent, chacune de ces contraintes doit pouvoir s'exprimer sous une forme analogue à:

$$\int_{D_{min}}^{D_{max}} f(D) g_i(D) dD = \langle g_i \rangle \quad (1.11)$$

Le formalisme de l'entropie maximum ajoute alors une condition supplémentaire pour aboutir à un système d'équations ayant une solution unique: la fonction de densité de probabilité solution est celle dont l'entropie est maximum. La définition de l'entropie d'une fonction de densité de probabilité est due à Shannon [9]. Dans le cas d'une distribution de probabilité continue, elle s'écrit:

$$S = -k \int_0^{\infty} f(D) \ln(f(D)) dD \quad (1.12)$$

où k est une constante positive, et f la fonction de densité de probabilité. S s'appelle donc l'*entropie de Shannon* de la fonction f . Elle caractérise l'incertitude sur le comportement de la variable aléatoire décrit par la fonction de densité de probabilité. Pour une fonction de densité de probabilité équivalente à un pic de Dirac, l'entropie de Shannon est nulle, car le choix de la variable aléatoire est unique, et sa probabilité d'être tirée égale à 1. Pour une fonction dont tous les états sont équiprobables, l'entropie est au contraire maximum, et ne dépend que de la largeur de l'intervalle de variation de la variable aléatoire.

Dans l'ensemble des fonctions densité de probabilité qui sont solutions du système sur les contraintes initiales, le formalisme de l'entropie maximum suggère alors de choisir celle dont l'entropie est maximum, et de la considérer comme étant la plus adaptée au problème posé.

Il est intéressant de voir que ce formalisme ne nécessite pas l'introduction de contraintes physiques outre celles portant sur des lois générales de conservations (de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie cinétique, ou de l'énergie de surface). Cependant, l'écriture mathématique peut aussi traduire des contraintes *ad-hoc* telles que la contrainte de partition proposée par Sellens [10], dont la but est d'imposer à la fonction de densité de probabilité de décroître vers zéro quand le diamètre tend vers zéro. Il est démontré que ces contraintes sont équivalentes aux diamètres moyens qui leur sont associés, respectivement D_{30} , D_{20} et D_{-10} pour la conservation de la masse, la conservation de l'énergie de surface et la contrainte de partition. Cependant, le formalisme montre une très grande sensibilité dans ses résultats à la forme de l'écriture mathématique utilisée pour exprimer ces contraintes.

Il faut savoir que la maximalisation de l'entropie de Shannon, liée à une contrainte associée à un diamètre moyen, aboutit à une distribution numérique dont le maximum est souvent situé au diamètre nul, ce qui est *a priori* physiquement absurde. Mais en s'éloignant du diamètre strictement nul, ce résultat signifie aussi que les plus petites gouttes sont aussi

les plus nombreuses. Et aucune étude expérimentale ne permet vraiment de confirmer ou d'infirmer cette surprenante affirmation du formalisme. C'est à cause de ce résultat que Sellens a introduit la contrainte de partition vue précédemment.

De manière à disposer d'une méthode purement calculatoire permettant la prédiction de distributions en tailles, Cousin *et al.* [11, 12, 13] ont proposé une méthode basée sur la théorie linéaire et le formalisme de l'entropie maximum. Cette procédure a été développée avec succès dans le cas d'injecteurs à composante rotative. Cette étude a permis aussi de montrer que si l'entropie de Shannon semble adaptée pour la détermination de distributions numériques, il est plus approprié d'utiliser l'entropie de Bayes pour l'estimation de distributions volumiques. Enfin, la nature de l'information disponible impose le choix de la distribution à calculer. En effet, si un diamètre moyen connu (théorique ou mesuré) est représentatif des populations de petites gouttes, il est probable que la prédiction de la distribution numérique soit de meilleure qualité. En revanche, quand l'information connue est relative aux grosses particules, c'est la distribution volumique qu'il est préférable de chercher à déterminer puisque la représentativité des petites gouttes pour le volume de liquide est nécessairement faible.

Après avoir passé en revue différents aspects de l'atomisation dans un cadre général, il est temps, maintenant, de s'attarder sur le problème spécifique de l'atomisation d'un jet liquide cylindrique. Nous allons voir que certains des concepts généraux présentés précédemment vont pouvoir être précisés en fonction des particularités liées à l'atomisation de ce type de jet.

1.3 L'atomisation d'un jet liquide cylindrique

Dans un premier temps, nous verrons la manière dont le champ de vitesses s'établit en sortie de buse, et les caractéristiques phénoménologiques principales de l'atomisation d'un jet liquide cylindrique. Ensuite, nous verrons les apports de la théorie linéaire avec la présentation simple de son formalisme, et son évolution avec une prise en compte successive de différentes propriétés physiques du système liquide et du gaz environnant. Enfin, le problème de la prédiction du premier point de vitesse critique (du diagramme de stabilité) sera discutée.

1.3.1 Etablissement du champ de vitesses en sortie de buse

Comme nous l'avons déjà souligné, la géométrie de l'injecteur impose les conditions initiales de l'écoulement liquide en sortie de buse. Le champ initial de vitesses imposé peut alors influencer les mécanismes de rupture en gouttes. Pour commencer cette section, nous allons donc étudier l'établissement du profil de vitesses dans ce système d'injection.

La géométrie d'un injecteur (fig. 1.5) comprenant notamment un écoulement dans un tube (dont le but est de générer un jet cylindrique), est caractérisée par la présence d'un convergent en amont de la section tubulaire. Ce convergent va être déterminant pour deux caractéristiques principales de l'écoulement avant son entrée dans le tube. Premièrement, si le rapport de contraction d/d_e entre le diamètre de sortie et d'entrée du convergent est

suffisamment petit, alors nous savons qu'il est possible de négliger la présence de la turbulence à l'entrée du tube et, par extension, toute perturbation dans le système d'injection en amont de la partie tubulaire. De mme, pour un rapport de contraction identique, plus l'angle de convergence α , angle au sommet du convergent, est petit, plus les pertes de charges augmenteront dans le convergent ⁶. Deuxièmement, la présence du convergent permet d'obtenir un profil de vitesses plat à l'entrée de la section tubulaire. Des caractéristiques bien choisies permettent alors d'avoir un comportement reproductible de l'écoulement et du jet.

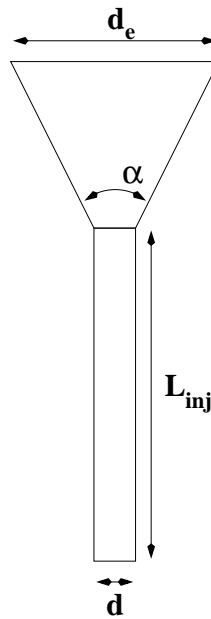


Figure 1.5: Géométrie de l'injecteur étudié dans cette thèse, permettant de générer un jet cylindrique.

Les caractéristiques de l'écoulement à l'entrée du tube sont maintenant bien connues: idéalement, l'écoulement y est laminaire, et le profil de vitesses est relativement plat. Une dernière caractéristique importante de la géométrie de l'injecteur va maintenant déterminer la structure de l'écoulement en sortie de buse. Il s'agit du rapport L_{inj}/d de la longueur du tube sur son diamètre. Plus ce rapport est grand, plus les contraintes de cisaillements dues aux interactions pariétales vont être subies longtemps par le liquide injecté (sur une plus longue distance). La couche limite résultante va donc être d'autant plus développée que ce rapport sera grand. La limite est atteinte lorsqu'un allongement supplémentaire ne modifie plus la forme du profil des vitesses, celui-ci restant un profil de Poiseuille.

⁶Lorsqu'il y a une augmentation des pertes de charges linéiques en allongeant le cône, les pertes de charges singulières dues à la géométrie conique deviennent alors négligeables. Ainsi, globalement, les pertes de charges augmentent lorsque le cône s'allonge

Afin de déterminer exactement l'évolution du champ des vitesses dans le tube, S. Leroux [16] a adapté une méthode numérique élaborée et validée par C. Dumouchel afin de déterminer le profil de vitesses d'un écoulement **laminaire** dans un tube. Etant incompressible, stationnaire, et axisymétrique, l'écoulement dans un tube est décrit par l'équation de Helmholtz ⁷, l'équation de continuité, et les expressions de conditions aux limites. Il s'ensuit une résolution du modèle à l'aide d'une méthode aux différences finies permettant d'obtenir le champ des vitesses dans tout le tube.

En choisissant comme origine l'endroit où l'écoulement entre dans le tube avec un profil de vitesses plat (la vitesse est uniforme, égale à V_e en tout point de la section d'entrée), cette méthode permet de calculer l'évolution de la forme du profil de vitesses en fonction de la distance z à l'origine, pour différents nombres de Reynolds. Une évolution typique du profil de vitesses est schématisée sur la figure 1.6.

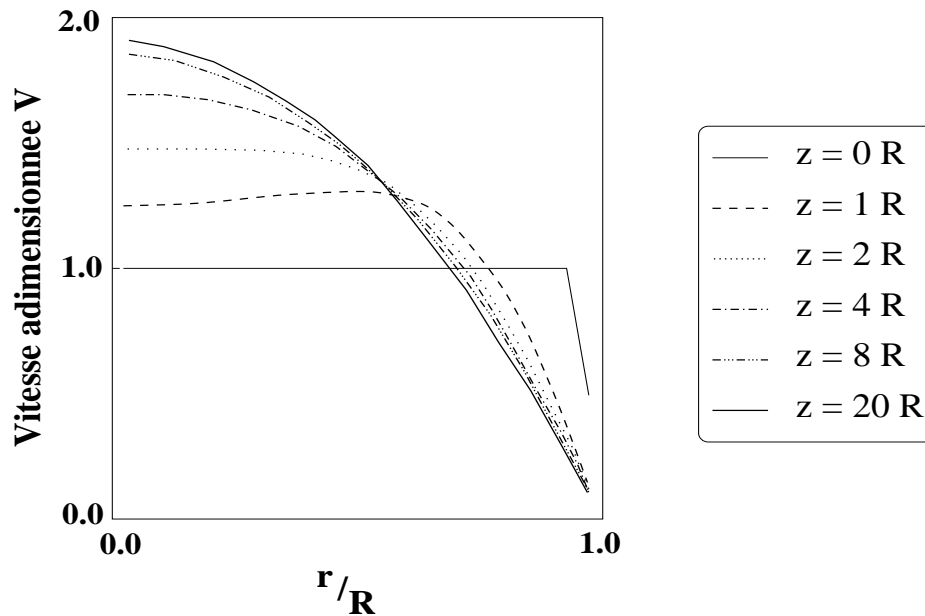


Figure 1.6: *Evolution du profil de vitesses en fonction de la distance z de la section de sortie de la buse d'injection. $R = d/2$ est le rayon du jet.*

Comme on peut s'y attendre, les résultats montrent que plus le nombre de Reynolds est petit (jet visqueux), plus le profil s'établit sur une courte longueur de tube. En effet, une forte viscosité permet un établissement rapide des couches limites, et donc un établissement rapide du profil de Poiseuille. Au centre du profil de Poiseuille, la vitesse est double de la vitesse débitante. Ainsi, en faisant l'hypothèse que le passage brutal d'un écoulement tubulaire à un écoulement de jet libre ne modifie pas sensiblement la nature

⁷L'équation de Helmholtz est l'expression rotationnelle de l'équation de Navier-Stokes.

de l'écoulement en amont (dans le tube), cette méthode permet de déterminer, pour tout nombre de Reynolds et toute longueur de tube, le profil de vitesses en sortie de tube.

A partir de la connaissance du profil de vitesses en tout point d'abscisse z sur l'axe du tube, il est possible de définir une relation donnant l'évolution de la couche limite ayant la forme suivante:

$$\frac{\delta}{z} \propto \frac{1}{\sqrt{Re_z}}$$

Cette relation, valable dans le cas d'une couche limite développée par un écoulement laminaire arrivant sur une plaque plane, montre un rapport de l'épaisseur δ de cette couche limite sur la distance z au bord d'attaque, proportionnel à une fonction du nombre de Reynolds Re_z (calculé en prenant z comme longueur caractéristique). Dans le cas de l'écoulement tubulaire, en prenant comme critère de définition de la couche limite l'épaisseur pour laquelle la vitesse est 0.99 fois la vitesse au centre (sur l'axe), les résultats présentés en échelle logarithmique permettent de proposer deux lois de puissance en fonction du domaine sur lequel le nombre de Reynolds évolue:

- Pour $Re_z > 1000$, on retrouve l'expression de l'épaisseur de la couche limite dans le cas d'une plaque plane. C'est-à-dire :

$$\frac{\delta}{z} = \frac{5}{\sqrt{Re_z}} \quad (1.13)$$

- Pour Re_z plus petit ($Re_z < 100$), la loi de puissance est:

$$\frac{\delta}{z} = \frac{1.2}{Re_z^{1/4}} \quad (1.14)$$

De la même manière, la longueur d'établissement du profil de Poiseuille peut être déterminée à partir des évolutions des profils de vitesses. Comme nous l'avons déjà remarqué, le profil est établi lorsque la vitesse au centre est égale au double de la vitesse débitante (vitesse uniforme imposée à l'entrée du conduit tubulaire pour obtenir un profil plat). En fait, deux critères ont été utilisés pour définir la longueur d'établissement, le profil étant considéré comme établi: (i) lorsque la vitesse au centre est égale à 99% de celle du profil de Poiseuille, ou, (ii) lorsque la vitesse au centre est strictement égale (à la précision numérique près) à celle du profil de Poiseuille. Par comparaison aux relations classiques utilisées pour calculer des longueurs d'établissements (lois de Byrd et Stewart [17], de Strikler, ou celles données par Nekrasson [18] ou Comolet [19]), on trouve que pour de forts nombres de Reynolds, $Re_R > 50$ (Reynolds calculé sur R , rayon interne du tube), la relation de Strikler

$$\frac{L_{et}}{R} = 0.2Re_R$$

est en accord avec la longueur d'établissement calculée avec le premier critère (99% $2V_e$). Pour des valeurs du Reynolds plus faibles ($Re_R < 50$), la relation de Strikler sous-estime

la longueur d'établissement. Par contre, celle-ci semble alors tendre vers une loi similaire déduite de la relation (1.14) concernant le calcul de l'épaisseur de la couche limite, c'est-à-dire :

$$\frac{L_{et}}{R} = 0.78 Re_R^{1/3} .$$

Pour de tels nombres de Reynolds, il ne faut pas oublier que la longueur d'établissement est petite devant le diamètre du tube. Les critères d'obtention des relations analytiques caractérisant les couches limites laminaires perdent alors leur signification. C'est pourquoi il n'est pas étonnant de constater la nécessité d'une deuxième loi et la difficulté de sa définition pour déterminer la longueur d'établissement dans ces cas extrêmes.

Ces dernières relations peuvent être aussi exprimées dans le cas d'un écoulement tubulaire **turbulent**. On admet que la zone de transition entre régime laminaire et turbulent est située à un Reynolds de 2300 pour les jets cylindriques [20]. Pour des valeurs supérieures mais proche de 2300, l'écoulement peut rester laminaire juste en sortie de convergent. La turbulence peut alors se développer à mesure que le liquide avance dans le tube en interagissant avec la paroi⁸. La turbulence sera plus ou moins développée selon la longueur d'interaction avec la paroi. Ainsi, selon le critère choisi, il existe des relations variées entre la longueur d'établissement de l'écoulement pleinement turbulent et le nombre de Reynolds liquide. Citons celle de Latzko [21]

$$\frac{L_{et}}{D} = 0.693 Re_L^{1/4}$$

de Boulus *et al.* [22]

$$\frac{L_{et}}{D} = 14.25 \log(Re_L) - 46$$

ou encore celle de Coulson *et al.* [23]

$$\frac{L_{et}}{D} = 0.0288 Re_L$$

La géométrie de l'injecteur conditionne donc la nature (laminaire ou turbulent) et les caractéristiques du profil de vitesses en sortie de buse. En outre, la géométrie interne de l'injecteur peut aussi favoriser l'apparition de phénomènes de cavitation ou de zones de décollement de l'écoulement. Toutes ces caractéristiques sont transmises en aval de l'écoulement, avec pour conséquence une forte influence de ces conditions particulières sur les mécanismes de rupture du jet.

Dans la section suivante, nous allons donc commencer par regarder les principaux aspects de la rupture en gouttes d'un jet cylindrique à l'aide de la *courbe de stabilité*. Ensuite, nous verrons comment les caractéristiques de l'écoulement en sortie de buse (influencées par la géométrie de l'injecteur) peuvent déterminer le type de processus menant un jet à se déstabiliser pour se rompre. Nous y verrons aussi l'influence des paramètres du gaz environnant (densité, viscosité). Enfin, quelques classifications bien connues de régimes de désintégration seront présentées (études paramétriques).

⁸C'est la présence du convergent qui empêche le développement de la turbulence en amont du tube.

1.3.2 Particularités de la rupture d'un jet liquide cylindrique

La courbe de stabilité

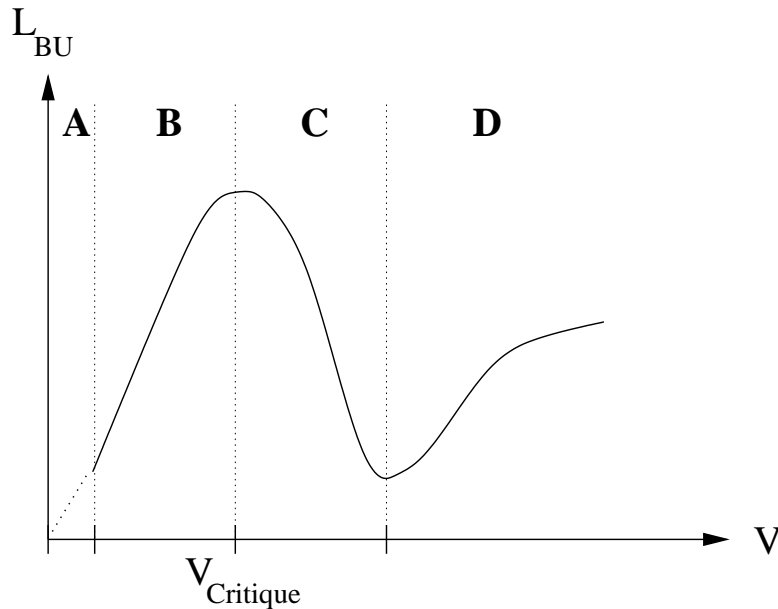


Figure 1.7: *Courbe de stabilité d'un jet liquide cylindrique.*

La courbe de stabilité permet de distinguer aisément les quatre régimes de désintégration d'une colonne liquide. Elle est définie comme étant la représentation de la longueur de rupture du jet (longueur du système liquide intact de la sortie de la buse d'injection jusqu'au point de rupture en gouttes) en fonction de la vitesse débitante (vitesse moyenne de l'écoulement) (Voir l'article de revue de Lin et Reitz [24]). Sur cette représentation (fig. 1.7), la courbe n'est pas définie aux petites vitesses (région A). Ce régime correspond au goutte à goutte sur lequel nous ne pouvons pas définir une longueur de rupture. Une étude de ce régime dans le cas d'un simple robinet est efficacement traitée grâce aux concepts de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires (voir §1.4.2). Dans ce régime, une goutte tombe lorsque les forces de gravité l'emportent sur les forces de tension de surface "retenant" la goutte à la buse.

Rapidement, à mesure que la vitesse débitante augmente, un corps liquide commence à se distinguer de la simple goutte accrochée à la buse. Une longueur de rupture peut alors être définie. C'est le début de la deuxième région, région B, appelé *régime de Rayleigh* puisque ce dernier a proposé la première description de la rupture en goutte d'un jet liquide cylindrique en 1878 [6] qui permet une bonne prédiction de la courbe de stabilité dans cette plage de fonctionnement. Dans cette région, la longueur de rupture croît linéairement avec la vitesse. C'est l'*instabilité capillaire*, appelée ainsi car ce sont les forces de tension de

surface qui sélectionnent et amplifient les perturbations initiales, qui est à l'œuvre dans ce régime. Elle génère la croissance d'une perturbation sinusoïdale axisymétrique (mode varicose, figure 1.8) dont la longueur d'onde varie peu. Le spray obtenu est alors dit relativement mono-dispersé: la dispersion en taille des gouttes principales est faible ⁹.

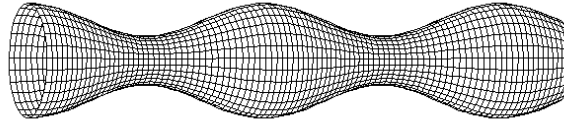


Figure 1.8: *Allure de la surface d'une colonne liquide perturbée par le mode sinusoïdal axisymétrique (variqueux).*

Dans la troisième région, la longueur de rupture décroît avec la vitesse. Ainsi, les régions *B* et *C* sont séparées par un point de vitesse critique où la courbe de stabilité montre un maximum. Dans ce régime, on dit couramment que les processus d'atomisation commencent à être influencés par les forces aérodynamiques (interactions liquide-gaz dues au différentiel de vitesse entre ces deux phases). Même si ce n'est pas rigoureusement toujours le cas, cette région est communément appelée "first wind induced zone". Les processus d'atomisation ressemblent à ceux de la région *B*, avec une perte de la symétrie axiale à cause de l'apparition de perturbations sinusoïdales, de grandes longueurs d'onde, et une diminution de la taille moyenne des gouttes produites. En outre, ce mécanisme est moins régulier, les gouttes ne sont plus aussi bien alignées que précédemment, l'écart entre deux gouttes est moins uniforme. Leur vitesse et leur taille sont plus dispersées. Les satellites deviennent plus nombreux.

Après le deuxième point de vitesse critique, la longueur de rupture se met de nouveau à croître même si la détermination d'une longueur de rupture devient difficile. La largeur absolue de la fonction de densité de probabilité diminue, mais les longueurs de rupture étant plus faibles, la largeur relative (comparée à la longueur moyenne de rupture) reste importante. Dans cette dernière région où le jet est turbulent (région *D* sur la figure), l'action des forces aérodynamiques devient prépondérante; cette zone est appelée "second wind induced zone". Le processus de rupture se complète par un processus d'arrachage à l'interface: le jet ne subit plus uniquement une rupture en masse (sur la section finale du jet), mais aussi l'arrachage de gouttelettes à sa périphérie. La rupture devient désordonnée et dense expliquant les difficultés à définir une longueur de rupture. Le spray obtenu est très riche, plus fin et très poly-dispersé. Enfin, en augmentant encore la vitesse, la rupture se produit quasiment dès la sortie de l'injecteur. Le jet est déchiqueté et épluché très rapidement en un brouillard très dense de très fines gouttelettes.

Cette classification est utile pour arriver à déterminer notamment la prépondérance de tels ou tels effets dans les mécanismes de rupture. Mais nous verrons au long de ce

⁹Il existe cependant de petites gouttes associées au détachement d'une grosse goutte. Ces gouttelettes sont appelées "satellites".

mémoire que les raisons évoquées pour expliquer les différences de comportement entre chaque région ne sont pas toujours aussi simples qu'il y parait.

Pour comprendre l'importance de cette dernière remarque, nous allons nous intéresser à l'influence de la relaxation du profil de vitesses.

La relaxation du profil de vitesses

Certaines expériences peuvent mener à des comportements très différents de ceux présentés précédemment à partir de la courbe de stabilité classique.

Une étude de Smith et Moss [25] met en évidence le rôle du rapport L_{inj}/d en réalisant des expériences avec un jet d'eau issu d'un trou de 0.25 mm pratiqué dans une fine plaque d'acier et avec un jet d'eau issu d'un capillaire en verre de même diamètre. Le jet issu du capillaire a un point de vitesse critique. Celui de la plaque d'acier montre une longueur de rupture sans cesse croissante avec la vitesse, apparemment sans point de vitesse critique (pour la plage de fonctionnement qu'ils ont utilisée). Smith et Moss pensent que l'élévation du rapport L_{inj}/d produirait l'apparition du point de vitesse critique. Malgré cela, nous pouvons penser qu'une vitesse critique peut finalement apparatre pour des valeurs suffisamment grandes de la vitesse du jet, pour lesquelles les forces aérodynamiques vont entrer en jeu dans la déstabilisation de l'écoulement.

Hooper [26] décrit une rupture explosive d'un jet dont la surface initialement lisse est rapidement suivie par une région de soudaine et complète atomisation. Ne pouvant tre attribuée aux forces aérodynamiques puisqu'indépendante de la pression ambiante dans une plage de 0.031 à 1 atm , cette rupture explosive serait due à la conversion de l'énergie cinétique en pression lors du passage d'un profil de vitesses parabolique à un profil plat.

En comparant des jets laminaires à haute vitesse et des jets turbulents, Rupe [27] constate que les jets laminaires sont plus instables, se brisant avec une extrême violence, et ce, beaucoup plus tôt que des jets turbulents où la turbulence est pleinement développée. Il remarque que la relaxation du profil parabolique entrane la création d'un gradient de pression radial qui engendre une composante radiale de vitesse. Cette dernière pourrait tre tenue pour responsable de la désintégration du jet.

L'analyse "classique" de la courbe de stabilité ne laisse pas prévoir l'importance de la structure interne de l'écoulement, telle que nous commenons à l'appréhender. Il doit donc être intéressant de connatre l'évolution du profil de vitesses au cours de sa relaxation afin de mieux comprendre son influence. Ainsi, Duda *et al.* [28] ont mis en évidence l'apparition de points d'inflexion sur le profil de vitesses (connus pour tre générateur d'instabilités dans les couches de mélanges) au cours de la relaxation d'un profil de Poiseuille dans un jet libre.

Pour finir ce paragraphe, nous pouvons observer l'influence du profil de vitesses sur les photographies de McCarthy et Molloy [29] (fig. 1.9). Plus la longueur de la buse est importante, moins le profil de vitesses en sortie d'injecteur est plat, et plus l'atomisation est "explosive".

Nous reviendrons plus précisément sur l'action du profil des vitesses dans la section 1.3.4 consacrée à la prédiction de la position du point critique.

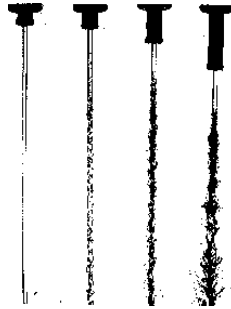


Figure 1.9: *Action du rapport de la longueur de buse sur son diamètre interne dans l'atomisation d'un jet cylindrique. Cette action passe par une modification de l'allure du profil de vitesses (d'après [29]).*

Enfin, on peut penser que la relaxation du profil de vitesses peut aussi agir à travers son action sur le développement de la turbulence. La relaxation du profil de vitesses induit l'apparition de points d'inflexion sur le profil. Ceux-ci font donc apparaître de nouvelles tailles caractéristiques dans l'écoulement. La valeur du nombre de Reynolds calculée sur ces nouvelles tailles caractéristiques pourrait donc expliquer l'apparition de la turbulence de manière localisée dans le jet.

Action de la turbulence sur le développement des instabilités

Nous allons voir que le profil de vitesses peut aussi se comprendre à partir de son action sur le développement de la turbulence dans l'écoulement.

Son action reste encore peu précise car la présence de turbulence est difficile à déterminer. La valeur du Reynolds critique d'apparition de la turbulence dans un écoulement tubulaire dépend fortement des conditions d'entrée dans le tube ¹⁰, des vibrations du dispositif expérimental, et de l'état de surface de l'injecteur. En fait, le profil parabolique est stable devant toutes les perturbations infinitésimales: il est donc nécessaire d'introduire une perturbation d'amplitude finie pour le déstabiliser. L'instabilité peut apparaître alors sous forme de zones turbulentes: celles-ci se propagent le long du tube comme des bouchons et alternent avec des zones laminaires. Cette "intermittence" se manifeste par l'observation d'un jet saccadé à l'extrémité du tube.

De manière plus générale, quelques études mettent en évidence la contribution de la turbulence (pleinement développée ou non) dans l'initiation des perturbations en début de jet. Cependant, il reste que le rôle de l'amplification des perturbations menant à la rupture en gouttes semble dévolu aux tensions interfaciales et aux forces aérodynamiques. De ce fait, les mécanismes d'action de la turbulence sur les processus de rupture peuvent entrer en compétition avec d'autres modes de déstabilisation comme la relaxation du profil de vitesses (selon que le jet est laminaire ou non). Notamment, comme nous l'avons déjà vu

¹⁰Elle peut varier de quelques milliers à quelques centaines de milliers.

avec le problème de la relaxation du profil des vitesses, il n'est pas évident que la position du point de vitesse critique soit toujours pilotée par l'intervention des forces aérodynamiques. Nous pouvons donc supposer que la partie décroissante de la courbe de stabilité peut être liée à l'intervention de la turbulence dans le processus de rupture.

Il est donc possible que la valeur de la vitesse critique et celle du maximum de la courbe de stabilité soient diminuées à cause de l'intervention des effets précédents: relaxation du profil de vitesses et/ou turbulence.

Influence du gaz environnant

Les propriétés du gaz environnant permettent de déterminer directement l'intensité des forces aérodynamiques. C'est la densité et le différentiel de vitesse liquide/gaz qui conditionnent l'intensité des forces aérodynamiques dans les processus d'atomisation. La pression ambiante, proportionnelle à la densité (en atmosphère isotherme), permet donc de régler l'intensité des forces aérodynamiques.

Plus spécifiquement, Miesse [30] montre, à partir d'expériences sur des jets d'eau et d'azote liquide, que la longueur d'onde des perturbations de la surface du jet menant à la rupture diminue avec l'augmentation du nombre de Weber gazeux, et augmente avec le nombre d'Ohnesorge ¹¹.

D'autres travaux [31, 32] permettent de montrer que l'augmentation de la densité de l'air augmente la qualité de désintégration du jet en diminuant la taille des gouttes et la longueur de rupture. Par ailleurs, celle-ci atteint une valeur constante aux fortes pressions ambiantes.

En plus des constatations précédentes, il faut tenir compte de l'influence de la viscosité du gaz. En fait, mme si celle-ci est beaucoup plus faible que celle du liquide, les gradients de vitesse dans le gaz sont importants et suffisent à imposer des contraintes de cisaillement non-négligeables. Dans la pratique, il est difficile de faire varier la viscosité du gaz qui est indépendante de la pression: de plus, les modifications de température susceptibles de faire varier sa valeur changent aussi les propriétés du liquide.

Etude paramétrique de l'atomisation. En reliant les observations expérimentales des processus d'atomisation à des nombres adimensionnels, il est possible, dans une certaine mesure, de classer l'action des différentes forces mises en jeu dans ces processus pour telle ou telle plage de fonctionnement.

Une première classification, basée sur les nombres d'Ohnesorge et de Reynolds, permet de déterminer si le jet est dans une situation de rupture de type Rayleigh, de type "first wind

¹¹Le nombre d'Ohnesorge: $Z = \frac{\mu_L}{\sqrt{\rho_L \sigma d}}$ (où μ_L est la viscosité dynamique du liquide, ρ_L , sa densité, σ la tension de surface du couple liquide/gaz, et d , le diamètre du jet) peut se comprendre comme étant le rapport de deux temps caractéristiques: un temps de croissance d'une onde capillaire $\tau_{capill} = \sqrt{\frac{\rho_L R^3}{\sigma}}$ (où R est le rayon du jet) avec un temps de diffusion de la vortacité $\tau_{dv} = \frac{R^2}{\nu}$ (où ν est la viscosité cinématique).

induced”¹², ou dans un troisième régime d’atomisation où l’action du gaz ambiant devient prépondérante sur les mécanismes de déformation du système liquide et fait intervenir l’atomisation secondaire. Ce premier type de classification, élaboré par Ohnesorge [33], a été complété par la réalisation d’une même étude prenant en compte un glissement des limites de ces trois régimes en fonction du rapport des densités gazeuse et liquide [34] (classification tri-dimensionnelle).

A partir de la représentation du différentiel de vitesse liquide/gaz en fonction du diamètre des gouttes, Littaye [35] a proposé une classification en régime de guttation (goutte-à-goutte), régime de rupture en masse (ou ”régime de pulvérisation”), et régime d’atomisation, plus dense et plus fin que le précédent.

Faragó et Chigier [36] proposent une classification des régimes de rupture d’un injecteur coaxial (injection centrale d’un jet liquide dans un écoulement d’air coaxial) selon le nombre de Reynolds liquide, et le nombre de Weber aérodynamique. Ce dernier est calculé sur la masse volumique du gaz, le différentiel de vitesse liquide/gaz, et la tension superficielle du couple liquide/gaz. Cette classification est basée sur la morphologie du jet d’eau issu de cet injecteur. On y distingue deux désintégrations de type Rayleigh (l’une axisymétrique, l’autre non-axisymétrique), une désintégration de type ”membrane”, une autre de type ”fibre”, et une région où la désintégration est caractérisée par des pulsations.

1.3.3 Théorie linéaire

La théorie linéaire est la première approche utilisée dans le but de modéliser l’atomisation. C’est la plus simple et elle permet déjà d’identifier deux phénomènes physiques principaux du processus d’atomisation: l’instabilité capillaire et l’action des forces aérodynamiques.

Tension de surface

L’action des forces de tension de surface a été mise en évidence en premier lieu par Plateau [7]. C’est l’action de cette force qui détermine le comportement du jet dans la première partie ascendante de la courbe de stabilité et influence fortement son comportement en association avec les forces aérodynamiques dans la deuxième partie de la courbe de stabilité. Pour comprendre ce mécanisme, il faut partir du problème de la stabilité d’un cylindre liquide de longueur infinie, immobile dans le vide. Quand le jet est parfaitement cylindrique, l’un de ses rayons de courbure est égal au rayon R_0 du cylindre (courbure transverse) et l’autre R_∞ est infini (courbure selon l’axe). Le jet étant en équilibre, le différentiel de pression entre l’intérieur du jet et le milieu ambiant est égal aux forces de tension de surfaces. D’après la loi de Laplace, cela s’écrit:

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_\infty} \right) = \frac{\sigma}{R_0} \quad (1.15)$$

où σ est la tension de surface liquide/gaz. Toute perturbation se développant à la surface du jet agit alors sur la valeur des rayons de courbure locaux. En se situant sur un ventre,

¹²Il s’agit, comme nous l’avons vu auparavant, d’une région où la rupture semble guidée par l’action des forces aérodynamiques.

le rayon de courbure transverse est augmenté et la surpression due à la tension de surface diminuée. Au contraire, en se situant à proximité d'un creux, le rayon de courbure transverse diminue, et la surpression est donc augmentée. Ainsi, le liquide a tendance à migrer longitudinalement des plus hautes pressions vers les plus basses, accentuant les différences de rayons de courbures entre ventres et creux. L'action d'une déformation sur les sections transverses met en évidence l'aspect déstabilisateur des forces de tension de surface. Dans le cas des rayons de courbure selon l'axe, toute déformation induit un rayon de courbure non-infini, et donc une tension de surface non-nulle. Selon le signe de ce rayon de courbure, la tension de surface augmente pour diminuer la taille des ventres ou diminue pour augmenter la taille des creux. La tension de surface agit alors comme une force de rappel pour ramener la surface à sa position initiale. Cet aspect de la tension de surface montre son action stabilisatrice.

Cependant, une analyse globale sur la variation de l'énergie de surface permet de montrer facilement qu'en adoptant une forme axisymétrique perturbée sinusoidalement (fig. 1.8), le cylindre liquide peut diminuer sa surface libre, et donc abaisser son énergie de surface. Ainsi, pour certaines longueurs d'onde, cette déformation permet au système d'être plus stable. L'action de la tension de surface est, dans ce cas, déstabilisante. La rupture en gouttes par un mécanisme d'instabilité capillaire de type Rayleigh aboutit à une diminution de la surface de 20% environ. Cette diminution de l'énergie de surface se traduit par une augmentation simultanée de pression à l'intérieur du jet et des gouttes.

Forces aérodynamiques

Ces forces proviennent du déplacement du gaz ambiant par rapport à la surface déformée du jet. Les ventres rapprochent les lignes de courant dans le gaz, créant ainsi une dépression. À l'opposé, les creux induisent des surpressions. Ainsi, les perturbations de l'interface s'amplifient sous l'action de ces échanges entre énergie cinétique et énergie de pression (effet Venturi). Les forces aérodynamiques ont donc une action strictement déstabilisatrice.

Dans le cas d'un jet cylindrique, la théorie linéaire a évolué depuis sa première apparition en 1878 due à Rayleigh [6]. En effet, Weber [37] ajoute aux effets de tension de surface, l'action des forces aérodynamiques dues au différentiel de vitesse entre le liquide et le gaz ambiant, et l'influence de la viscosité du liquide. Ensuite, des modifications de la théorie de Weber sont apparues dans le but d'accorder les prédictions théoriques avec certains résultats expérimentaux.

C'est pourquoi, nous verrons d'abord l'approche de Rayleigh, puis son extension dans le cadre de la théorie de Weber. Ensuite, nous verrons quelques modifications apportées à cette théorie pour améliorer sa prédictibilité.

Théorie de Rayleigh - Théorie de Weber

Dans ce modèle, Rayleigh a étudié l'instabilité d'un écoulement uniforme, incompressible, et non visqueux d'un cylindre liquide de rayon R , dans le vide (ou dans un gaz au repos dans le référentiel associé à l'écoulement du liquide, en dehors du champ de pesanteur). Le comportement de la surface libre de ce liquide est déterminé par la tension de surface σ .

Dans le référentiel associé au fluide en écoulement, l'état du système liquide est donné par

$$\vec{U} = \vec{0}, \quad P = p_\infty + \frac{\sigma}{R} \quad (0 \leq r \leq R), \quad (1.16)$$

où p_∞ est la pression à l'extérieur du jet, et P , la pression sous la surface du jet.

L'équation fondamentale de la dynamique pour un fluide parfait s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p \quad (1.17)$$

et l'équation de continuité avec la condition d'incompressibilité donne

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.18)$$

Nous avons déjà vu que la relation de Laplace décrit le saut de pression $\sigma(R_1^{-1} + R_2^{-1})$ au passage d'une interface. Comme résultat de la géométrie différentielle sur la somme des rayons de courbures principaux d'une surface en un point donné, nous pouvons écrire que $R_1^{-1} + R_2^{-1} = \vec{\nabla} \cdot \vec{n}$, où \vec{n} est la normale au point considéré, orientée vers l'extérieur du volume liquide. Alors, la pression à l'intérieur du liquide juste sous la surface du jet est donnée par

$$P = p_\infty + \sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \quad \text{en tout point de la surface du jet.} \quad (1.19)$$

Si la surface du jet est légèrement perturbée, de telle manière que son équation $r = \zeta(z, \theta, t)$ soit donnée par la fonction ζ en coordonnées polaires (z, r, θ) , alors la normale \vec{n} s'écrit

$$\vec{n} = \sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial \zeta}{r \partial \theta}\right)^2} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ 1 \\ -\frac{\partial \zeta}{r \partial \theta} \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Les conditions cinématiques rencontrées par chaque particule fluide à la surface du jet sont traduites par

$$u_r = \frac{D\zeta}{Dt} \quad (\text{pour } r = \zeta), \quad (1.21)$$

où D/Dt représente la dérivée hydrodynamique.

En tenant compte des conditions aux limites, la linéarisation des équations précédentes permet d'écrire les équations du mouvement d'une particule fluide sous la forme (en prenant $\vec{u}' = \vec{u}$, $p' = p - P$, $\zeta' = \zeta - R$):

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} p', \quad (1.22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0, \quad (1.23)$$

$$p' = -\sigma \left(\frac{\zeta'}{R^2} + \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta'}{R^2 \partial \theta^2} \right) \quad (\text{en } r = R), \quad (1.24)$$

$$u'_r = \frac{\partial \zeta'}{\partial t} \quad (\text{pour } r = R) . \quad (1.25)$$

Nous allons chercher des solutions ayant la forme

$$(\vec{u}', p', \zeta') = \left(\vec{u}(r), \hat{p}(r), \hat{\zeta} \right) e^{st+i(kz+n\theta)} , \quad (1.26)$$

où s est le taux de croissance de l'onde, k le nombre d'onde réel associé, et n un entier. Le rotationnel des équations (1.22) et (1.23) donne

$$\Delta p' = -\rho \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}')}{\partial t} = 0 , \quad (1.27)$$

où le Laplacien est donné par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

On en déduit une équation sur $\hat{p}(r)$,

$$\frac{d^2 \hat{p}}{dr^2} + \frac{d\hat{p}}{r dr} - \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \hat{p} = 0 , \quad (1.28)$$

qui est l'équation de Bessel modifiée d'ordre n dont les solutions sont les fonctions $I_n(kr)$ et $K_n(kr)$. Cette équation est symétrique en $\pm n$, de sorte que nous pouvons nous restreindre au cas où $n \geq 0$. De plus, $I_n \sim (\frac{1}{2}kr)^n/n!$ et $K_n(kr)$ diverge quand $r \rightarrow 0$. Donc, comme la pression au centre du jet a une valeur finie, les solutions de (1.28) se réduisent à

$$\hat{p} = A I_n(kr) , \quad (1.29)$$

où A est une constante. Et l'équation (1.22) donne

$$\vec{u} = -\frac{A}{\rho s} \begin{pmatrix} ik I_n(kr) \\ k I'_n(kr) \\ \frac{in}{r} I_n(kr) \end{pmatrix} , \quad (1.30)$$

où I'_n est la dérivée de I_n par rapport à r .

Finalement, la forme des solutions données par (1.26) permet de récrire les conditions aux limites (1.24) et (1.25) sous la forme

$$A I_n(\bar{k}) = -\sigma(1 - \bar{k}^2 - n^2) \frac{\hat{\zeta}}{R^2} \quad (\text{avec } \bar{k} = kR) \quad (1.31)$$

et

$$-\frac{A}{R \rho s} \bar{k} I'_n(\bar{k}) = s \hat{\zeta} , \quad (1.32)$$

respectivement. Le rapport de ces deux équations homogènes en A et $\hat{\zeta}$, $\frac{(1.32)}{(1.31)}$, donne la relation de dispersion

$$s^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\bar{k} I_n'(\bar{k})}{I_n(\bar{k})} (1 - \bar{k}^2 - n^2). \quad (1.33)$$

Cette relation donne le taux de croissance de la perturbation ¹³ en fonction du nombre d'onde adimensionnel \bar{k} (nombre d'onde k multiplié par le rayon du cylindre non perturbé R). L'analyse de la stabilité de la colonne d'eau revient à résoudre cette équation. Les perturbations dont le taux de croissance est positif ($s > 0$) seront amplifiées et donc déstabilisantes. En fait, le rapport $\frac{\bar{k} I_n'(\bar{k})}{I_n(\bar{k})}$ est positif pour toutes les valeurs non-nulles de \bar{k} . De plus, pour tout \bar{k} et $n \neq 0$, nous avons $s^2 < 0$, donc la forme de l'équation de dispersion impose que s est un imaginaire pur; et, pour $-1 \leq \bar{k} \leq 1$, avec $n = 0$, $s^2 > 0$ (s réel). Enfin, si $n = 0$, $s^2 \leq 0$ pour $\bar{k} \leq -1$ ou $\bar{k} \geq 1$. Par conséquent, le jet est stable pour toute perturbation non-axisymétrique (modes $n \neq 0$), mais il est instable pour les perturbations axisymétriques dont la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ est supérieure à la circonférence $2\pi R$ du jet.

La figure 1.10 présente l'allure du diagramme de dispersion. Nous constatons que cette courbe admet un taux de croissance adimensionnel maximum. Pour un jet évoluant en régime de Rayleigh, ce taux de croissance est égal à: $\sqrt{R^3 \rho / \sigma} s = 0.3433$ en $\bar{k} = 0.6970$. La longueur d'onde du mode le plus instable est donc égale à $\lambda = 9.016R$. Si les amplitudes initiales de chacun des modes de perturbation sont comparables, alors on peut considérer que la perturbation dont la croissance est la plus rapide devient celle qui domine le processus de rupture.

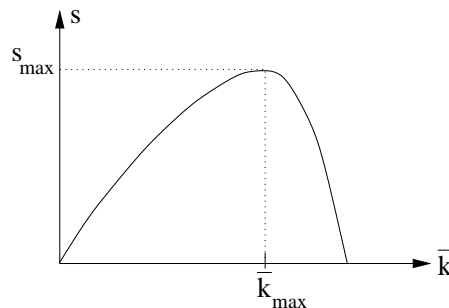


Figure 1.10: *Allure typique du diagramme de dispersion déduit de la relation de dispersion (1.33) donnée par la théorie linéaire.*

La longueur de rupture peut être exprimée en utilisant à nouveau l'hypothèse sur la forme des perturbations solutions, proposée dans l'équation (1.26). Pour cela, nous devons convenir d'un schéma de rupture considérant, par exemple, que le jet se rompt en goutte à

¹³Il s'agit ici de la perturbation, au sens large, de l'état du jet depuis son état initial cylindrique. La perturbation s'exprime donc par l'intermédiaire de l'équation (1.26). La linéarisation des équations du mouvement des particules fluides et des conditions aux limites (éqs (1.22), (1.23), (1.24) et (1.25)) impose une limite de validité de la présente théorie aux petites perturbations (de vitesses, de pressions et de la forme de la surface).

partir du moment où l'amplitude de la perturbation dominante atteint la valeur du rayon du cylindre liquide initial. C'est-à-dire lorsque

$$R = \eta_0 e^{s_{max} t_{BU}} , \quad (1.34)$$

où la perturbation dominante a une amplitude initiale égale à η_0 , un taux de croissance s_{max} et t_{BU} est le temps de rupture. Sachant que le jet, dans le référentiel d'observation, a une vitesse $\vec{V} \neq \vec{0}$, l'équation (1.34) permet de déduire la longueur de rupture du jet:

$$L_{BU} = V t_{BU} = \frac{V}{s_{max}} \ln \left(\frac{R}{\eta_0} \right) . \quad (1.35)$$

Sterling et Sleicher [38] proposent une relation de dispersion (équation (1.36)) plus complète tenant compte de la viscosité de la phase liquide et de l'influence du gaz ambiant sur le système liquide par l'action des forces aérodynamiques. Ils se limitent toutefois à la recherche de solutions axisymétriques, dont nous savons maintenant que ce sont les seules à déstabiliser le jet dans le régime d'atomisation décrit par la théorie de Rayleigh:

$$s^2 + \frac{3\mu\bar{k}^2}{\rho R^2} s = \frac{\sigma}{2\rho R^3} (1 - \bar{k}^2) \bar{k}^2 + \frac{U^2 \rho_G \bar{k}^3 K_0(\bar{k})}{2R^2 \rho K_1(\bar{k})} . \quad (1.36)$$

où μ est la viscosité du liquide, ρ_G la densité du gaz, et U est la valeur de la vitesse de déplacement du gaz par rapport au jet liquide le long de l'axe Oz (axe du jet).

Cette relation de dispersion peut se ramener au résultat précédent (jet de Rayleigh) lorsque l'on pose que la viscosité, le différentiel de vitesse liquide/gaz, et la densité du gaz sont nuls. Cette relation de dispersion permet aussi de retrouver le résultat donné par Weber [37], en négligeant un terme de leur relation de dispersion (fluide parfait).

Le terme négligé dans la relation de dispersion établie par Sterling et Sleicher pour retrouver celle de Weber ne modifie ni l'allure de la courbe de dispersion, ni la valeur du nombre d'onde correspondant au taux de croissance maximal (onde dominante), ni la valeur du taux de croissance maximal. Par contre, il permet de rendre compte de l'éventuelle propagation des ondes capillaires à la surface du jet par l'intervention d'une partie imaginaire dans l'expression du taux de croissance.

Par comparaison à la relation (1.33), nous voyons apparaître dans cette relation de dispersion un terme de viscosité et un terme dépendant du différentiel des vitesses entre le liquide et le gaz. Le résultat important amené par cette théorie est la prédiction d'un point critique dans le diagramme de stabilité du jet:

- si la vitesse du jet est suffisamment faible (par rapport au gaz), le terme dépendant de U , $\left(\frac{U \rho_G \bar{k}^3 K_0(\bar{k})}{2R^2 \rho K_1(\bar{k})} \right)$, devient négligeable. La relation de dispersion est alors indépendante de la vitesse, et l'onde dominante est caractérisée par un nombre d'onde maximal lui aussi indépendant de la vitesse. Par conséquent la longueur de rupture (voir l'équation (1.35)) croît linéairement avec la vitesse. Ce comportement correspond à la première partie ascendante de la courbe de stabilité. Notons que dans le cas où la viscosité est négligée, la relation de dispersion redevient celle proposée par

Rayleigh. C'est pourquoi la première partie ascendante de la courbe de stabilité est associée à la description de la rupture en gouttes présentée par Rayleigh.

- si la vitesse augmente au delà d'une valeur critique U_c , le dernier terme de l'équation (1.36), dépendant de U , n'est plus négligeable et impose une augmentation du taux de croissance de l'onde dominante quand la vitesse augmente. Qui plus est, le rapport U/s_{max} décroît. De telle sorte que si nous supposons que la valeur de $\ln(R/\eta_0)$ est une constante indépendante de la vitesse, alors au delà de cette vitesse critique U_c la longueur de rupture diminue quand la vitesse augmente. Nous assistons donc à un changement de signe de la pente de la longueur de rupture en fonction de la vitesse du jet. Ceci implique l'apparition d'une vitesse critique U_c pour laquelle la longueur de rupture est maximum.

C'est pourquoi on considère que la décroissance de la courbe de stabilité au delà d'une vitesse critique U_c est due à l'action des forces aérodynamiques imposées par le différentiel de vitesse U .

Enfin, nous pouvons noter qu'une augmentation de la viscosité modifie l'allure du diagramme de dispersion. Comme on peut s'y attendre (du fait de l'action dissipative de la viscosité), quel que soit le nombre d'onde considéré, le taux de croissance diminue sous l'effet de cette augmentation. Enfin, l'onde dominante est caractérisée par un nombre d'onde plus faible.

Toujours d'après la théorie de Weber, le nombre de Weber critique We_{Gc} déduit de la vitesse critique U_c est fonction du nombre de Ohnesorge Z du jet:

$$We_{Gc} = \frac{\rho_G U^2 d}{\sigma} \quad (1.37)$$

$$Z = \frac{\mu}{\sqrt{\rho \sigma d}} \quad (1.38)$$

où d est le diamètre du jet. Cette fonction est tracée figure 1.11.

1.3.4 Prédiction de la position de la vitesse critique

Nous avons vu que la théorie de Weber est la première théorie à rendre compte de la présence du point de vitesse critique sur la courbe de stabilité grâce à l'intervention des forces aérodynamiques. Cependant, une série d'expériences montre que la position de cette vitesse critique est mal prédite par la théorie. Notamment Grant et Middleman [39], Fenn et Middleman [40], et Sterling et Sleicher [38] ont trouvé expérimentalement des vitesses critiques sous ou sur-évaluées par la théorie de Weber suivant les conditions expérimentales.

Grant et Middleman ont proposé une modification de la relation de dispersion due à Weber en remplaçant le dernier terme de l'équation (1.36), traduisant l'action des forces aérodynamiques, par un terme de même nature. Ce terme est bâti sur une corrélation calculée à partir de leurs résultats expérimentaux entre le nombre de Reynolds critique et le nombre de Ohnesorge, et est, en fait, adapté à leurs résultats expérimentaux.

Fenn et Middleman montrent expérimentalement la diminution du nombre de Weber critique en fonction du nombre de Ohnesorge par opposition au résultat déduit à partir de la théorie de Weber. En fait, ils affirment surtout que la présence du maximum de la

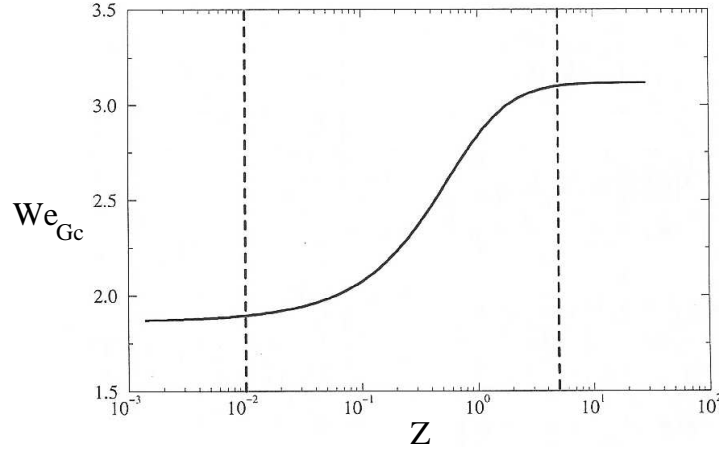


Figure 1.11: *Nombre de Weber critique en fonction du nombre de Ohnesorge déduit de la théorie de Weber (d'après S. Leroux [16]).*

courbe de stabilité ne peut plus dépendre de l'action des forces aérodynamiques pour de faibles nombres de Ohnesorge. Ils ont aussi défini un nombre de Weber caractéristique délimitant le passage de vitesses où le jet est influencé par les forces aérodynamiques à celles où le jet ne l'est pas, indépendamment de la position du point de vitesse critique.

Théorie de Weber modifiée

Sterling et Sleicher émettent l'hypothèse de l'influence de la relaxation du profil de vitesses, profil qui est établi lors du passage du liquide dans le tube d'injection. En l'absence de cet effet (tube de faible longueur, par exemple), la théorie de Weber surestime les effets aérodynamiques en ne prenant pas en compte l'effet de viscosité du gaz. Cette action étant de faire chuter la valeur du terme dépendant du différentiel de vitesses entre les deux phases, les auteurs modifient leur équation de dispersion en introduisant un coefficient correcteur devant le terme en U . En reprenant simplement l'équation de Weber (éq. 1.36), cela revient à écrire ¹⁴:

$$s^2 + \frac{3\mu\bar{k}^2}{\rho R^2} s = \frac{\sigma}{2\rho R^3} (1 - \bar{k}^2) \bar{k}^2 + C \frac{U\rho_G \bar{k}^3 K_0(\bar{k})}{2R^2 \rho K_1(\bar{k})}. \quad (1.39)$$

Distinction des trois zones

La théorie de Weber montre que l'augmentation de la pression ambiante, c'est-à-dire de la densité du gaz environnant, déplace le point de vitesse critique vers de plus faibles vitesses. Le taux de croissance maximal restant identique, la longueur de rupture au point de vitesse critique est donc plus petite à mesure que cette vitesse diminue. Ces deux résultats s'accordent bien avec le rôle déstabilisateur attribué aux forces aérodynamiques.

¹⁴Pour leur étude, les auteurs proposent une valeur de 0.175 pour C .

En effet, l'augmentation de ρ_G permet aux forces aérodynamiques d'être aussi efficaces à des vitesses moins importantes.

Les résultats de Leroux *et al* [41] mettent clairement en évidence ce comportement. Cependant, une certaine classe de jets ne présente pas de changement de position du point de vitesse critique sous variation de la pression ambiante de 1 à 80 *bars*. Pour ces jets, les forces aérodynamiques ne semblent être en rien responsables de l'apparition du point critique. En fait, les auteurs définissent trois régimes de fonctionnement des jets liquides cylindriques selon la manière dont la position de la vitesse critique dépend de la pression ambiante [41]. Le choix correct de la valeur d'une masse volumique "critique", notée ρ_G^* , permet de définir les limites de chaque zone.

- Zone 1 ($\rho_G \ll \rho_G^*$): La vitesse critique est inférieure à la valeur prédite par la théorie de Weber. En outre, cette vitesse critique ne varie pas en fonction de la valeur de la pression ambiante, c'est-à-dire de l'intensité des forces aérodynamiques. L'apparition de la vitesse critique semble donc être pilotée par une caractéristique interne à l'écoulement. La position de cette vitesse critique apparaît pour un nombre de Reynolds constant Re_c .
- Zone 2 ($\rho_G \simeq \rho_G^*$): La théorie de Weber, ou mieux encore celle de Sterling et Sleicher, donne un bon ordre de grandeur de la position de la vitesse critique [16]. Expérimentalement, cette position commence à dépendre légèrement de la pression ambiante dénotant une légère influence des forces aérodynamiques sur la position du point critique du diagramme de stabilité.
- Zone 3 ($\rho_G \gg \rho_G^*$): De la même manière que les théories le prédisent, la position de la vitesse critique est très sensible expérimentalement à la valeur de la pression ambiante. Les vitesses critiques sont associées à un nombre de Weber constant.

L'appartenance d'un jet à une des zones dépend de deux grandeurs: le nombre de Ohnesorge et le rapport L_{inj}/d ; ce qui peut se ramener à une dépendance du paramètre ρ_G^* qui est fonction de ces deux grandeurs. En zone 3, soit le nombre de Ohnesorge est grand, soit le rapport L_{inj}/d est nul. Dans un cas comme dans l'autre, cela revient à considérer un jet dont le profil de vitesses en sortie de buse ne générera pas d'instabilités (profil plat, ou relaxation rapide du profil établi sous l'effet d'une forte dissipation visqueuse). En zone 1, la viscosité (le nombre de Ohnesorge) est faible, et L_{inj}/d est suffisant pour imposer au jet un profil de vitesse non plat en sortie de buse. La relaxation du profil de vitesses est lente par comparaison au temps de rupture en gouttes car la viscosité est suffisamment faible. La relaxation des gradients de vitesse créent des points d'inflexion sur le profil de vitesse. Ces points d'inflexion, connus pour être générateurs d'instabilités, sont suspectés être la source des perturbations initiant plus rapidement les instabilités et raccourcissant d'autant le temps et la longueur de rupture. La zone 2 est une zone de transition où l'écoulement adopte un comportement intermédiaire entre les zones 1 et 3.

Ces résultats sont à l'origine d'une modification de l'équation de dispersion de même nature que celle de Sterling et Sleicher.

Modification de la théorie de Weber modifiée: paramètre ρ_G^*

Sur la base du paramètre ρ_G^* , Leroux *et al.* proposent d'introduire un coefficient correcteur dans l'équation de dispersion, de manière à approcher de la meilleure façon possible l'ensemble des résultats expérimentaux. Comme l'influence des forces aérodynamiques est à l'origine de la distinction entre les trois zones, ce facteur correctif porte à nouveau sur le terme contenant la différence de vitesse liquide/gaz, U , qui s'écrit alors:

$$\left(K \frac{\rho_G^*}{\rho_G} + 1\right) C \left(\frac{U \rho_G \bar{k}^3 K_0(\bar{k})}{2R^2 \rho K_1(\bar{k})}\right) \quad (1.40)$$

où C est le facteur correctif équivalent à celui introduit par Sterling et Sleicher. Le terme $\left(K \frac{\rho_G^*}{\rho_G} + 1\right)$ permet de passer d'une zone à l'autre selon la valeur de ρ_G par rapport au paramètre ρ_G^* dépendant de l'injecteur (essentiellement L_{inj}/d) et du liquide injecté (nombre de Ohnesorge). En outre, de manière à retrouver la position de la vitesse critique prédite par la théorie de Weber en zone 2, lorsque $\rho_G = \rho_G^*$, les paramètres K et C doivent satisfaire la relation suivante: $(K + 1)C = 1$. Ce qui permet de se contenter de la détermination de deux paramètres, ρ_G^* et C , pour que le modèle modifié puisse avoir un caractère prédictif.

Cette dernière modification de l'équation de dispersion permet donc de retrouver les positions de la vitesse critique obtenues expérimentalement, indépendamment du régime de fonctionnement du jet (zones 1, 2, ou 3). En fait, la modification porte sur l'équation de dispersion et associe donc l'apparition du point critique à l'augmentation soudaine du taux de croissance de la perturbation dominante lorsque la vitesse du jet croît. Cependant, cette augmentation du taux de croissance est attribuée à l'action des forces aérodynamiques même lorsque la position du point critique ne dépend pas de ces forces (en zone 1). Dans ce cas, le jet étant insensible à l'action des forces aérodynamiques, le taux de croissance de la perturbation dominante devrait être constant. L'apparition du point critique doit alors être reliée à une augmentation de l'amplitude des perturbations initiales [42], c'est-à-dire à une diminution du terme $\ln(R/\eta_0)$ dans l'équation (1.35).

La dernière modification de la théorie de Weber suggère donc que le profil de vitesses en sortie de buse peut influencer l'initiation des perturbations principales déstabilisant le jet, tandis que les forces aérodynamiques peuvent agir sur leur taux de croissance.

1.4 Les apports de la théorie des systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires a pour origine l'étude du problème des trois corps en mécanique céleste [43]. Cependant, les concepts introduits par Poincaré n'ont été utilisés que très progressivement et principalement à partir des années 70 avec l'étude de systèmes hydrodynamiques dans leur transition vers la turbulence. Les problèmes théoriques fondamentaux que cette approche soulève l'ont fait également se diriger vers l'étude de modèles tels que certains systèmes numériques. Cependant, nous pouvons dire que ce domaine de recherche se développe autour de travaux théoriques et de l'application des concepts introduits à des comportements expérimentaux. Nous pouvons en relever de nombreux exemples dans la littérature allant de la cinétique chimique (Belousov-Zhabotinski

[44, 45], combustion et réduction de schéma de cinétique chimique [46], électrolyse du cuivre [47, 48], etc...) à l'astrophysique [49], en passant par l'étude de la dispersion cyclique dans les moteurs [50].

Il est notamment possible de trouver quelques publications concernant la dynamique des écoulements en sortie de tuyau, mais limitées à quelques cas bien particuliers. Ainsi, après avoir fait une petite introduction concernant les comportements chaotiques (§1.4.1), nous nous intéresserons aux routes vers le chaos dans deux systèmes expérimentaux bien particuliers (§1.4.2). Nous verrons le cas assez célèbre du goutte-à-goutte d'un robinet, dont les études récentes montrent deux comportements différents sous augmentation du débit. Nous parlerons aussi de l'étude plus complète d'un jet d'air cylindrique sous deux aspects: un point de vue expérimental (jet forcé), et un autre, numérique (jet libre).¹⁵ C'est l'étude expérimentale du jet d'air qui nous sera la plus utile, car elle anticipe déjà dans son approche certains résultats que nous présenterons dans le cas des jets liquides.

1.4.1 Introduction à la dynamique des systèmes

Cette introduction doit permettre de comprendre les notions de base de cette théorie. Plus tard, dans les chapitres suivants, la définition des concepts plus spécifiquement utilisés sera précisée selon les besoins. Tout ce qui suit est abondamment détaillé dans la série de références: [52, 53, 54, 55].

Prenons un système déterministe, c'est-à-dire régi par un ensemble de lois déterminant complètement son comportement: un système d'équations différentielles ordinaires, aux dérivées partielles, des équations horaires, ..., tout ce qui peut permettre de déterminer, au moins à court terme, le mouvement du système dans l'espace des phases (espace dont les coordonnées sont données par les degrés de liberté du système considéré). Dans cette introduction, nous allons nous intéresser uniquement aux *systèmes dissipatifs* et à leur transition vers un comportement chaotique. Si nous voulons caractériser l'évolution de l'état d'un tel système, nous devons suivre l'évolution du système représentée par une trajectoire dans l'espace des phases.

La première notion est celle d'*attracteur*. Les trajectoires émanant de conditions initiales choisies au sein d'un *bassin d'attraction* ont la propriété de converger asymptotiquement vers un attracteur qui est inscrit sur une variété de l'espace des phases. Cet attracteur (il peut y en avoir plusieurs dans l'espace des phases), a une dimension d nécessairement inférieure à la dimension m de l'espace des phases (cas dissipatif). Dans un espace des phases de dimension 2, deux attracteurs sont possibles: le *point fixe* ($d = 0$), au niveau duquel l'état du système ne change pas au cours du temps, et le *cycle limite* ($d = 1$), traduisant une évolution périodique (cyclique) de l'état du système. Pour un espace des phases de dimension 3, nous distinguons:

- 1- les attracteurs inscrits sur une surface topologiquement équivalente à un tore ($d = 2$)¹⁶. Deux pulsations sont alors caractéristiques du comportement dynamique du système. L'une est associée à la révolution selon l'axe du tore, et l'autre à la révolution

¹⁵Nous pouvons noter aussi qu'un comportement chaotique aurait été observé sur des oscillations de gouttes mises en lévitation acoustique [51].

¹⁶Un tore est une surface dont la géométrie ressemble à celle d'une chambre à air, ou d'un anneau.

dans la direction transverse au tore (fig. 1.12). Si les deux pulsations sont dans un rapport irrationnel, le tore est couvert d'une manière dense: aucune trajectoire ne repasse exactement au même endroit d'une révolution aux suivantes. Il s'agit du régime *quasi-périodique*. Si le rapport entre les deux pulsations est rationnel, la trajectoire repasse périodiquement au même endroit montrant un phénomène de battement. C'est le régime bi-périodique.

- 2- les attracteurs apériodiques ou *chaotiques* ($d > 2$), pour lesquels deux trajectoires initialement voisines se séparent l'une de l'autre exponentiellement selon une (ou plusieurs) direction(s) d'étirement, mais restent confinées dans le domaine borné de l'attracteur en raison des propriétés de récurrence (fig. 3.25, chap. III). L'étirement se traduit par une *sensibilité aux conditions initiales* impliquant une imprédictibilité à long terme de l'évolution du système. Un système d'équations différentielles générant un comportement chaotique est génériquement non linéaire et non intégrable analytiquement.

Nous ne parlerons pas pour l'instant du cas beaucoup plus compliqué d'un espace des phases de dimension supérieure à trois pour lequel certains outils, tels ceux provenant de l'analyse topologique (analyse typiquement réalisée dans un espace de dimension 3), ne sont plus valides.

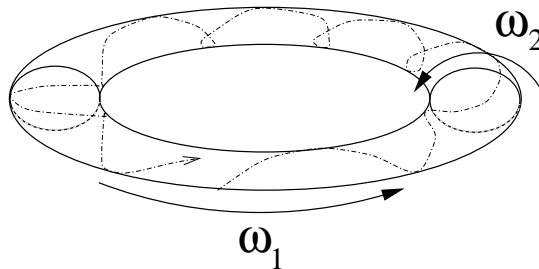


Figure 1.12: *Tore de dimension 2 représenté dans un espace de dimension 3. Un exemple de trajectoire sur un tore est tracé en pointillés.*

Bifurcations

La théorie des *bifurcations* permet de déterminer les différentes routes menant un système à un comportement chaotique. Tout commence par l'analyse de la *stabilité* des solutions triviales des équations d'évolution du système. Ces solutions triviales peuvent être des points fixes ou des cycles limites. Soit un système dynamique

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{x}) \quad (1.41)$$

où μ est le paramètre de contrôle du système. Un point fixe de ce système est défini par $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Un point fixe \mathbf{x}_F est donc solution de l'équation $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. La stabilité d'un point fixe

est déterminée par les valeurs propres du jacobien du système dynamique \mathbf{f} . La matrice jacobienne d'un système dynamique \mathbf{f} est définie par:

$$\mathcal{J} = \mathcal{D}f_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

Déterminer le type des points fixes permet d'avoir une première information sur la structure des trajectoires représentatives de l'évolution du système dans l'espace des phases par linéarisation des équations d'évolution au voisinage des points fixes. Cela revient à diagonaliser la matrice jacobienne \mathcal{J} [55]. Ainsi, la connaissance des directions propres associées aux valeurs propres en un point fixe donné permettent de préciser par quelles variétés ((hyper-)plan, (hyper-)ligne) les mécanismes de réinjection et d'échappement ont lieu au voisinage du point fixe considéré. Les cycles limites sont des solutions périodiques stables des équations d'évolution du système. Il existe aussi des solutions périodiques instables. Henri Poincaré a montré que ces solutions périodiques étaient précieuses car elles structurent les trajectoires dans l'espace des phases [43]: on dit maintenant que l'ensemble des orbites périodiques instables constitue le squelette des attracteurs chaotiques.

En fait, une classification des scénarii de transition au chaos peut être donnée en étudiant la déstabilisation d'un cycle limite. Une orbite périodique est définie par

$$\mathbf{x}_{cl}(t) = \mathbf{x}_{cl}(t + T)$$

où T représente la période de l'orbite. Nous lui appliquons une petite perturbation $\boldsymbol{\eta}$ de telle sorte que la trajectoire suivie ait pour équation

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{cl}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$$

On peut alors montrer que l'analyse de stabilité de l'orbite périodique considérée revient à procéder à une analyse linéaire de stabilité du point fixe donné par l'intersection entre l'orbite périodique et un plan fixe qui lui est transverse appelé *plan de Poincaré* (fig. 1.13). Pour une trajectoire partant du voisinage de l'orbite périodique, le vecteur position \mathbf{x}_{n+1} du point de la $n + 1^{\text{ème}}$ intersection avec le plan de Poincaré sera fonction du vecteur position \mathbf{x}_n du point à la $n^{\text{ème}}$ intersection selon une équation aux variations de la forme

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_n$$

où \mathbf{M} est une matrice $m \times m$ dite de Floquet ¹⁷.

Nous remarquons tout d'abord que si la perturbation $\boldsymbol{\eta}$ est effectuée le long de la trajectoire, cette dernière reste sur la solution périodique \mathbf{x}_{cl} et se retrouve inchangée au bout d'une période T . En terme d'analyse de stabilité dans le plan de Poincaré, il est possible de montrer que la matrice de Floquet possède alors une valeur propre λ égale à 1. Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ définit le vecteur tangent à la trajectoire au point $\mathbf{x}_{cl}(0)$ (égal à \vec{X}_0 sur la figure 1.13). En fait, ce sont des perturbations dans des directions perpendiculaires à la solution périodique qui renseigneront sur la stabilité de celle-ci. La condition de stabilité linéaire impose alors que les modules des valeurs propres

¹⁷Cette relation entre les positions successives du point d'intersection avec la section de Poincaré s'appelle une *application de premier retour*.

λ_i de la matrice de Floquet (exceptée la solution triviale précédente donnant $\lambda = 1$), appelés *multiplicateurs de Floquet*, soient inférieurs à 1 et donc situés à l'intérieur du cercle unité du plan complexe. De ce point de vue, la déstabilisation d'un cycle limite sous l'évolution d'un paramètre de contrôle se réalise par l'intersection d'une valeur propre avec le cercle unité: la perturbation η alors associée à cette direction propre est ensuite amplifiée, écartant de plus en plus la trajectoire du cycle limite (fig. 1.14).

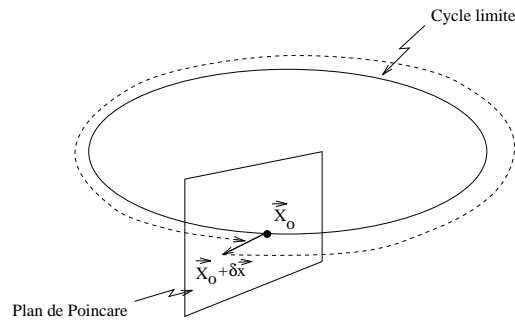


Figure 1.13: *Cycle limite et section de Poincaré définie comme étant transverse au cycle limite.*

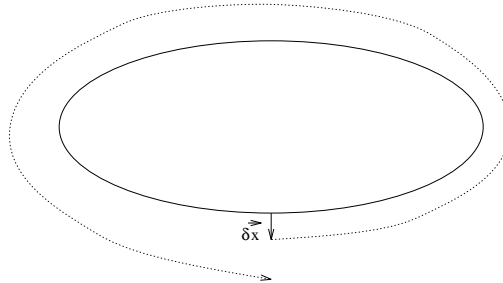


Figure 1.14: *Déstabilisation d'un cycle limite: le cycle limite est devenu une orbite périodique instable et toute trajectoire en son voisinage (sous l'effet d'une petite perturbation) évolue en s'en éloignant exponentiellement.*

Cette perte de stabilité de l'orbite périodique traduit un changement de comportement dynamique à une valeur critique du paramètre de contrôle: il y a bifurcation lorsque, à cette valeur critique, le module d'au moins une des valeurs propres λ_i est égal à 1. Trois cas peuvent tre envisagés:

- $\lambda_i = +1$, c'est une bifurcation *nœud-col*.
- $\lambda_i = -1$, c'est une bifurcation *sous-harmonique* ou encore appelée *doublément de période*.

- $\lambda_i^\pm = \rho \pm i\omega$, c'est une bifurcation de Hopf.

Les principales formes de déstabilisation du cycle limite sont résumées figure 1.15.

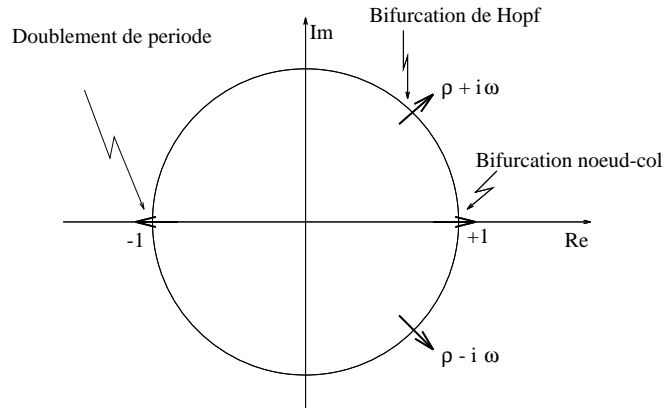


Figure 1.15: Valeurs propres associées aux principales bifurcations subies par un cycle limite.

Afin de mieux comprendre ce que signifie les bifurcations, il est utile de ramener leur étude à des systèmes dynamiques simples en utilisant la méthode des formes normales. Il s'agit d'étudier la déstabilisation d'un cycle limite à travers un système simple qui reproduit la déstabilisation du point fixe qui lui est associé (dans le plan de Poincaré). Grâce aux formes normales, la description des principales bifurcations peut toujours se ramener à l'étude d'un système dynamique suffisamment simple pour en réaliser une étude analytique.

En voici quelques exemples ¹⁸:

Bifurcation nœud-col La forme normale d'un système subissant une bifurcation nœud-col s'écrit:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (1.42)$$

où x est une grandeur scalaire. La forme normale (1.42) a pour points fixes les points solution de l'équation

$$0 = \mu - x^2 \quad (1.43)$$

Ils sont au nombre de deux et ont pour coordonnées

$$x_F = \pm\sqrt{\mu} \quad (1.44)$$

Étudions maintenant la stabilité de ces points fixes en leur appliquant une perturbation ϵ telle que $x_F \rightarrow x_F + \epsilon$. Le système (1.42) se réécrit alors sous la forme

$$\underbrace{\dot{x}_F}_{=0} + \dot{\epsilon} = \mu - (x_F + \epsilon)^2 \quad (1.45)$$

¹⁸Les bifurcations qui sont présentées dans la suite sont répertoriées dans l'ouvrage de Thompson et Stewart [56].

qui devient

$$\dot{\epsilon} = \underbrace{\mu - x_F^2}_{=0} - 2\epsilon x_F - \epsilon^2 \quad (1.46)$$

En limitant l'étude de la stabilité à l'ordre 1, nous obtenons l'équation d'évolution de la perturbation ϵ :

$$\dot{\epsilon} = -2\epsilon x_F + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.47)$$

Nous constatons alors que les points fixes vont être de stabilité différente. Ainsi, si $x_{F_+} = +\sqrt{\mu}$ et que la perturbation ϵ est positive, l'équation d'évolution des perturbations (1.47) donne $\dot{\epsilon} < 0$. La perturbation est amortie, le point fixe x_{F_+} est donc stable. Si maintenant nous considérons le point fixe $x_{F_-} = -\sqrt{\mu}$, la perturbation va croître ; le point fixe x_{F_-} est instable. Le diagramme de bifurcation, représentant la coordonnée des

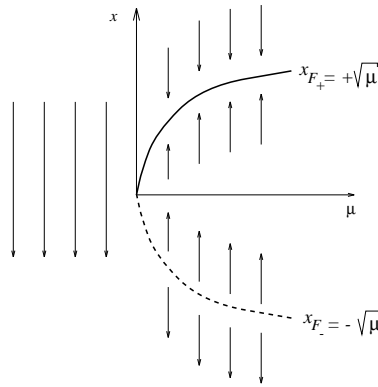


Figure 1.16: *Diagramme de la bifurcation nœud-col*

points fixes en fonction du paramètre de contrôle (fig. 1.16) présente donc une branche stable ($x_{F_+} = +\sqrt{\mu}$) et une branche instable ($x_{F_-} = -\sqrt{\mu}$). La branche instable sépare le bassin d'attraction de la branche stable du bassin d'attraction vers l'infini. Pour $\mu < 0$, il y a divergence quelle que soit la condition initiale choisie. Pour $\mu = 0$, valeur du paramètre de contrôle pour laquelle il y a bifurcation, les deux branches coalescent lorsque μ décroît ou naissent lorsque μ croît.

Bifurcation de Hopf Pour décrire la bifurcation de Hopf, Guckenheimer et Holmes considèrent une forme normale en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (1.48)$$

qui, en coordonnées cartésiennes, devient:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (1.49)$$

La forme polaire permet une compréhension rapide de la nature de la bifurcation. Les points fixes sont solution de l'équation

$$0 = r(\mu - r^2) \quad (1.50)$$

soit

$$\begin{cases} r_0 = 0 \\ r_c = \sqrt{\mu} \end{cases} \quad (1.51)$$

Ainsi, lorsque $\mu < 0$, seul le point fixe r_0 est réel. Etudions la stabilité des points fixes en introduisant une perturbation positive ϵ telle que $r_F \rightarrow r_F + \epsilon$. La première équation du système (1.48) devient alors:

$$\underbrace{\dot{r}_F}_{=0} + \dot{\epsilon} = (r_F + \epsilon) [\mu - (r_F + \epsilon)^2] \quad (1.52)$$

soit après développement à l'ordre 1

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \underbrace{r_F(\mu - r_F^2)}_{=0} + \epsilon(\mu - 3r_F^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \epsilon(\mu - 3r_F^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.53)$$

De ce fait, lorsque $\mu < 0$, seul le point fixe r_0 est réel (existe physiquement) et l'équation d'évolution de la perturbation devient

$$\dot{\epsilon} = \mu\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{puisque } r_F = r_0 = 0 \quad (1.54)$$

Ceci signifie que la perturbation décroît: le point fixe est stable. Les trajectoires s'enroulent donc autour de ce point fixe et y échouent asymptotiquement. Lorsque $\mu = 0$, la perturbation ϵ est constante puisque $\dot{\epsilon} = 0$: il y a bifurcation. Pour $\mu > 0$, le second point fixe apparaît et a pour coordonnée $r_F = r_c = \sqrt{\mu}$. L'équation d'évolution de la perturbation devient alors

$$\dot{\epsilon} = -2\mu\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.55)$$

ce qui implique qu'une perturbation ϵ au voisinage de r_F décroît alors que maintenant elle croît lorsqu'elle est appliquée au voisinage de r_0 . Puisque la description est en coordonnées polaires, le point fixe r_c se traduit en fait par une orbite périodique stable, soit un cycle limite de rayon $\sqrt{\mu}$. C'est une transition surcritique qui se traduit par la continuité entre le cycle limite et le point fixe à la bifurcation. Un diagramme de bifurcation peut être construit dans l'espace E tel que $E = \text{espace des phases } (x, y) \times \text{paramètre de contrôle } (\mu)$ (fig. 1.17) où \times désigne le produit topologique.

Il existe aussi une bifurcation de Hopf *sous-critique* (fig. 1.17.b) décrite par la forme normale suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x [\mu + (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y [\mu + (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (1.56)$$

Le domaine de stabilité du point fixe est alors limité par la coalescence entre une orbite périodique *instable* et le point fixe. Lorsqu'elle est sous-critique, la bifurcation de Hopf n'impose pas de continuité à la bifurcation; nous parlons alors de bifurcation *catastrophique*. Ces bifurcations ont été largement étudiées par René Thom dans le cadre de sa théorie des catastrophes [57].

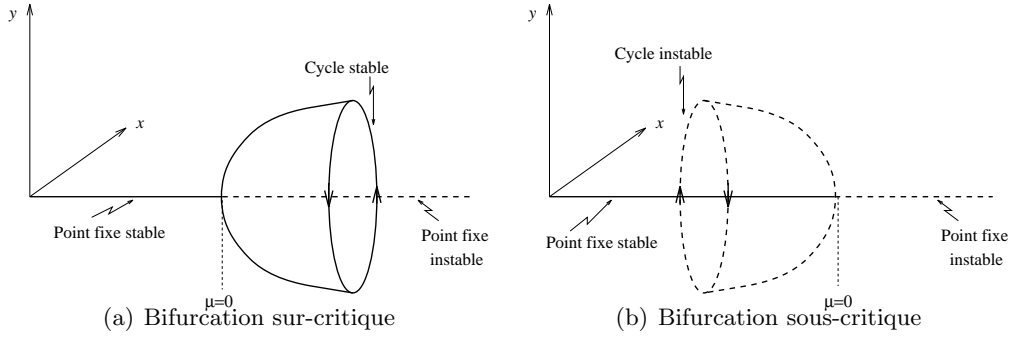


Figure 1.17: Les deux types de bifurcation de Hopf.

Bifurcation fourche Une forme normale pour la bifurcation fourche est donnée par:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (1.57)$$

dont les points fixes ont pour coordonnées:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{F_{\pm}} = \pm\sqrt{\mu} \end{cases} \quad (1.58)$$

Parmi ces trois points fixes, seul le point fixe origine est réel lorsque $\mu < 0$. L'étude de la stabilité est effectuée à l'aide d'une perturbation ϵ appliquée au voisinage des points fixes x_F (où $F = 0, F_+$ ou F_-). L'évolution de cette perturbation est donnée par l'équation suivante:

$$\dot{\epsilon} = (\mu - 3x_F^2)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.59)$$

Ainsi, le point fixe origine x_0 est stable pour $\mu < 0$. Lorsque μ devient positif, ce point fixe perd sa stabilité. Les deux autres points fixes $x_{F_{\pm}}$ deviennent réels à la bifurcation ($\mu = 0$). Ces deux points fixes sont alors stables puisque l'évolution de la perturbation est définie par la relation:

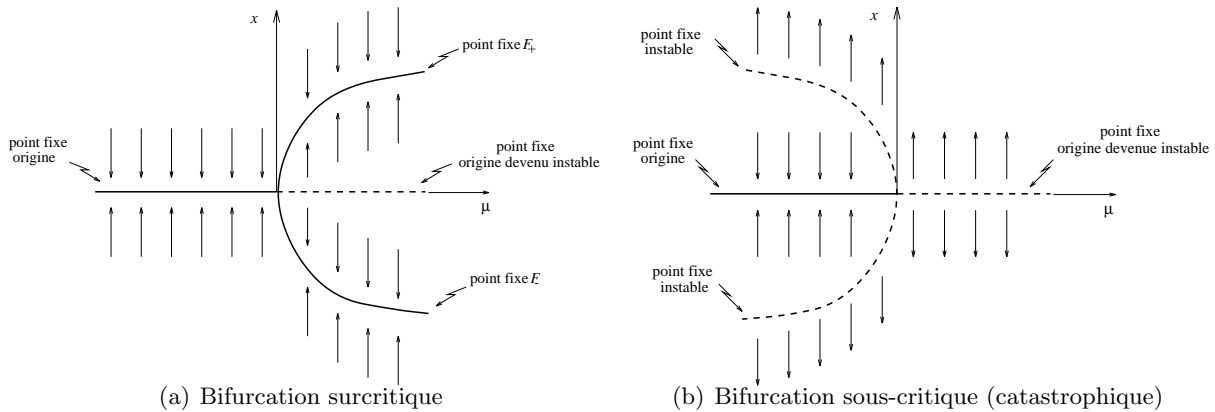
$$\dot{\epsilon} = -2\mu\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.60)$$

De ce fait, si nous considérons un cycle limite associé au point fixe x_0 , il se déstabilise à la bifurcation au profit de deux cycles limites de mme période associés aux points fixes $x_{F_{\pm}}$, leur bassin d'attraction étant délimité par l'orbite périodique associée à x_0 , devenue instable à la bifurcation (fig. 1.18.a).

Remarquons que la forme normale (1.57) possède une propriété de symétrie ; en effet, le champ de vecteurs \mathbf{f} défini par cette forme normale est invariant sous la transformation $x \xrightarrow{\gamma} -x$. En d'autres termes, le champ de vecteurs est *équivariant*, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation

$$\gamma \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(\gamma x) \quad (1.61)$$

De ce fait, la bifurcation fourche sur-critique se rencontre uniquement dans le cas des systèmes pourvus de propriétés de symétrie.

Figure 1.18: *Bifurcation fourche*

Il existe le pendant sous-critique de cette bifurcation. Elle a pour forme normale

$$\dot{x} = \mu x + x^3 \quad (1.62)$$

et le diagramme de bifurcation qui lui est associé est représenté fig. 1.18.b.

Comme nous l'avons vu, à chaque bifurcation associée à une forme normale et à la stabilité d'un point fixe correspond une bifurcation agissant sur la stabilité des cycles limites. Pour reprendre celles qui peuvent amener à des comportements chaotiques, regardons le fonctionnement de celles présentées sur la figure 1.15.

- La bifurcation de Hopf: quand elle est surcritique, les valeurs propres complexes conjuguées, en traversant simultanément le cercle unité, génèrent une rotation autour du cycle limite initial. Une deuxième fréquence caractéristique s'ajoute donc à celle qui est associée au cycle limite.
- La bifurcation nœud-col: une valeur propre, traversant le cercle unité par la valeur (+1), il y a création d'un cycle limite et d'une orbite périodique instable. Ils ont tous deux mme période.
- La bifurcation sous-harmonique: une valeur propre traverse le cercle unité par la valeur (-1). Deux schémas possibles peuvent décrire cette déstabilisation du cycle limite. Soit une nouvelle solution périodique stable de période deux fois plus longue se substitue au cycle limite devenu instable: c'est le cas lorsque la bifurcation est sur-critique. Soit deux orbites périodiques instables disparaissent au niveau du cycle limite, tuant sa stabilité: la bifurcation est alors sous-critique.

De la même manière que nous avons classé les bifurcations déstabilisant un cycle limite, nous pouvons faire la liste des différentes routes vers le chaos selon le mode de bifurcation opérant:

- Les bifurcations nœud-col sous-critiques sont associées au phénomène d'intermittence de type-I. Rappelons que la bifurcation résulte de la coalescence de deux cycles limites, l'un stable et l'autre non: ceci implique la disparition de ces deux solutions périodiques, stable ou instable après la bifurcation. Le comportement du système est caractérisé par l'alternance d'oscillations régulières, périodiques, correspondant à un *canal laminaire* au voisinage d'un cycle limite, avec des bouffées irrégulières, de type *turbulent*. La réinjection dans le canal laminaire est appelé *relaminarisation*. L'étude de la relaminarisation montre que la durée des phases laminaires est nécessairement finie (bornée) [54].
- Les bifurcations sous-harmoniques sont associées au cas de la cascade de doublements de période lorsqu'elles sont sur-critiques. Nous la décrivons en exemple ci-après.
- Lorsqu'elles sont sous-critiques, les bifurcations sous-harmoniques sont associées à une intermittence de type-III. L'évolution globale du système est similaire à celle décrite pour l'intermittence de type-I, sauf que le processus de relaminarisation rend probable l'arrivée de bouffées laminaires de durée infinie. Pratiquement, cela se traduit par une fonction de densité de probabilité sur la durée des phases laminaires non bornée.
- Une bifurcation de Hopf normale fait apparaître une nouvelle fréquence caractéristique dans le spectre de puissance. Si au moins trois bifurcations de Hopf se succèdent, de faibles perturbations du tore T^3 donnant l'évolution du système sous l'action des trois fréquences caractéristiques indépendantes, déstabilisent la trajectoire torique. L'attracteur stable (cycle limite ou tore T^2) devient alors génériquement un attracteur chaotique: il s'agit du scénario de Ruelle-Takens-Newhouse [53].
- Si la bifurcation de Hopf est inverse, c'est le mécanisme d'intermittence de type-II qui peut prendre place. La différenciation entre ce type d'intermittence et les deux autres se fait, lorsque l'on ne peut pas connaître le type de bifurcation qui l'a engendrée, en distinguant l'allure caractéristique des signaux et aussi en comparant la fonction densité de probabilité calculée sur la durée des phases laminaires avec celle donnée par la théorie [54].

Pour compliquer un peu cet état de la situation, il n'est pas rare de constater qu'une transition vers le chaos puisse être orchestrée par différents types de bifurcations.

Détaillons l'exemple de la cascade de doublements de période. L'augmentation d'un paramètre de contrôle permet de suivre cette route au cours de laquelle se succèdent des cycles limites se déstabilisant à chaque bifurcation sous-harmonique au profit d'un cycle limite de période double. Ce processus se répète de plus en plus rapidement à mesure que le paramètre de contrôle augmente (selon une loi d'échelle). Une telle cascade s'achève par un point d'accumulation où le cycle limite est de période infinie. Au delà de ce point, la trajectoire devient chaotique.

Une autre route vers le chaos va nous intéresser plus particulièrement. Il s'agit du scénario menant à l'intermittence de type-I. La description qui suit s'appuie sur des modèles numériques, mais la description de cette intermittence reste universelle.

Intermittence de type-I Au sein d'un diagramme de bifurcation calculé sur un système chaotique peuvent apparaître des fenêtres périodiques. Le passage d'un comportement chaotique à un comportement périodique se réalise d'une manière brutale (décroissance rapide de l'exposant de Lyapounov). Ceci s'observe aussi sur les diagrammes de bifurcations où la répartition des points passe brutalement à la description d'un cycle limite par quelques branches. Pourtant, lorsqu'une analyse très fine est réalisée, c'est-à-dire que de très petites variations du paramètre de contrôle sont appliquées, le passage entre chaos et cycle limite se fait par une intermittence générée à travers une bifurcation tangente.

Prenons l'exemple de la fenêtre de période 5 qui survient pour $\mu = \mu_5 = 3.73775$ dans le cas de la fonction logistique (voir définition au chapitre 4). Le cycle limite en jeu étant de période 5, l'étude de la bifurcation se fait par l'intermédiaire de l'application discrète f^5 puisque le cycle limite vérifie la relation:

$$x_{n+5} = f^5(x_n) = x_n \quad (1.63)$$

La fonction f^5 est représentée figure 1.19 pour trois valeurs du paramètre de contrôle autour de la valeur μ_5 à la bifurcation. Lorsque $\mu < \mu_5$, la fonction f^5 ne coupe la bissectrice qu'en un seul point correspondant au point fixe X_1 qui s'est déstabilisé pour $\mu = 3.0$. La fonction f^5 coupe la bissectrice en cinq nouveaux points pour $\mu = \mu_5$: c'est la bifurcation nœud-col qui induit la création d'une paire d'orbites périodiques codée (1011_0^1) ¹⁹. Dès que le paramètre μ est légèrement supérieur à la valeur μ_5 , nous constatons que c'est maintenant dix intersections supplémentaires entre la courbe représentative de f^5 et la première bissectrice qui sont observées ; elles correspondent aux 5 points périodiques des deux nouvelles orbites. Le comportement asymptotique est alors un cycle limite de période 5 dont la séquence orbitale est (10110).

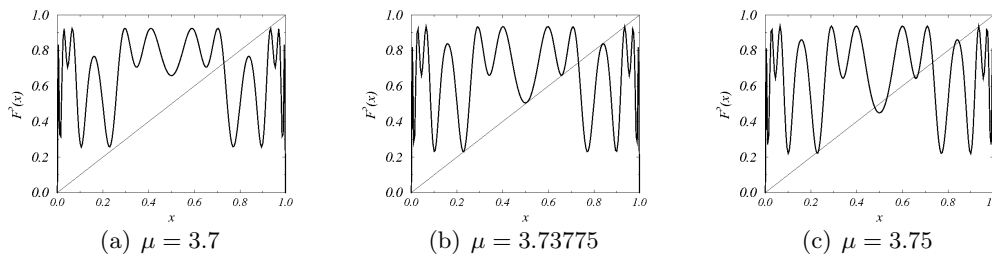


Figure 1.19: *Bifurcation tangente créant une orbite de période 5: (a) $F^5(x)$ présente une intersection avec la bissectrice à $\mu = 3.7$; (b) $F^5(x)$ devient tangente à la bissectrice en 5 nouveaux points à $\mu = 3.73775$; $F^5(x)$ présente 11 intersections avec la bissectrice à $\mu = 3.75$.*

Si maintenant nous nous plaçons juste avant la bifurcation, nous observons en représentant les itérés successifs d'une trajectoire, qu'un canal se forme entre la fonction f^5 et la première

¹⁹La définition de ce codage appelé *dynamique symbolique* est donnée au chapitre 4.

bissectrice (fig. 1.19.a). Ainsi, près du point de tangence, la trajectoire peut rester très longtemps au voisinage du cycle limite à apparaître pour $\mu = \mu_5$. Ces comportements quasiment périodiques sont entrecoupés de comportements aperiodiques de bouffées chaotiques [58]. Ce comportement s'illustre bien dans le cas d'un flot comme le système de Rössler. Prenons le cas de l'intermittence apparaissant à la naissance du cycle limite de période 3 dont la séquence orbitale est (100): ceci survient lorsque les paramètres de contrôle du système de Rössler sont fixés comme $(a, b, c) = (a_3 = 0.4091200, 2.0, 4.0)$. Lorsque a est légèrement supérieur à a_3 , le comportement asymptotique est le cycle limite de période 3. Un exemple de l'évolution de la variable y en fonction du temps pour $a \lesssim a_3$ révèle les phases laminaires durant lesquelles la trajectoire est très proche du cycle limite interrompues par des bouffées chaotiques (fig. 1.20.a). J. Hirsch *et al* [59] ont montré que la longueur moyenne \bar{L} des phases laminaires évolue suivant la relation:

$$\bar{L} \propto \epsilon^{-\alpha} \quad (1.64)$$

où ϵ représente la distance $a - a_3$ et α est une constante égale à $1/2$. De manière à définir la longueur de la phase laminaire, nous introduisons un critère sur le plus petit minimum de la série temporelle $y(t)$. En effet, lorsque $a \gtrsim a_3$, la série temporelle $y(t)$ passe par trois minima avant de redécrire à nouveau le cycle limite de période 3. Si nous classons ces trois minima suivant un ordre décroissant, y_3 est donc le plus petit minimum associé à la variable y lorsque le comportement asymptotique est le cycle limite (100). Lorsque $a \lesssim a_3$ et que la trajectoire se trouve dans une phase laminaire, le plus petit minimum $y_{\min}(t)$ de la série temporelle $y(t)$ évolue donc au voisinage de y_3 . La longueur d'une phase laminaire est donc définie à l'aide d'un critère d'acceptation sur les variations de $y_{\min}(t)$ qui s'écrit:

$$y_{\min}(t) - y_3 \leq k (y_1 - y_3) \quad (1.65)$$

où k doit être choisi petit. Il est ici arbitrairement choisi égal à $1/200$. Si ce critère est réalisé, alors le comportement asymptotique est très proche du cycle limite et nous sommes en présence d'une phase laminaire ; sinon l'évolution correspond à une bouffée chaotique. L'évolution de la longueur maximum des phases laminaires L en fonction de ϵ est représentée figure 1.20. Cette évolution est en accord avec la relation (1.64) pour laquelle α est trouvé égal à 0.53 ± 0.01 soit une valeur très proche de la valeur théorique. Hirsch *et al* [59] ont également montré que la distribution de probabilité $P(L)$ de la présence d'une phase laminaire de longueur L met en évidence deux longueurs principales caractéristiques des petites et grandes phases laminaires: ceci est aussi observé sur le système de Rössler comme il est représenté figure 1.20.c. En outre, nous observons une des caractéristiques permettant de différencier l'intermittence de type-I des deux autres: la distribution de la longueur des phases laminaires est bornée supérieurement. Cette intermittence est appelée intermittence de type-I.

Pour terminer ce panorama des routes vers le chaos, il faut mentionner qu'il existe des scénarii qui ne sont pas clairement associés à un type donné de bifurcations. Nous citerons le cas du scénario de Curry et Yorke [54, 60] correspondant à la transition d'un régime quasi-périodique sur un tore T^2 (2 fréquences caractéristiques) à un régime chaotique,

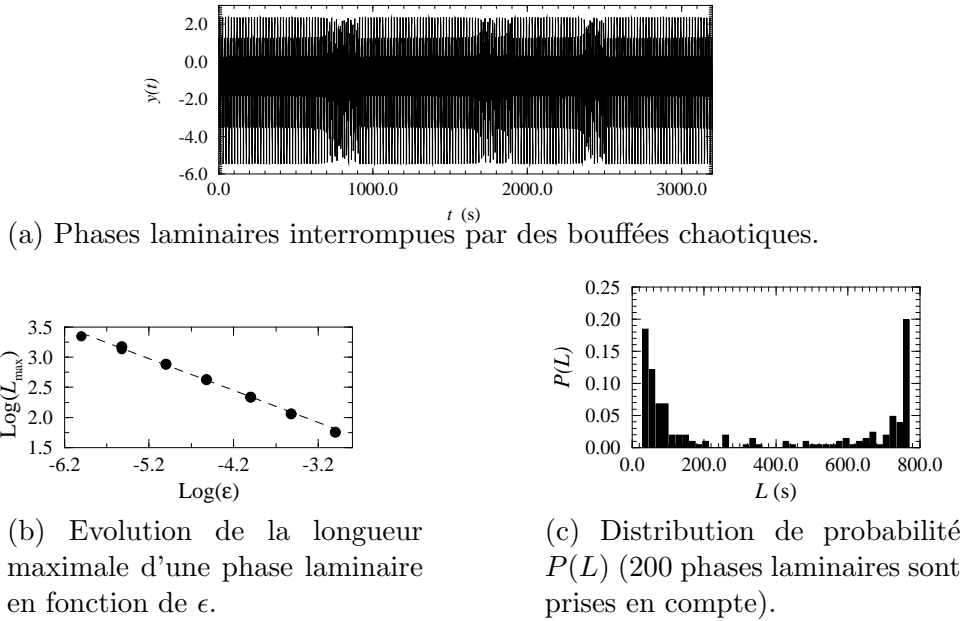


Figure 1.20: *Caractéristiques de l'intermittence de type-I observée avant la création du cycle limite de période 3 pour le système de Rössler. Les paramètres de contrôle sont $(a, b, c) = (0.40911, 2.0, 4.0)$, c'est-à-dire que $\epsilon = 10^{-5}$. Nous remarquons que la distribution de probabilité $P(L)$ des longueurs des phases laminaires est bornée. Cette propriété est caractéristique de l'intermittence de type-I.*

sans apparition d'une nouvelle fréquence mais par un abandon progressif du tore par les trajectoires ²⁰.

La plupart des scénarii connus ont déjà pu être rencontrés dans certaines expériences incluant des expériences de mécanique des fluides (convection de Rayleigh-Bénard [62], expérience du fil chaud [60]). Revenons aux cas des jets qui nous intéressent plus particulièrement dans le cadre de ce travail de thèse.

1.4.2 Deux cas expérimentaux

Le goutte-à-goutte

Les régimes de goutte-à-goutte sont une des situations bien connues de mise en évidence expérimentale de comportements chaotiques. Des preuves de la présence de différentes routes vers le chaos auraient été données, comme la cascade de doublements de période [63] et les intermittences [64, 65], pour les plus connues.

Ici, nous résumons les résultats de deux études récentes car chacune présente clairement des caractéristiques différentes de dynamiques chaotiques. Dans chacune, les dispositifs expérimentaux, basés sur l'extinction d'un spot laser au passage d'une goutte, permettent d'enregistrer la taille des gouttes et les écarts entre leurs passages successifs.

²⁰Voir aussi le cas de la catastrophe homocline [61]

Route vers le chaos La première étude [66] montre une analyse d'applications de premier retour sur les durées de passage entre deux gouttes arrivant successivement au niveau du détecteur (fig. 1.21). Cette analyse permet de constater que cette grandeur prend d'abord la même valeur à chaque nouveau passage de gouttes (période 1). Ensuite, pour un débit plus élevé, cette grandeur prend alternativement une valeur haute et une valeur basse (période 2). En augmentant encore le débit, nous voyons apparaître un régime bâti sur un cycle limite de période 3. Puis finalement, les points de l'application de premier retour se structurent autour d'une ligne dont nous pouvons distinguer au moins deux branches de pentes contraires. Cette structure est caractéristique d'une dynamique chaotique. En outre, la ressemblance de cette application avec une application de premier retour très connue, la fonction logistique [54], est frappante.

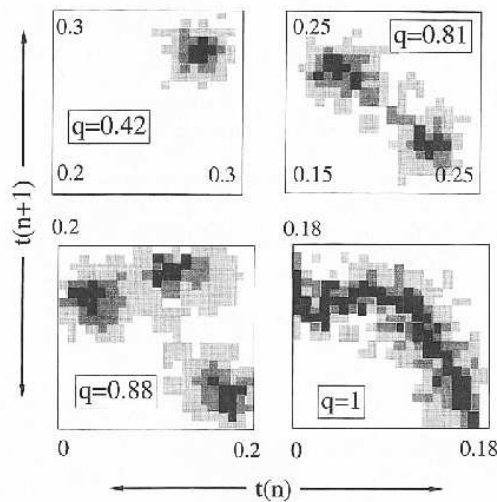


Figure 1.21: Applications de premier retour sur l'intervalle de temps t (en s.) entre le passage successif de deux gouttes. q représente la valeur du débit en ml/s. Les niveaux de gris sont proportionnels à la densité de points détectés (d'après [66]).

Cependant, comme le note les auteurs, l'analogie s'arrête ici, car le scénario adopté pour la fonction logistique est la cascade de doublements de période au cours de laquelle, à chaque bifurcation, la période est multipliée par deux. Pour le goutte-à-goutte, la période croît de 1 à 2, puis de 2 à 3. Cela suggère que, dans cette étude, le scénario de doublements de période n'est pas suivi par le régime de goutte-à-goutte à mesure que le débit augmente.

Les auteurs remarquent que cette route vers le chaos est associée à une évolution de la distribution en taille des gouttes. Jusqu'au régime de période 2 sur les temps de passage entre deux gouttes, la distribution en taille montre deux pics caractéristiques, l'un pour les gouttes principales, l'autre pour des gouttes secondaires de plus petites tailles. Ensuite, à mesure que l'on s'approche du régime chaotique, cette distinction entre les deux pics se détériore, pour disparaître complètement pour un débit correspondant au régime de chaos. Les auteurs en concluent que la disparition des gouttes secondaires après l'arrivée du régime

chaotique représente un problème clef à résoudre pour l'étude de la dynamique des fluides. Notons effectivement qu'il peut y avoir ici un intérêt à trouver la raison de cette connexion entre la nature du régime de l'écoulement (chaotique ou non) et la présence d'une goutte secondaire.

Bifurcation et loi d'échelle Dans la seconde étude [67, 68], l'augmentation du débit a permis de mettre en évidence une bifurcation de Hopf inverse et une loi d'échelle sur les enregistrements des intervalles de temps T entre passages successifs de gouttes devant le détecteur. Ici, le paramètre de contrôle n'est pas le débit, mais la fréquence de production des gouttes, f (en gouttes/s.).

La bifurcation est visible sur l'évolution de l'application de premier retour sur T (figure 1.22): f augmentant, nous passons d'un régime de période 5 à un régime quasi-périodique (à partir de $f = 39.67$ gouttes/s). En même temps, le spectre de puissance (fig. 1.23) évolue d'un spectre montrant une fréquence fondamentale F_0 et sa première harmonique F_2 , à un spectre (en $f = 39.67$ gouttes/s) comportant ces fréquences et deux nouvelles: F_1 et $F_3 = F_0 + F_1$.

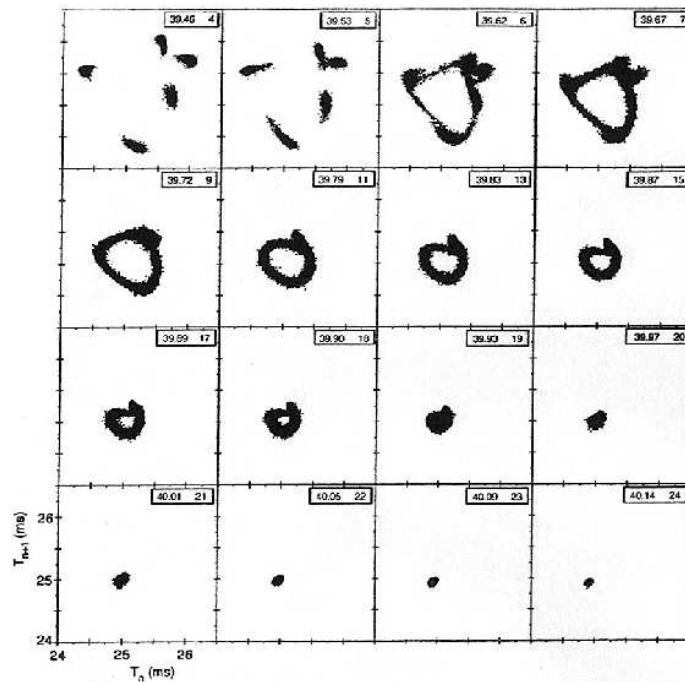


Figure 1.22: Applications de premier retour sur l'intervalle de temps T entre le passage successif de deux gouttes. Les fréquences moyennes de passage des gouttes sont données en haut à droite de chaque figure.

Le régime quasi-périodique est inscrit sur un cercle (sur l'application de premier retour, caractéristique d'une dynamique inscrite près d'un tore) dont la taille décroît quand f augmente encore. Dans notre travail, nous constaterons aussi que le jet, dans le régime de

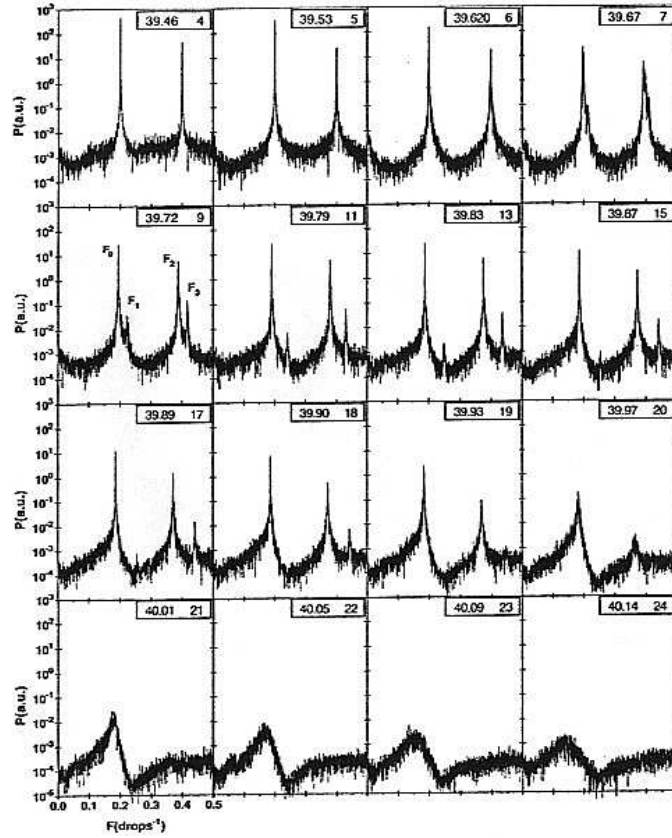


Figure 1.23: Spectres de puissance correspondant aux données de la figure 1.22. Le taux de passage des gouttes est donné en haut de chaque figure. On notera la définition de F_0 , F_1 , F_2 , et F_3 sur le spectre en $f = 39.72$ gouttes/s.

Rayleigh cette fois, présente une dynamique de ce type (voir chap. III). En même temps, le spectre de puissance perd progressivement les pics en F_1 et F_3 et le pic en F_0 s'élargit, laissant penser que le régime devient un régime de période 1 en première approximation seulement.

La bifurcation de Hopf étant décrite, les auteurs s'intéressent au régime apparemment de période 1. C'est donc sur six des enregistrements, correspondant à $f > 39.67$ gouttes/s, qu'ils tracent les fonctions d'autocorrélation. Ces fonctions sont caractérisées par une décroissance exponentielle dont la taille caractéristique τ dépend elle-même du débit selon une loi d'échelle:

$$\tau = A \left| \frac{f - f_c}{f_c} \right|^\gamma \quad (1.66)$$

où $\gamma = -2.28 \pm 0.03$ est l'exposant critique, et $f_c = 39.897$ gouttes/s est la fréquence critique de passage des gouttes pour cette loi d'échelle. Ainsi, la diminution du rayon du cercle sur les applications de premier retour caractérisant le passage d'un régime quasi-périodique au régime de période 1 suit finalement la loi d'échelle qui vient d'être donnée.

L'étude d'un jet d'air

Les seuls travaux impliquant la théorie des systèmes dynamiques non linéaires dans l'analyse du comportement d'un jet (en dehors du régime de goutte-à-goutte) ne concernent que des jets gaz/gaz axisymétriques. A notre connaissance, deux études en résument les résultats. La première est basée sur des simulations numériques directes, tridimensionnelles. La deuxième est expérimentale et concerne un jet d'air excité par des perturbations axisymétriques.

Une précaution à prendre dans la lecture de cette section est de se rappeler les particularités de l'instabilité d'un jet gaz/gaz. Les phénomènes physiques mis en jeu sont différents de ceux qui gouvernent l'instabilité d'un jet liquide dans un gaz. Ce problème est essentiellement dû au rapport entre les masses volumiques des fluides intérieur et extérieur au jet, ici égal à 1.

Simulations numériques Il s'agit ici de l'étude d'un jet rond non forcé [69]. L'originalité de l'approche est qu'elle ne nécessite pas d'imposer des perturbations initiales qui pourraient être déduites, par exemple, des résultats de la théorie linéaire. Pour un Reynolds de $Re = 240$, les résultats de simulation montrent un régime complexe d'une des composantes de la vitesse en un point de l'écoulement (fig. 1.24).

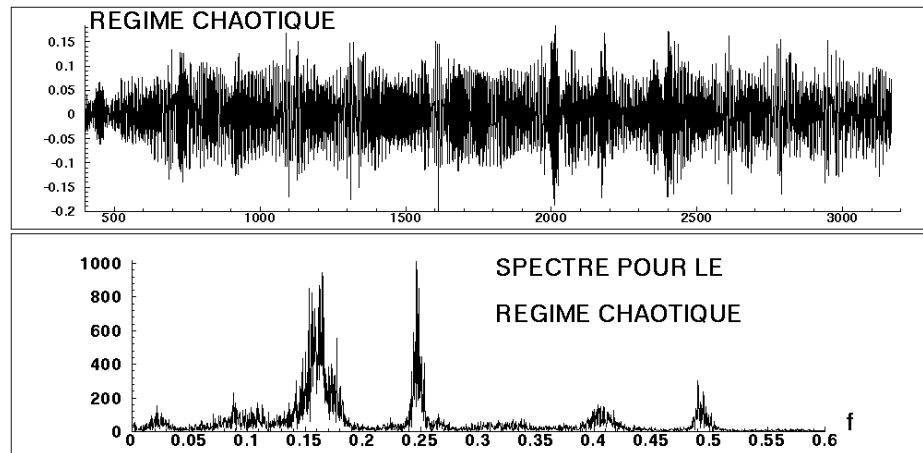


Figure 1.24: Régime chaotique d'une composante de la vitesse en un point du jet obtenu par simulations numériques (Thèse de I. Danaïla [69]): en haut, série temporelle; en bas, spectre de puissance calculé sur la série.

Ce régime, dominé par de fortes oscillations, intervient, d'après l'auteur, après une bifurcation sous-critique située au voisinage de $Re = 230$; ce qui suggérerait une transition au chaos par intermittence de type II. Cependant, le spectre de puissance seul ne permet pas une caractérisation précise du comportement. Il faut alors employer des outils plus adaptés au problème.

Jet d'air forcé Broze et Hussain [70, 71] présentent une expérience dont les mesures de vitesses sont réalisées par fil chaud, en un point d'un jet excité. Les auteurs observent deux bifurcations tangentes sur des applications de premier retour. L'une est observée sur la différence de phase entre le mode fondamental et le sous-harmonique (fig. 1.25)²¹ et amène le système d'un état périodique à un régime proche du quasi-périodique, mais chaotique. L'autre est observée sur la différence de phase entre le sous-harmonique et la 4^{ème} harmonique (fig. 1.26) et serait une transition à un régime d'intermittence de type II (la deuxième observée expérimentalement après l'expérience du fil chaud reportée par Eric Ringuet [60, 72]). Les modèles des applications de premier retour sont construits en prenant, pour chaque point d'un modèle, le barycentre d'au moins 100 points voisins sur l'application de premier retour considérée. Notons qu'il suffit d'un modèle simplement temporel pour décrire le comportement du jet, système spatio-temporel.

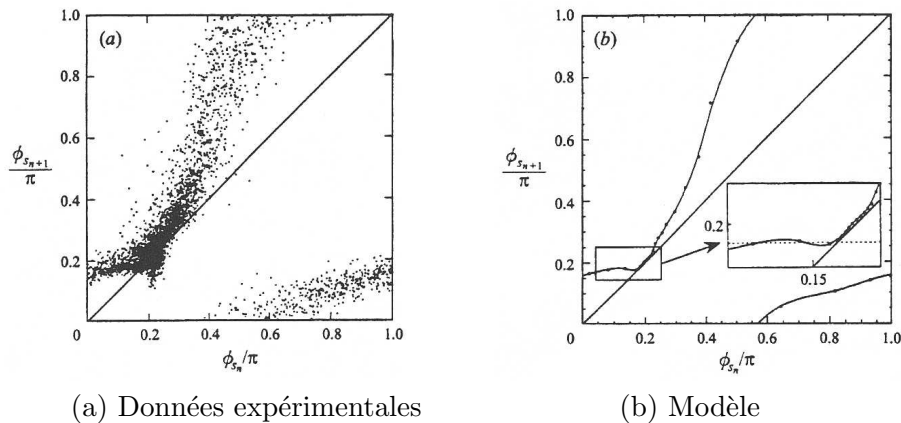


Figure 1.25: *Application de premier retour (a) et son modèle (b) pour la transition du régime périodique au régime chaotique proche d'un quasi-périodique. ϕ_s est la différence de phase entre la fréquence d'excitation et son sous-harmonique. n représente l'indice de l'intersection avec la section de Poincaré. Le modèle est construit en calculant les coordonnées des barycentres d'au moins 100 points voisins du graphe.*

Les auteurs ne se contentent pas de ces mises en évidence de comportements chaotiques, mais dressent un diagramme d'état permettant de retrouver toutes les transitions entre les différents régimes du jet sous évolution de l'amplitude et de la fréquence de l'excitation. Mais surtout, de manière à expliquer les bifurcations tangentes, les auteurs décrivent différents schémas d'appariement entre vortex pour identifier les traits principaux composant un système dynamique non linéaire. Notamment la rétroaction (qui est un effet principal des non linéarités), est décrite par certaines interactions entre vortex agissant de proche en proche en remontant vers l'injecteur.

²¹Le sous-harmonique est la composante de fréquence moitié par rapport à celle du fondamental f_{ex} , dans le spectre de puissance: $f_s = f_{ex}/2$

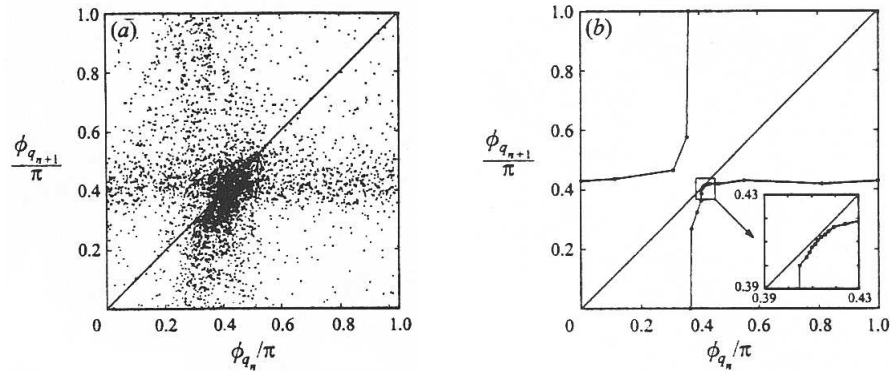


Figure 1.26: *Application de premier retour (a) et son modèle (b). ϕ_q est la différence de phase entre le sous-harmonique et la 4^{ème} harmonique. Le modèle est construit en calculant les coordonnées des barycentres d'au moins 100 points voisins sur l'application originale.*

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les résultats principaux concernant l'atomisation de jets liquides cylindriques à basse vitesse ainsi que les premiers concepts de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

Nous avons vu, à travers le bilan sur les processus d'atomisation, que les jets se déstabilisent selon des dynamiques complexes dépendant de nombreux paramètres. Cependant, les exemples pris dans la littérature, comme celui du jet libre de Broze et Hussain, montrent clairement que ces comportements ne sont pas aléatoires. Ces comportements, pour tre compris, nécessite l'introduction d'outils venant de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires: c'est le principal objectif de ce travail de thèse.

Enfin, nous avons pu constater que les phénomènes d'intermittence occupent une place importante dans les processus d'atomisation.

Bibliography

- [1] Dumouchel C. *Atomisation et Sprays*. Mémoire d’habilitation à diriger les Recherches, Université de Rouen, 1997.
- [2] A.A. Shraiber, A.M. Podvysotsky, and V.V. Dubrovsky Deformation and breakup of drops by aerodynamic forces. *Atomisation and Sprays*, **6**, 667-692, 1996.
- [3] A. H. Lefebvre. *Atomization and Sprays*. Hemisphere Publishing Corporation, 1989.
- [4] S. Nukiyama and Y. Tanasawa. *Experiments on the atomization of liquids in air stream, Report 3*, volume **5**, chapter: On the droplet size distribution in an atomized jet, pages 62–67. 1939.
- [5] P. Rosin and E. Rammler. The laws governing the fineness of powdered coal. *J. Inst. Fuel*, **7**(31):29–36, 1933.
- [6] N. K. Rizk and A. H. Lefebvre. Drop-size distribution characteristics of spill-return atomizers. *AIAA J. Propul. Power*, **1**(3):16–22, 1985.
- [7] R. Mugele and H. D. Evans. Droplet size distribution in sprays. *Ind. Eng. Chem.*, **43**(6):1317–1324, 1951.
- [8] J. Plateau. Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Cité par Lord Rayleigh, *Theory of sound*, **2**:363, 1945.
- [9] Lord Rayleigh. On the instability of jets. *Proc. London Math. Soc.*, **10**:4–13, 1878.
- [10] Lord Rayleigh. *Theory of sound*, volume **2**. Dover, New York (1945), 1896.
- [11] C.E. Shannon and W. Weaver. *The mathematical theory of communication*. University of Illinois, Press. Urbana, 1949.
- [12] R. W. Sellens. Prediction of the drop size and velocity distributions in a spray based on the maximum entropy principle. *Part. Part. Syst. Character.*, **9**:195, 1989.
- [13] M. Ledoux, C. Dumouchel, and J. Cousin. Prediction of drops sizes in a spray produced by an injector. *3rd Report - Contrat JOU2/CORIA*, Décembre 1994.
- [14] J. Cousin, S. J. Yoon, C. Dumouchel, and M. Ledoux. Theoretical determination of the characteristics of sprays produced by swirl atomizers. *ILASS-Europe Nürnberg*, 1995.

- [15] J. Cousin, S. J. Yoon, and C. Dumouchel. Coupling of classical linear theory and maximum entropy formalism for prediction of drop size in sprays. application to pressure swirl atomizer. *Atomization and Sprays*, **6**(5), 1996.
- [16] S. Leroux. *Stabilité d'un jet liquide cylindrique. Influence de fortes pression ambiantes*. Thèse de l'Université de Rouen, Novembre 1996.
- [17] R. B. Byrd and W. E. Stewart. *Transport phenomena*. E. N. Lightfoot. John Wiley, 1966. 4 Ed.
- [18] B. Nekrasson. *Cours d'hydraulique*. Editions de Moscou, 1988.
- [19] R. Comolet. *Mécanique expérimentale des fluides - Tome III*. Masson Ed., 1976.
- [20] J. O. Hinze. *Turbulence*. Mac Graw Hill - second edition, 1959.
- [21] H. Latzko. *Ztschr. f. angew. Math. und Mech.*, **1**:277, 1921.
- [22] D. A. Bouulus and J. A. Brighton. *J. Basic Eng. Trans. ASME*, page 90, Décembre 1969.
- [23] J. M. Coulson and J. F. Richardson. *Chem. Eng.*, **1**, 1945.
- [24] S. P. Lin and R. D. Reitz. Drop and spray formation from a liquid jet. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **30**:85–105, 1998.
- [25] S. W. J. Smith and H. Moss. Experiments with mercury jets. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A93**:373–393, 1917.
- [26] P. C. Hooper. Ph'd thesis. 1959.
- [27] J. H. Rupe. Natl. Aeronaut. Space Admin. Tech. Rept. N°32 – 207, 1962.
- [28] J. L. Duda and J. S. Vrentas. Fluid mechanics of laminar liquid jets. *Chemical Engineering Science*, **22**:855–869, 1967.
- [29] M.J. McCarthy and N.A. Molloy. Review of stability of liquid jets and the influence of nozzle design. *Chem. Eng. Journ.*, **7**:p. 1, 1974.
- [30] C. C. Miesse. Correlation of experimental data on the disintegration of liquid jets. *Industrial and Engineering Chemistry*, **47**(9):1690–1701, Septembre 1955.
- [31] D. W. Lee and R. C. Spencer. Photomicrographic studies of fuel sprays. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), 1933.
- [32] H. Hiroyasu, M. Shimizu, and M. Arai. The breakup of high speed jet in a high pressure gaseous atmosphere. *ICLASS'82*, Papier 2-5:69–74, 1982.
- [33] W. Ohnesorge. Die Bildung von tropfen an düsen und die auflösung flüssiger strahlen. *Zeitschrift fuer angewandte mathematik und mechanik*, **16**:355–358, Décembre 1936.

- [34] R. D. Reitz and F. V. Bracco. volume **3**, chapter 10, Mechanisms of Breakup of Round Liquid Jets, pages 233–249. N. Cheremisnoff, Ed., Gulf Publishing, New Jersey, 1986.
- [35] G. Littaye. Sur une théorie de la pulvérisation des jets liquides. *Compte-rendu de l'académie des sciences*, 217:99, Séance du 26 juillet 1943.
- [36] Z. Faragó and N. Chigier. Morphological classification of disintegration of round liquid jets in a coaxial air stream. *Atomization and Sprays*, **2**:137–153, 1992.
- [37] C. Weber. Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles. *Zeitschrift fuer angewandte mathematik und mechanik*, **11**:136–154, 1931.
- [38] M. Sterling and C. A. Sleicher. The instability of capillary jets. *J. Fluid Mech.*, **68**:477–495, 1975.
- [39] R. P. Grant and S. Middleman. Newtonian jet stability. *AIChE Journ.*, **12**(4):669, 1966.
- [40] R. W. Fenn and S. Middleman. Newtonian jet stability: The role of air resistance. *AIChE Journ.*, **15**(3):379, 1969.
- [41] S. Leroux, C. Dumouchel, and M. Ledoux. The stability curve of Newtonian liquid jets. *Atomisation and Sprays*, **6**(6), 1996.
- [42] S. Leroux, C. Dumouchel, and M. Ledoux. The break-up length of laminar cylindrical liquid jets. modification of Weber's theory. *Proceedings de l' ICLASS-'97, Séoul*, **1**:353–360, 1997.
- [43] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome III, Gauthier-Villard, Paris, 1892.
- [44] B. P. Belousov. A periodic reaction and its mechanism, *Sbornik Referatov po Radiatsionni Meditsine*, p. 145, Medgiz, Moscou, 1958.
- [45] C. Letellier, J. Maquet, H. Labro, L. Le Sceller, G. Gouesbet, F. Argoul & A. Arnéodo. Analyzing chaotic behaviour in a Belousov-Zhabotinskii reaction by using a global vector field reconstruction, *Journal of Physical Chemistry A*, **102**, 10265-10273, 1998.
- [46] H. Labro. *Application de la dynamique des systèmes à la cinétique chimique*. Thèse de l'Université de Rouen, Octobre 1998.
- [47] J. L. Hudson. Chaos in chemical systems, *Z. Phys. Chemie*, **270** (3), 497-514, 1989.
- [48] C. Letellier, L. Le Sceller, E. Maréchal, P. Dutertre, B. Maheu, G. Gouesbet, Z. Fei & J. L. Hudson. Global vector field reconstruction from a chaotic experimental signal in copper electrodisolution, *Physical Review E*, **51** (5), 4262-4266, 1995.
- [49] C. Letellier, G. Gouesbet, F. Soufi, J. R. Buchler, Z. Kolláth. Chaos in variable stars: topological analysis of W Vir model pulsations, *Chaos*, **6** (3), 466-476, 1996.

- [50] C. Letellier, S. Meunier-Guttin-Cluzel, and G. Gouesbet. Use of the nonlinear dynamical system theory to study cycle-to-cycle variations from spark ignition engine pressure data. *SAE technical paper N° 971640*, 1997.
- [51] Daidzić N. *Nonlinear droplet oscillations and evaporation in an ultrasonic levitator*. Thèse de l'Université de Erlangen-Nrnberg, 1995.
- [52] V. Croquette. *Cours du DEA Champs, Particules, Matières*. Université d'Orsay, 1994.
- [53] H. G. Schuster. *Deterministic chaos - an introduction*. VCH, Germany, 1989.
- [54] P. Bergé, I. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, Paris, 1984.
- [55] C. Letellier. *Cours de maîtrise*, Université de Rouen, 1998.
- [56] J.M.T. Thompson and H.B. Stewart. *Nonlinear dynamics and chaos: geometrical methods for engineers and scientists.*, John Wiley and sons, New York, 1987.
- [57] R. Thom. *Prédire n'est pas expliquer*, Coll. Champs, Flammarion, Paris, 1996.
- [58] P. Manneville & Y. Pomeau. Intermittency and the Lorenz model, *Physics Letters A*, **57**, (1):2, (1979).
- [59] J. E. Hirsch, B. A. Huberman & D. J. Scalapino. Theory of intermittency, *Physical Review A*, **25**, (1): 519-532, 1982.
- [60] E. Ringuet. *Instabilités temporelles et spatio-temporelles créées par la présence d'un fil chaud sous une surface libre*. Thèse de l'Université de Rouen, Octobre 1994.
- [61] P. Manneville. *Structures dissipatives, Chaos et turbulence*. C.E.A., Collection Aléa Saclay, 1991.
- [62] P. Bergé, M. Dubois, P. Manneville, and Y. Pomeau. Intermittency in Rayleigh-Bénard convection, *Journal de Physique - Lettres*, **41**, L341-L345, (1980).
- [63] H. N. Núñez Yépez, A. L. Salas-Brito, C. A. Vargas, and L. Vicente. *Eur. J. Phys.*, **10**:99, 1989.
- [64] X. Wu and Z. A. Schelly. *Physica D*, **40**:433, 1989.
- [65] X. Wu, E. Teckle, and Z. A. Schelly. *Rev. Sci. Instrum.*, **60**:3779, 1989.
- [66] Z. Néda, B. Bakó, and E. Rees. The dripping faucet revisited. *Chaos*, **6**(1):59, 96.
- [67] J. G. Marques da Silva, J. C. Sartorelli, W. M. Goncalves, and R. D. Pinto. A scale law in a dripping faucet. *Physics letters A*, **226**:269–274, 97.
- [68] R. D. Pinto, W. M. Goncalves, J. C. Sartorelli, and M. J. de Oliveira. *Physical review E*, **52**:6896, 95.

-
- [69] I. Danaila. *Etude des instabilités et des structures cohérentes dans la zone de proche sortie d'un jet axisymétrique*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille, Novembre 1997.
- [70] G. Broze and F. Hussain. Transitions to chaos in a forced jet: intermittency, tangent bifurcations and hysteresis. *J. Fluid Mech.*, **311**:37–71, 1996.
- [71] G. Broze and F. Hussain. Nonlinear dynamics of forced transitional jets: periodic and chaotic attractors. *J. Fluid Mech.*, **263**:93–132, 1994.
- [72] E. Ringuet, C. Rozé, and G. Gouesbet. Experimental observation of type-II intermittency in a hydrodynamic system. *Physical Review E*, **47**(2):1405–1407, 1993.

Chapter 2

Mesures par diffusion de la lumière

Résumé

Dans ce chapitre, nous décrivons d'abord l'expérience et la première méthode de suivi optique de la dynamique du jet. La quantité mesurée est définie grossièrement à l'aide de calculs analytiques, puis finement à l'aide de calculs numériques sur les deux formes du jet principalement observées (déformations sinusoïdales et variqueuses). Pour de faibles amplitudes de perturbations, l'intensité mesurée est proportionnelle au diamètre du jet. Au delà d'une certaine amplitude de perturbation de la surface du jet, nous mettons en évidence un artéfact sur les mesures. Néanmoins cet artéfact nous permet de distinguer les oscillations de jet (perturbations sinusoïdales), des perturbations axisymétriques (varicoses). Cette méthode nous permet donc de présenter les premiers résultats sur un jet d'eau excité transversalement et sur un jet d'eau libre. L'évolution de la dynamique en fonction de la position le long de l'axe du jet est représentée par différents moyens selon les cas étudiés et l'information désirée. Dans le cas du jet excité, nous observons notamment l'extinction des perturbations dues à l'excitation (ondes sinusoïdales) suivie de l'apparition et de la croissance de perturbations axisymétriques de même longueur d'onde. Dans le cas du jet libre, des outils tels que sections de Poincaré et applications de premier retour permettent de distinguer les gouttes principales des satellites. Le résultat le plus intéressant réside dans le fait que la dynamique des perturbations se structure autour de "bouffées intermittentes".

2.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà précisé, nous avons choisi d'étudier un jet cylindrique. Celui-ci est caractérisé par une série de paramètres déterminant notamment la géométrie de l'injecteur ou bien les propriétés physiques du liquide injecté. Les valeurs de ces paramètres seront données dans la suite. Les valeurs communes aux jets étudiés dans ce chapitre seront données dans la section 2.2. Puis, dans chacune des sections 2.4 et 2.5, nous pourrons relever les valeurs des paramètres restant, spécifiques des mesures effectuées sur un jet excité et sur des jets libres.

Un jet cylindrique est décrit par les équations de l'hydrodynamique qui impliquent des termes non linéaires. Aussi, l'utilisation des outils de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires est pertinente pour l'étude des instabilités de tels jets. Pour étudier la dynamique d'un système quelconque, il faut mesurer une des grandeurs physiques caractérisant son état. Des mesures en temps réel de la longueur de rupture d'un jet cylindrique ont déjà été réalisées, mais elles ne permettent pas d'étudier l'évolution des perturbations modifiant la surface du jet et menant à la rupture en gouttes. Une autre technique de mesure, basée sur la déviation d'un faisceau laser par le jet, a été utilisée par Cossali *et al.* [1]. La déviation du faisceau étant fonction des rayons de courbure du jet, cette technique permet d'avoir accès à certaines évolutions de la forme du jet. En fait, la forme d'une section transverse à l'axe du jet, c'est à dire à la direction de l'écoulement, permet de connaître la perturbation de la surface du jet à une distance donnée depuis la sortie de l'injecteur. Ce type d'information peut être retrouvée par des méthodes utilisant des mesures de conductivité [2]. Cependant la précision de la mesure n'est pas encore suffisante pour une étude de la dynamique des instabilités de jet ¹. Dans le cas d'un jet cylindrique, la symétrie de révolution permet de se contenter de la seule mesure du diamètre de la section circulaire considérée ². Une technique de mesure par extinction d'un faisceau laser, mise au point par Xing *et al.* [4], permet de mesurer le diamètre d'un jet. Mais cette mesure n'a été envisagée par les auteurs de cet article que pour le cas d'un jet rendu opaque. Cette solution ne saurait être envisagée dans le cas présent, puisque l'utilisation d'une encre opacifiante est susceptible de modifier les caractéristiques du fluide injecté, et donc de modifier les mécanismes de développement des instabilités. Nous verrons au chapitre 3 qu'une solution peut néanmoins être trouvée. En dehors des remarques faites précédemment sur les différents principes de mesure relevés dans la littérature, il est bon de souligner que, dans ces travaux, le traitement du signal est systématiquement limité à l'utilisation de la transformée de Fourier. Notre ambition étant d'utiliser les ressources complètes de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, nous devons chercher une méthode de mesure qui permettra de répondre aux exigences spécifiques de cette théorie. Nous nous proposons de mesurer l'évolution d'un diamètre local pour des positions successives selon l'axe du jet, de la sortie de la buse à la rupture en gouttes sans intervenir sur la composition du liquide injecté.

Concernant la mesure, le lecteur pourra objecter que la connaissance de l'état complet du jet nécessite une information globale sur la forme qu'il prend, de la sortie de la buse à la rupture en gouttes, à chaque instant. De manière plus synthétique, nous dirons qu'il est régi par une dynamique spatio-temporelle. En fait, cette objection restreint déjà le champ de la mesure au seul problème des perturbations modifiant la surface du jet, alors que la description complète de son état devrait aussi pouvoir nous renseigner complètement sur le champ de vitesses de chaque particule fluide qui le compose. En fait cette dernière remarque peut être éludée en se rappelant que seule l'information concernant l'état de la surface du jet est utile pour accéder à la dynamique des perturbations modifiant effectivement cette surface.

¹Cette méthode est actuellement appréciée pour le suivi de la formation et des déformations de "blobs" qui sont des paquets de liquides observés dans les écoulements de type "pipeline" [3].

²Il est bon de rappeler que cette symétrie de révolution peut tout de même être rompue sous l'action des forces aérodynamiques pour des vitesses d'écoulement au moins supérieures à la vitesse critique définie par le maximum de la courbe de stabilité (voir chapitre 1).

Il reste que la dynamique du jet s'inscrit à la fois dans l'espace (le jet a une étendue finie) et le temps. Or, l'enregistrement isolé de chaque série temporelle, sans corrélation les unes avec les autres, ne peut offrir ce type d'information spatio-temporelle. Cependant deux constatations vont nous permettre de nous satisfaire de ce type de mesure. La première se réfère au principe de redondance de l'information dans les systèmes aux variables couplées. Ce principe, à l'origine des méthodes de reconstruction de portraits de phase dont nous reparlerons plus tard, nous permet de dire que, dans une certaine mesure, l'information contenue dans une seule variable du système reflète l'évolution du système dans sa globalité. Cependant, aucun résultat ne permet de dire si ce principe peut s'appliquer, pour le cas du jet cylindrique, au problème spécifique de la redondance de l'information entre les différentes coordonnées d'un système spatio-temporel. Par conséquent, nous nous contenterons pour l'instant de nous convaincre que même s'il n'existe pas de corrélation entre des séries temporelles acquises à des instants différents, il n'en reste pas moins que les informations recueillies sur chaque série temporelle sont susceptibles d'évoluer, en moyenne, de proche en proche, de la sortie de la buse à la rupture en gouttes, pour finalement nous donner une information sur la croissance des perturbations le long du jet.

Dans un premier temps, section 2.2, je décris le dispositif expérimental relatif à un diagnostic optique utilisant la diffusion d'une nappe laser. L'intérêt de la technique choisie réside dans la possibilité de focaliser la nappe laser de manière à avoir un volume de mesure très réduit. Nous verrons que cela permet d'isoler une section du jet dont l'épaisseur est suffisamment faible face à la longueur d'onde des perturbations évoluant à la surface du jet pour limiter les problèmes d'intégration lors de la mesure. La mesure pourra être considérée comme effectivement locale. Dans la section 2.3, j'explique cette technique de mesure. Des modèles et des simulations numériques permettront de mieux comprendre son fonctionnement et permettront l'interprétation des signaux expérimentaux. Les cas de jets d'eau excités et non-excités (libres) sont étudiés respectivement en section 2.4 et section 2.5. Nous y verrons notamment l'intérêt de l'utilisation des outils de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

2.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (Fig. 2.1) est constitué de deux parties. La première concerne l'injection du liquide selon les caractéristiques souhaitées. La deuxième est constituée par la sonde optique et la chaine d'acquisition.

Injection

Le montage permettant de générer le jet est en majeure partie dû à un travail avec Leroux *et al.* [5, 6, 7]. L'eau est poussée par la mise en pression d'un réservoir de quatre ou dix litres selon la configuration. La pression du gaz propulseur dans le réservoir est régulée et le réservoir est suffisamment large pour pouvoir négliger les variations de pression d'injection au cours d'une expérience à cause du changement de hauteur de la surface libre dans le récipient. Ainsi, le débit d'eau en sortie d'injecteur reste constant au cours d'une expérience. L'eau passe par un injecteur contenant un milieu poreux, puis à travers l'aiguille

d'injection de diamètre interne de $600 \mu\text{m}$ de diamètre. Cette valeur correspond à la valeur nominale du diamètre Φ du jet.

Le cas échéant, l'excitation est réalisée à l'aide d'un haut-parleur connecté à un générateur de fréquence. Cela a pour effet d'imposer une perturbation sinusoïdale à l'aiguille. Le haut-parleur étant apposé contre l'aiguille, l'excitation induit un déplacement transversal du jet. Dans le cas où le jet est excité par cette méthode, et contrairement au cas répandu où l'excitation est longitudinale, la symétrie cylindrique du jet est brisée.

Des micro-déplacements rendent possible le déplacement simultané de l'injecteur, de l'aiguille, et du haut-parleur selon la verticale. Cela permet de réaliser les mesures, le long de l'axe du jet, de la sortie de la buse à la rupture en gouttes.

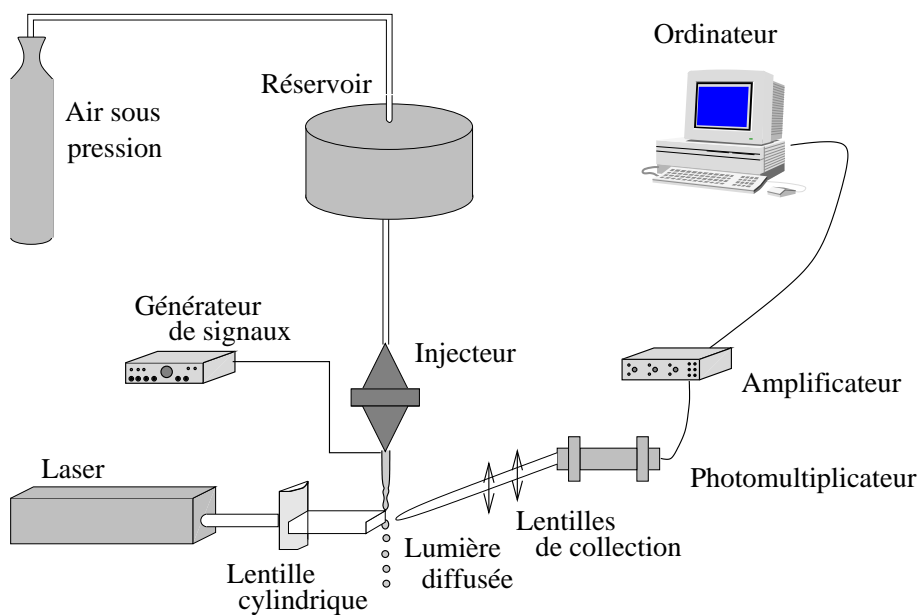


Figure 2.1: Schéma représentant le dispositif expérimental.

Les caractéristiques du jet sont évolutives et susceptibles d'être modifiées dans un autre travail. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à des jets d'eau dont la vitesse débitante a été ajustée pour différentes valeurs comprises dans un intervalle de 1 m/s à 2.5 m/s . Cela correspond ici à la portion de la courbe de stabilité comprenant la première partie ascendante et la partie descendante. La valeur du nombre de Reynolds du jet se situe alors entre 600 et 1500. La relation de Strikler (section 1.3.1) donne une longueur d'établissement du profil de Poiseuille dépendant du nombre de Reynolds comprise entre 30Φ et 75Φ . Par conséquent, le rapport de la longueur de l'aiguille L sur le diamètre Φ étant égal à 200, le profil des vitesses en sortie de buse est considéré comme étant un profil de Poiseuille.

Technique optique de mesure du diamètre

Le montage optique associé à une chaîne d'acquisition, permet d'obtenir l'enregistrement de l'intensité de la lumière diffusée par une section transversale du jet. En passant par ce système optique comprenant une lentille cylindrique, un faisceau laser gaussien, généré par un laser à Argon (Spectra-Physics 1620 3W) ou par un simple laser Helium-Néon (Melles Griot 15mW) se transforme en une nappe laser d'épaisseur $e = 24\mu m$ (sa largeur est de 5 cm environ) (Fig. 2.2). Expérimentalement, la mesure de l'épaisseur de la nappe laser est réalisée à l'aide d'un analyseur de faisceau. Si nous tenons compte de l'incertitude sur le positionnement du jet et aussi de son épaisseur, nous obtenons une valeur de l'épaisseur de la nappe laser vue par le jet égale à $40 \pm 10\mu m$ ³. Cette nappe laser diffuse sur une section perpendiculaire au jet. Une partie de la lumière diffusée est collectée par un arrangement de lentilles qui la focalise sur la face d'entrée d'une fibre optique. Un photomultiplicateur en régime linéaire fournit alors un courant proportionnel à l'intensité lumineuse collectée.

Une telle épaisseur de faisceau, associée à une fréquence d'échantillonnage élevée, permet d'obtenir un suivi précis du diamètre du jet. Si nous considérons la longueur d'onde critique pour laquelle le taux de croissance est le plus grand (grossièrement égale à $\lambda_{max} = \pi D_L \simeq 2 mm$ [1], où D_L est le diamètre du jet), nous constatons que la résolution spatiale de notre "sonde" optique (reliée à épaisseur de la nappe laser) est suffisamment élevée. En effet le rapport λ_{max}/e vaut approximativement 80.

La largeur de la nappe laser, quant à elle, est beaucoup plus grande que le diamètre du jet. C'est donc le détecteur qui détermine la sensibilité de la mesure par rapport à la position du jet. Or, la section utile de la nappe laser, permettant la mesure du diamètre du jet, reste globalement insensible à la position moyenne du jet à 1 mm près au minimum par rapport à la position optimale. La méthode de mesure est donc robuste par rapport à la position moyenne effective du jet.

D'un autre côté, nous verrons plus tard que la technique optique nous permet de détecter des déplacements transversaux du jet, c'est à dire des oscillations de sa position, pour des fréquences d'oscillation suffisamment grandes. Pour le jet excité, les déplacements dus aux mouvements transversaux imposés à la buse d'injection ($F_e \sim 360 Hz$) sont détectés. Il en est de même pour les perturbations préservant la symétrie axiale. Chacun de ces deux types de perturbations est schématisé sur la figure 2.3.

La réponse électrique du photomultiplicateur est mise en forme et amplifiée (gain et offset) de manière à adapter le signal aux spécifications de la carte d'acquisition. Chacune des séries temporelles $\{V(t)\}_{t=1}^{2^{20}}$ (où t est le temps discrétisé) est échantillonnée à une fréquence $f_{ech} = 500 kHz$ au moyen d'une carte ULTRAD 12 bits⁴. Un enregistrement dure alors environ 2.1 s.

Durant une expérience et parallèlement à l'enregistrement d'une série temporelle, un spectre de puissance et une reconstruction de l'espace des phases sont calculés à partir de la série temporelle au moyen d'un algorithme "fft" pour l'un et de la méthode du décalage temporel pour l'autre. Cela permet de suivre grossièrement l'évolution de la dynamique le long de l'axe du jet pendant l'acquisition des données.

³Cette valeur est identique au résultat que l'on trouve théoriquement en tenant compte cette fois de la divergence du faisceau.

⁴Convertisseur Analogique-numérique ULTRAVIEW AD—205DX Dual 5 MHz 12-bit A/D.

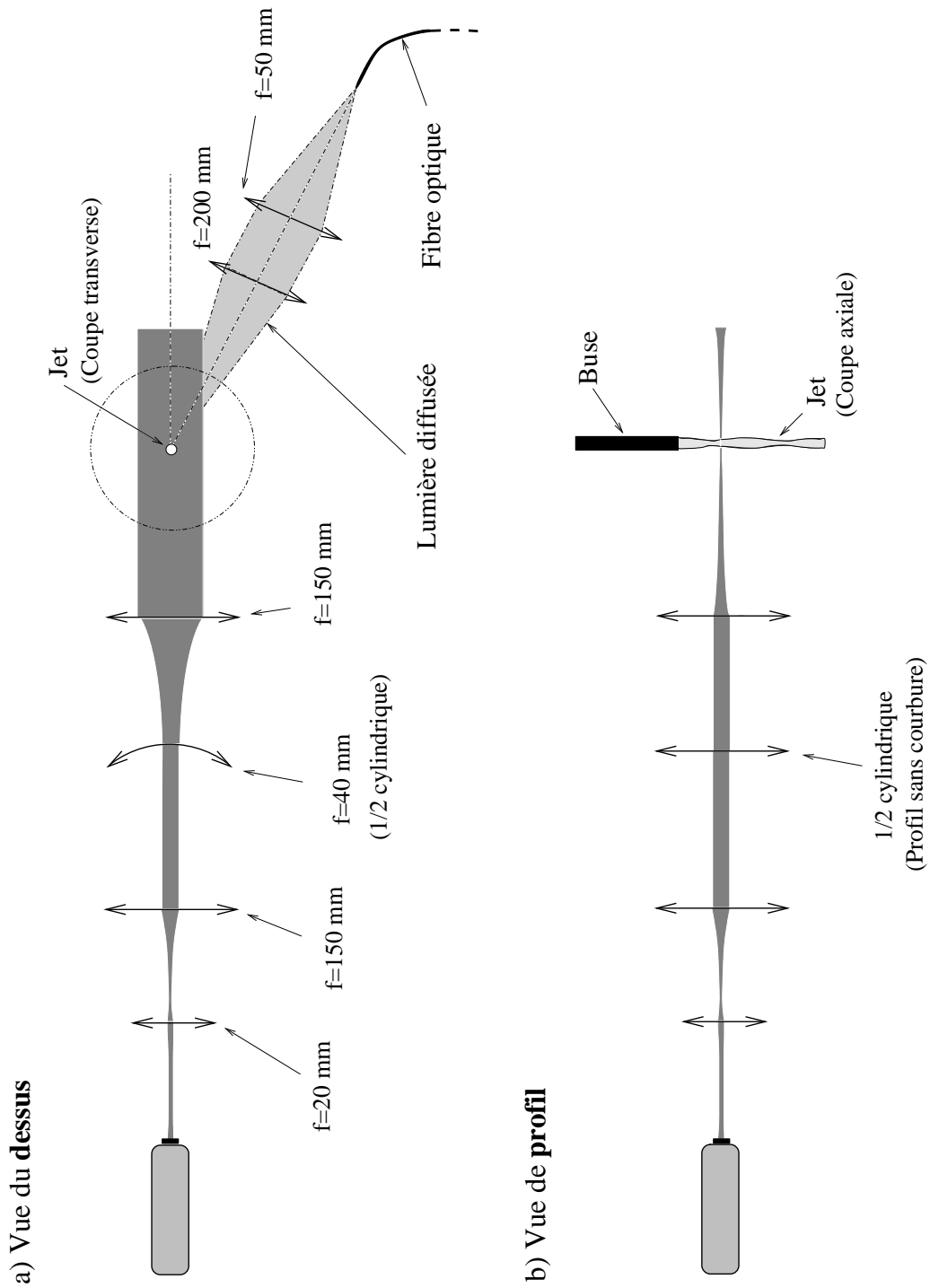


Figure 2.2: Schéma du montage optique: a) Vue du dessus; b) Vue de profil. Le diamètre du faisceau délivré par le laser est de l'ordre de 1mm (1.4mm pour le laser à Argon; 0.9mm pour le laser He-Ne). La nappe laser obtenue fait $40 \pm 10\mu\text{m}$ d'épaisseur, et environ 5 cm de largeur.

a) Mode sinueux

b) Mode variqueux



Figure 2.3: Schéma représentatif des deux types de perturbations observées sur le jet d'eau excité au moyen d'une caméra CCD: a) déplacements transverses; b) perturbations préservant la symétrie axiale du jet.

2.3 Simulations numériques

Comme nous souhaitons travailler sur le processus de l'atomisation, nous cherchons ici à savoir dans quelle mesure l'information mesurée par le dispositif décrit dans la section précédente est caractéristique de l'évolution de la forme de la surface du jet. Cette problématique peut être généralisée par la question: "Notre diagnostic optique mesure-t-il une série temporelle transcrivant la dynamique de l'atomisation du jet?". En fait, nous avons vu que la connaissance du diamètre local du jet est suffisante pour pouvoir analyser la dynamique de croissance des perturbations le long d'un écoulement gardant la symétrie cylindrique. Nous commençons donc par supposer que l'intensité lumineuse mesurée est effectivement proportionnelle au diamètre local du jet éclairé par la nappe laser.

Dans un premier temps, nous allons voir que deux modèles simples à deux dimensions ne remettent pas en cause cette hypothèse (section 2.3.1). Cependant, les résultats du traitement des signaux acquis lors de l'expérience sur le jet excité ont montré un phénomène difficilement explicable qui se traduit par l'apparition de deux périodes caractéristiques. Les reconstructions de l'espace des états ont facilement mis en évidence ce phénomène. Une fois familiarisé avec la technique de reconstruction de portraits des états [8, 9, 10], cette structure particulière devient évidente. Or, elle ne correspond pas à l'idée que nous nous faisons de la dynamique très simple de ce jet ⁵. Il en a été de même pour le cas d'un jet libre ⁶. C'est pourquoi, j'ai mis au point un code de simulation simple de la diffusion d'une nappe laser sur deux volumes représentant la forme du jet dans certaines conditions de fonctionnement. Nous verrons son fonctionnement et les premiers résultats dans la suite.

2.3.1 Modèles 2D

Les deux modèles présentés dans la suite sont complémentaires car ils décrivent chacun une facette de la technique de mesure. Nous nous limitons au cas des modes variqueux dans le cadre de ces deux modèles 2D. Le premier "regarde" le jet selon une coupe transversale (Fig. 2.4.a), le deuxième, selon une coupe longitudinale (Fig. 2.4.b).

⁵Nous en reparlerons lors de l'étude du jet excité, section 2.4.

⁶Voir aussi le cas des jets d'eau libre, section 2.5.

Coupe transversale

Le jet est ici considéré localement cylindrique (Fig. 2.4.a). Nous modélisons alors la sonde optique par une nappe laser diffusant sur un cylindre orienté perpendiculairement à la direction d'incidence. Le rayon de ce cylindre, évoluant en fonction du temps, correspond au rayon local de la section du jet vue par la nappe laser. Ce rayon est donné par la relation suivante:

$$R(t) = R_{moyen} + \delta \sin(\omega t + \phi) \quad (2.1)$$

Nous reconnaissons facilement dans cette équation, la description classique du mode "varicose" (Fig. 2.3) où le jet est considéré comme un volume de révolution dont le rayon est donné par une fonction sinusoïdale. Le déplacement du jet implique que la variation du diamètre vu par la nappe laser en fonction du temps est sinusoïdale.

Avec ces conditions, la valeur de l'intensité diffusée revient au calcul de l'intensité diffusée par une nappe laser d'épaisseur nulle sur un disque de rayon R (Fig. 2.4.a), à un coefficient de proportionalité près. Comme R est une fonction du temps, l'intensité diffusée sera aussi une fonction du temps.

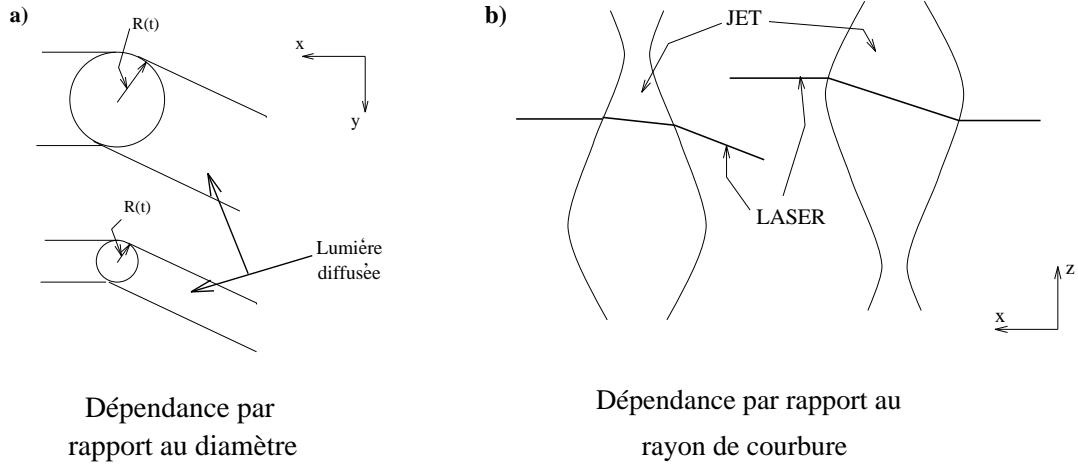


Figure 2.4: a) Coupe transversale - b) Coupe longitudinale.

Dans la littérature [11], le calcul de l'intensité diffusée par une sphère de rayon R débute par une représentation du problème en $2D$, équivalent à une coupe transversale du jet telle que nous l'envisageons ici. Le résultat du calcul de diffusion sur une sphère donne les valeurs des intensités diffusées (selon l'état de polarisation):

$$I_1(p, \tau) = \frac{\epsilon_1^2 I_0 R^2 \cos \tau \sin \tau d\tau d\phi}{r^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (2.2)$$

$$I_2(p, \tau) = \frac{\epsilon_2^2 I_0 R^2 \cos \tau \sin \tau d\tau d\phi}{r^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (2.3)$$

$$\text{où } \epsilon_i = \begin{cases} r_i & \text{pour } p = 0 \\ (1 - r_i^2)(-r_i)^{p-1} & \text{pour } p = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.4)$$

où r représente la distance à la sphère, I_0 , l'intensité du faisceau incident, p , le mode — il caractérise le nombre de réflexions du rayon considéré (Fig. 2.5) — r_i , le coefficient de réflexion pour la polarisation i ⁷. Les termes en ϕ et θ sont les termes dus à l'angle solide considéré. La dépendance en R^2 de l'intensité diffusée demeure une caractéristique de la géométrie circulaire en $2D$. Par conséquent, dans le modèle du jet qui nous intéresse ici, l'intensité diffusée est proportionnelle à R^2 .

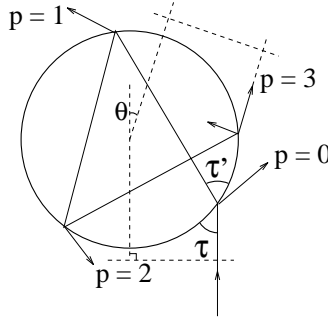


Figure 2.5: Modes de réflexion d'un rayon sur une sphère.

Puisque R est une fonction sinusoïdale du temps, l'intensité diffusée $I(t)$ est aussi une fonction du temps:

$$I(t) \propto \delta^2 \sin^2(\omega t + \phi) + R^2 + 2R\delta \sin(\omega t + \phi) \quad (2.5)$$

qui peut se développer en

$$I(t) \propto A + B \sin(\omega t + \phi) + C \cos(2\omega t + 2\phi) \quad (2.6)$$

$$\text{où } \begin{cases} A = \text{Constante} \\ B = 2R_{\text{moyen}}\delta \\ C = -\delta^2/2 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

où δ est l'amplitude de la perturbation sinusoïdale.

L'amplitude de C du terme en $2\omega t$ est négligeable comparée à l'amplitude de B du terme en ωt . Le signal garde donc la même périodicité que l'évolution de la forme de la surface $R(t)$. En fait, en prenant différentes valeurs pour δ ($\delta \ll R_{\text{moyen}}$), les séries temporelles calculées montrent un signal sinusoïdal de pulsation ω . Un exemple est donné figure 2.6 pour $\omega = 2325$, $R_{\text{moyen}} = 300 \mu\text{m}$, $\delta = 10\%R_{\text{moyen}}$, et le déphasage $\phi = 0$.

Dans ce cas, l'évolution de l'intensité est donc, en première approximation, proportionnelle au diamètre local du jet.

⁷Dans la suite: $i = 1$: Polarisation perpendiculaire; $i = 2$: Polarisation parallèle.

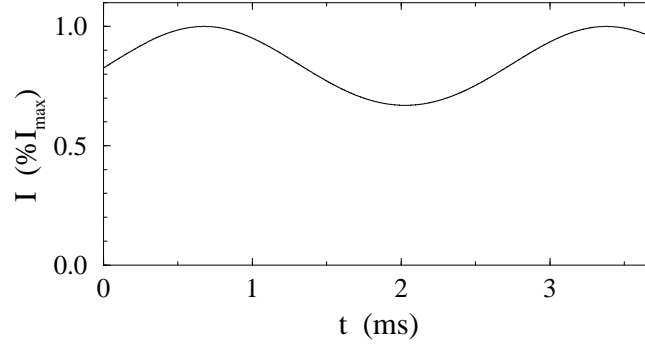


Figure 2.6: Exemple d'une série temporelle de l'intensité diffusée dans le cas d'une coupe transversale du problème de la diffusion sur un jet.

Coupe longitudinale

Ici, nous considérons une coupe selon l'axe du jet. Il en résulte une géométrie plane visualisée sur la figure 2.4.b. La nappe laser est vue de profil, dans son épaisseur. Expérimentalement, cette épaisseur est choisie de telle sorte qu'elle soit toujours très inférieure aux longueurs d'onde de déformations évoluant le long du jet. Ainsi, dans ce modèle, nous la négligeons en modélisant la nappe laser par un simple rayon lumineux.

Dans ce modèle, nous ne regardons pas les variations d'intensité en fonction du temps ($I(t)$) comme dans le cas du modèle précédent. Nous nous intéressons à la valeur de la déviation du faisceau incident en fonction de la position z_0 de la nappe laser par rapport à l'axe (Oz) du jet.

Le calcul de Cossali *et al.* [1] donne cette déviation $\Delta z = z_3 - z_0$ d'un rayon situé à une distance d de l'axe du jet (voir Fig. 2.7) pour de petites perturbations de la forme cylindrique initiale adoptée par le jet, c'est-à-dire pour des positions z_0 de la nappe laser le long de l'axe du jet pas trop proches de la région de la rupture en gouttes. Rappelons que nous ne nous intéressons ici qu'au cas des modes variqueux.

Pour rendre compte du déplacement du jet, nous posons $z_0 = Vt$ où V est évidemment la vitesse de déplacement des varicoses. Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta z &= z_3 - z_0 \\ &= 2(m_{12} - 1) r' \left(d - \frac{m_{12} - 1}{m_{12}} r \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\text{où } \begin{cases} r &= r(z_0) \\ r' &= \left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=z_3} \end{cases}$$

$r(z)$ représentant l'équation de la surface du jet dans le plan de coupe,

$$r(z) = R_{moyen} + \delta \sin(kz) \quad (2.10)$$

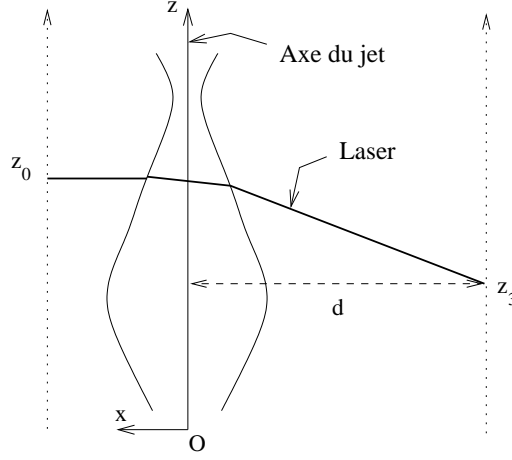


Figure 2.7: *Second modèle à 2D: définition de z_0 , z_3 , et d .*

et

$$r'(z) = \frac{dr}{dz} = \delta k \cos(kz) \quad (2.11)$$

Dans la relation (2.9), m_{12} est l'indice relatif. Comme le jet est entouré d'air d'indice égal à 1, m_{12} est aussi l'indice du liquide.

Les expressions de r et r' sont introduites dans l'équation (2.9) qui s'écrit alors comme:

$$\Delta z = 2(m_{12} - 1) \delta k \cos(kz) \left(d - \frac{(m_{12} - 1)(R_{moyen} + \delta \sin(kz))}{m_{12}} \right) \quad (2.12)$$

et, en ajoutant que $z_0 = Vt$, il vient:

$$\Delta z = A' \cos(\omega t) + B' \sin(2\omega t) \quad (2.13)$$

$$\text{où } \begin{cases} A' = 2 \left(d - \frac{m_{12} - 1}{m_{12}} R_{moyen} \right) (m_{12} - 1) \delta k \\ B' = -\frac{(m_{12} - 1)^2}{m_{12}} \delta^2 k \\ \omega = kV \end{cases}$$

Ici encore, le signal suit linéairement l'évolution du diamètre local de pulsation ω puisque $B' \ll A'$.

En donnant des valeurs conformes aux données expérimentales: $d = 20 \text{ cm}$, $m_{12} = 4/3$, $R_{moyen} = 300 \mu\text{m}$, $\delta = 10\% R_{moyen}$, $\omega = kV = 2325$ et $V = 1 \text{ m/s}$; nous calculons une série temporelle. Celle-ci ne présente qu'une variation sinusoïdale de pulsation ω (Fig. 2.8).

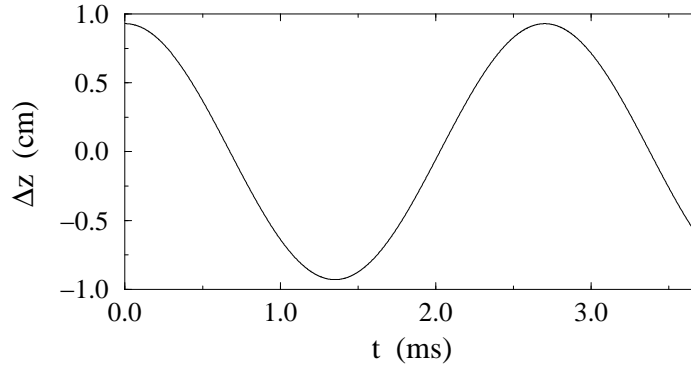


Figure 2.8: Exemple d'une série temporelle donnant la déviation d'une nappe laser lorsque le problème de la diffusion sur un jet est vu selon une coupe longitudinale.

Les deux modèles présentés convergent dans leur résultat ⁸. L'intensité évolue en fonction de la taille de la section du jet vue par la nappe laser dans le premier modèle. Dans le second, la variation d'intensité est induite par le déplacement du faisceau diffusé devant le détecteur. La description complète de la diffusion de la nappe laser sur le jet doit combiner les effets de chacun de ces deux modèles. Par conséquent un traitement complet en 3 dimensions est nécessaire pour modéliser la technique de mesure.

2.3.2 Modèle 3D

Présentation

Deux sortes de perturbations évoluent sur le jet d'eau excité (Fig. 2.3). Ces déformations typiques évoluant sur le jet sont modélisées chacune par une équation de la surface du jet. Dans tous les cas, le jet est représenté par un volume translucide d'indice m .

Dans le cas des oscillations de jet (mode sinueux), la limite de la colonne liquide est définie par:

$$x^2 + (y - A \sin(kz))^2 = R^2 \quad (2.15)$$

où (i) x , y , et z sont les coordonnées cartésiennes d'un point sur la surface, (ii) R est le rayon du jet non perturbé, (iii) A est l'amplitude de la perturbation, (iv) k est le nombre

⁸Les calculs ont aussi été menés pour une équation plus générale de la forme du jet:

$$r(t) = R_{moyen} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\omega t) + \delta'_n \sin(n\omega t) \quad (2.14)$$

où $\omega = kV$

Cette écriture en séries d'harmoniques permet de décrire un signal périodique quelconque. Il en résulte une intensité dont le comportement est indépendant du modèle choisi (transverse ou longitudinal). Ce comportement se rapproche des résultats présentés dans les sections précédentes. Il est caractérisé par des pulsations qui sont des composées de pulsations de $r(t)$. Ainsi, les pulsations $\{(n - m)\omega; (n + m)\omega \mid (\forall n, m)\}$ sont présentes dans l'écriture du comportement de $I(t)$ dans les modèles 2D. Cependant, une fois de plus ces termes sont négligeables lorsqu'une application numérique est réalisée. Nous retrouvons encore un comportement identique à celui de $r(t)$.

d'onde du déplacement transversal. Cette équation est une description analytique de cercles de rayon R dont le centre oscille le long de l'axe des y en fonction de la position le long de l'axe des z . La forme résultante est représenté sur la figure 2.9.

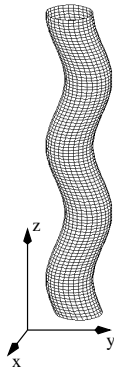


Figure 2.9: Surface du jet construite à partir de l'équation (2.15), avec $A = 40\% R$

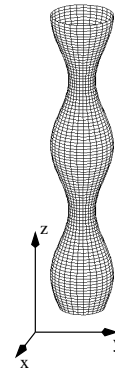


Figure 2.10: Surface du jet construite à partir de l'équation (2.16), avec $\delta = 40\% R_{moyen}$

Dans le cas de perturbations axisymétriques (mode variqueux), l'équation de la forme du jet est

$$R(z) = R_{moyen} + \delta \sin(kz) \quad (2.16)$$

où (i) $R(z)$ est le rayon local du jet à une altitude z , (ii) R_{moyen} , le rayon moyen du jet, (iii) δ , l'amplitude de la perturbation, et (iv) k , le nombre d'onde de la varicose. Dans cette équation, la position du centre des cercles successifs matérialisant la surface du jet est constante dans le plan (x, y) . Par contre, leur diamètre évolue, dépendant de l'altitude z . Il en résulte une forme donnée sur la figure 2.10.

Dans chaque cas, le jet est immobile. Par conséquent le déplacement relatif du jet par rapport à la nappe laser est simulé par le déplacement de la nappe laser à la vitesse V , vitesse réelle d'écoulement du jet, devant le volume liquide immobile.

Un réseau de rayons matérialise la nappe laser (**Module 1**⁹). Ils sont envoyés successivement sur la surface d'entrée du jet. Pour des angles de diffusion de 30° (et $m_{12} =$ indice de l'eau), la contribution des réflexions internes et des réflexions sur la surface d'entrée est négligée. Le rapport de leur intensité sur l'intensité du rayon parcourant le trajet ne comportant que deux réfractions est très faible aux angles environnant 30° ¹⁰. Donc, pour chaque rayon, nous calculons la première réfraction correspondant à l'entrée dans le jet; puis la deuxième, pour sortir du jet. Les intensités sont calculées en parallèle en fonction de la polarisation de l'onde incidente.

Initialement, la crainte d'éventuelles erreurs introduites par le bruit numérique nous a incité à mener les différents calculs sur un logiciel de calcul symbolique. En effet, cette méthode permet de réduire le nombre d'opérations effectuées par l'ordinateur en simplifiant

⁹Un module représente une des parties de l'algorithme détaillant la démarche adoptée pour réaliser les simulations. L'algorithme complet est présenté sur la figure 2.12.

¹⁰Voir H.C. van de Hulst, [11], p. 232.

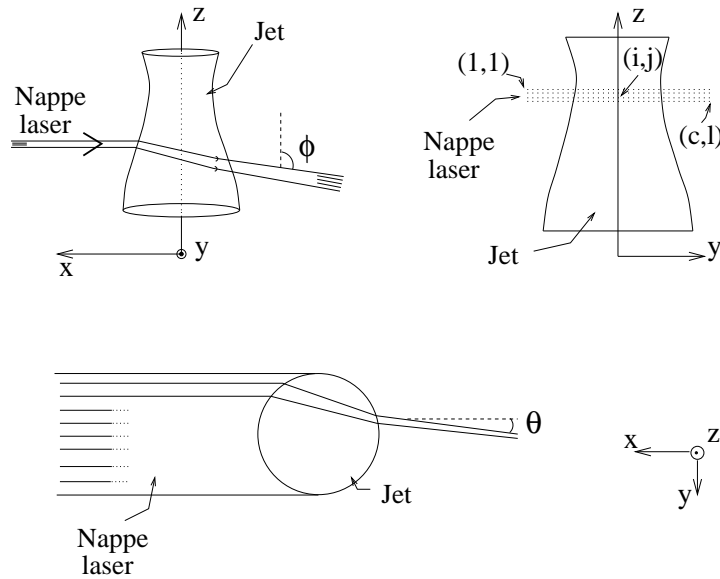


Figure 2.11: Schéma du modèle 3D: définition des axes et des angles de sortie des rayons lumineux.

au maximum les expressions finales introduites dans le code de calcul. Cependant, cette précaution s'est avérée inutile puisqu'une programmation directe nous a permis par la suite d'obtenir les mêmes résultats. Quoiqu'il en soit, l'algorithme suivi pour programmer ces simulations reste, au sens strict, identique dans les deux cas. Par souci pédagogique, je garde ici la démarche utilisant le calcul symbolique et permettant de suivre aussi loin que possible la totalité des calculs.

L'algorithme suivi pour la programmation en langage C ¹¹ est présenté figure 2.12. Les différents "modules" sont numérotés. Dans la suite, le rôle des différents modules est détaillé dans le cas des modes variqueux.

Les conventions prises sont celles données sur le schéma 2.11.

Première intersection (Module 2)

Le point d'intersection du rayon incident à l'entrée dans le jet est donné par son emplacement $(i, j) = (x, z)$ sur le maillage, et l'ordonnée y , donnée par l'équation de la surface en (x, z) .

Normale au point d'intersection (Modules 3 et 7)

Par convention, les normales sont orientées vers l'intérieur du jet. Les coordonnées cartésiennes (x_I, y_I, z_I) du point d'intersection étant données, les coordonnées sphériques (r_I, θ_I, ϕ_I)

¹¹Langage C, norme ANSI; le programme est donné en annexe.

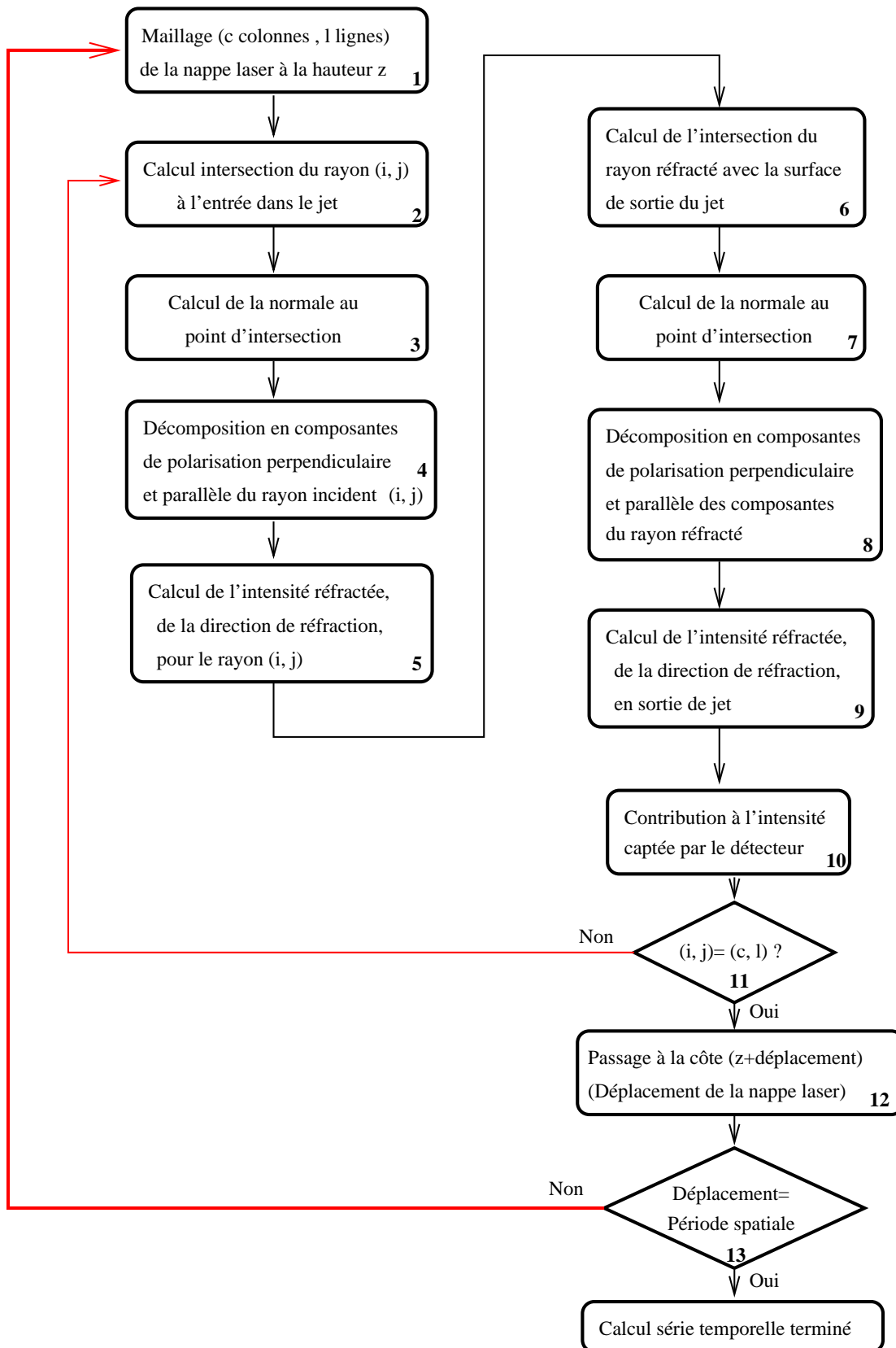


Figure 2.12: Organigramme simplifié du code de simulation 3D.

sont calculées. Les coordonnées d'une normale en ce point sont:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_I) \\ -\sin(\theta_I) \\ \delta k \cos(kz_I) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Toute l'information sur la surface du jet se reporte dans le calcul de $Z = \frac{dr(z)}{dz}$, où $r(z)$ est l'équation de la-dite surface. En normant par rapport à $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, les coordonnées deviennent

$$\text{en coordonnées cartésiennes,} \quad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X/\rho \\ Y/\rho \\ Z/\rho \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\text{en coordonnées sphériques,} \quad \begin{pmatrix} R \\ \Theta \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi - \theta \\ \text{acos}(Z/\rho) \end{pmatrix}$$

Etude de la polarisation du faisceau (Module 4)

Un vecteur polarisation $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ est défini. Il permet le calcul de l'intensité diffusée par un rayon. Pour une nappe laser d'intensité uniforme, ce vecteur sera normé. En accord avec notre expérience et avec les notations utilisées, nous aurons $\mathbf{P} = (0, 0, 1)$. La nappe laser est mieux représentée en tenant compte d'une distribution d'intensité gaussienne selon l'axe z . Les composantes P_x et P_y du vecteur polarisation seront toujours nulles; P_z sera une fonction gaussienne de z ajustée à l'épaisseur de la nappe laser ¹².

Lors de la première réfraction, le plan d'incidence permet une décomposition. Le vecteur polarisation \mathbf{P} sera scindé en un vecteur \mathbf{Pn} et un vecteur \mathbf{Pp} . Ce sont respectivement les composantes de polarisation (**n**)ormale et (**p**)arallèle de l'intensité incidente ayant chacune leur coefficient de transmission respectif τ_1 et τ_2 . Ces coefficients sont calculés ci-après.

Réfraction (Module 5)

La direction de réfraction est calculée en amenant le plan d'incidence parallèlement au plan (x, y) en effectuant une rotation d'un angle A autour de l'axe des x . Le vecteur donnant la direction de propagation du rayon incident est noté \mathbf{Inc} ($\mathbf{Inc} = (-1, 0, 0)$). Il est invariant par cette rotation. Avant rotation, nous notons $\mathbf{Norm}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ la normale à l'interface. En prenant $A = \text{atan}(Z_1/Y_1)$, \mathbf{Norm}_1 devient $\mathbf{Norm}'_1 = (X_1, Y'_1, 0)$ où $Y'_1 = \sqrt{Y_1^2 + Z_1^2}$. A partir des lois de Snell-Descartes, le calcul de l'angle d'incidence i , de l'angle de réfraction i' et des coefficients de transmission τ_1 et τ_2 devient aisé. La direction de réfraction, donnée par $\mathbf{R}_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$, en est déduite. Cependant les expressions trouvées deviennent déjà assez complexes. La connaissance de ces expressions étant inutile à la compréhension, la liste des commandes exécutées sous le logiciel de calcul symbolique

¹²Largeur à 13.5% de l'intensité maximale.

MAPLE ¹³ est donnée en annexe B.1 afin de présenter la façon dont les calculs ont été menés et de laisser au lecteur la possibilité de les reproduire.

Le vecteur polarisation \mathbf{P} subit simultanément la rotation. Alors les projections nécessaires pour obtenir les composantes normale \mathbf{Pn} et parallèle \mathbf{Pp} deviennent triviales.

Par rotation inverse, nous obtenons finalement la direction de réfraction \mathbf{R}_1 exprimée dans le repère initial (dans lequel la surface du jet est décrite par: $R(z) = R_{moyen} + \delta \sin(kz + \phi)$). Et l'intensité résultante est répartie dans les vecteurs polarisation $\mathbf{Pn}' = \tau_1 \mathbf{Pn}$ et $\mathbf{Pp}' = \tau_2 \mathbf{Pp}$.

Le calcul des contributions à l'intensité résultante est effectué après la deuxième réfraction.

Deuxième intersection (Module 6)

La première réfraction étant réalisée, il faut maintenant trouver le point où a lieu la seconde réfraction. C'est le premier point d'intersection entre le rayon réfracté et la surface du jet en suivant le sens de propagation du rayon lumineux.

Le rayon réfracté est défini à l'aide du premier point d'intersection (section 2.3.2) de coordonnées (x_I, y_I, z_I) et du vecteur propagation $\mathbf{R}_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$. Une représentation paramétrique de la droite D correspondant à la direction du rayon réfracté dans le jet est:

$$\begin{cases} x &= x_I + t x'_1 \\ y &= y_I + t y'_1 \\ z &= z_I + t z'_1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

La géométrie du système est axisymétrique; donc les équations seront écrites en coordonnées cylindriques pour simplifier la résolution du système d'équations donnant le point d'intersection. L'équation de la surface du jet est déjà donnée dans ce système de coordonnées. La droite peut être décrite en coordonnées cylindriques par une série de paramètres définis sur le schéma suivant (Fig. 2.3.2).

Les paramètres sont écrits en fonction des données.

x_0 et y_0 sont les coordonnées du point O de la droite D , point pour lequel la cote z est nulle.

$$\begin{cases} x_0 &= X - \frac{Zx'_1}{z'_1} \\ y_0 &= Y - \frac{Zy'_1}{z'_1} \end{cases} \quad (2.20)$$

x_{min} et y_{min} sont les coordonnées du point M de la droite D' pour lequel la distance à l'origine du repère est minimale. Le logiciel de calcul MAPLE nous permet de résoudre l'équation $\frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = 0$ dont les solutions sont x_{min} et y_{min} :

$$\begin{cases} x_{min} &= \frac{y'_1(Xy'_1 - x'_1Y)}{x_1'^2 + y_1'^2} \\ y_{min} &= \frac{x'_1(x'_1Y - Xy'_1)}{x_1'^2 + y_1'^2} \end{cases} \quad (2.21)$$

¹³Maple version 5, Waterloo Maple Software; 1981-1990.

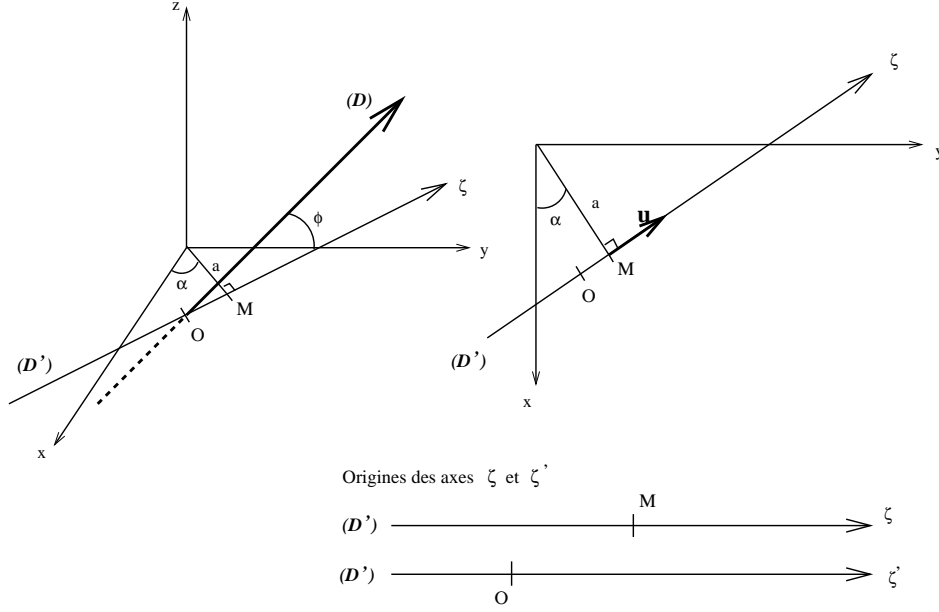


Figure 2.13: (D) est la direction de propagation du rayon considéré; (D') est sa projection sur le plan (x, y) ; ϕ est l'angle entre ces deux droites; \mathbf{u} est le vecteur unitaire dirigé selon (D') ; a est la distance de (D') à l'origine du repère; α est l'angle que fait la direction de (D') avec l'axe (y) .

a et α sont donnés par

$$a = \sqrt{x_{min}^2 + y_{min}^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y_{min}}{x_{min}}$$

Ce qui se simplifie en donnant

$$a = \frac{|Xy'_1 - x'_1Y|}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}}$$

$$\alpha = -\text{atan} \left(\frac{x'_1}{y'_1} \right) \quad (2.22)$$

Et $\tan \phi$ s'exprime facilement en utilisant les coordonnées du vecteur propagation $\mathbf{R}_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$,

$$\tan \phi = \frac{z'_1}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}} \quad (2.23)$$

Les équations suivantes décrivent alors la droite (D) dans le système de coordonnées cylindriques:

$$z = \zeta' \tan \phi \quad (2.24)$$

$$\text{où } \begin{cases} \zeta' &= \zeta - \mathbf{OM} \cdot \mathbf{u} \\ \zeta &= \sqrt{\rho^2 - a^2} \end{cases} \quad (2.25)$$

où la droite (D') est considérée comme un axe de coordonnée ζ dans le plan (x, y) ; et R est la distance d'un point de la droite (D) à l'axe (z).

En développant et en réduisant l'écriture de z , et en ajoutant l'équation de la surface du jet, nous obtenons le système d'équations en coordonnées cylindriques dont les solutions sont les points d'intersection de la droite (D') avec la surface du jet.

$$\begin{cases} z &= \left[\sqrt{R^2 - a^2} + (x_0 - x_{min}) \sin \alpha - (y_0 - y_{min}) \cos \alpha \right] \tan \phi \\ R(z) &= R_{moyen} + \delta \sin(kz) \end{cases} \quad (2.26)$$

Les inconnues sont z et R . On commence à résoudre ce système en cherchant une équation en z . Nous substituons pour cela le terme R de la première équation du système (2.26) dans la deuxième.

$$\left[\sqrt{(R_{moyen} + \delta \sin(kz))^2 - a^2} + (x_0 - x_{min}) \sin \alpha - (y_0 - y_{min}) \cos \alpha \right] \tan \phi - z = 0 \quad (2.27)$$

Cette équation est transcendante comme la présence du terme en $\sin(kz)$ le laissait prévoir. La résolution est alors effectuée au moyen d'un algorithme de recherche de racines¹⁴. La recherche est effectuée en donnant successivement à l'algorithme un interval de travail évoluant dans le sens de propagation du rayon lumineux, jusqu'à l'obtention d'une solution. L'intersection obtenue correspond au premier point de la surface rencontrée par le rayon lumineux. C'est ce point d'intersection qui satisfait au problème de l'optique géométrique.

La surface du jet se trouve à l'intérieur du volume défini par les deux cylindres d'équations $R(z) = R_{moyen} \pm \delta$. Le calcul analytique des intersections du rayon lumineux avec les deux cylindres frontière ainsi définis permet d'obtenir un intervalle sur l'axe z à l'intérieur duquel se situent toutes les intersections du rayon lumineux avec la surface du jet. Nous prenons la première équation du système (2.26) et nous écrivons l'équation de la surface des cylindres frontière:

$$\begin{cases} z &= \left[\sqrt{R^2 - a^2} + (x_0 - x_{min}) \sin \alpha - (y_0 - y_{min}) \cos \alpha \right] \tan \phi \\ R(z) &= R_{moyen} \pm \delta \end{cases} \quad (2.28)$$

Ce qui se résout par substitution avec la même méthode que précédemment. Et la solution en z s'écrit:

$$z = \left[\sqrt{(R_{moyen} \pm \delta)^2 - a^2} + (x_0 - x_{min}) \sin \alpha - (y_0 - y_{min}) \cos \alpha \right] \tan \phi \quad (2.29)$$

Notons z_1 la solution de l'équation précédente pour le petit cylindre ($R(z) = R_{moyen} - \delta$), et z_2 la solution de cette équation pour le grand cylindre.

¹⁴routine [rtsafe] du Numerical Recipes in C [12].

Le quart de la longueur d'onde correspondant au nombre d'onde k de la perturbation sinusoïdale (c'est à dire $\frac{2\pi}{4k}$) correspond à l'intervalle maximal au delà duquel l'équation transcendante (2.29) a un ensemble de solutions non nécessairement uniques.

Par conséquent, si $z_2 - z_1 < \frac{2\pi}{4k}$, l'intervalle $[z_1, z_2]$ contient une et une seule solution, la solution recherchée. Donc nous le choisisons comme l'unique interval sur lequel l'algorithme de recherche de racines travaillera. Sinon, l'intervalle $[z_1, z_2]$ sera découpé en intervalles de taille $\frac{2\pi}{4k}$. Ces intervalles seront soumis successivement à l'algorithme de recherche de racines en commençant par l'intervalle le plus proche de l'axe du jet: $[z_1, z_1 + \frac{2\pi}{4k}]$. La première racine trouvée correspondra à la solution recherchée.

Cette méthode permet d'obtenir la cote z'_I du point d'intersection entre le rayon lumineux et la surface du jet. Les coordonnées x'_I et y'_I sont déduites du système (2.19), représentation paramétrique de la droite D .

$$\begin{cases} x'_I = X + \frac{z'_I - Z}{z'_1} x'_1 \\ y'_I = Y + \frac{z'_I - Z}{z'_1} y'_1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Les coordonnées du point de la deuxième intersection sont trouvées. Le calcul de la normale en ce point $\mathbf{Norm}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ (**Module 7**) est identique au calcul effectué au premier point d'intersection (cf. 2.3.2).

Etude de la polarisation du faisceau (**Module 8**)

Chacune des deux composantes \mathbf{Pn}' et \mathbf{Pp}' se décompose à nouveau lors de la deuxième réfraction en sortie de jet, comme lors de la première. Donc quatre vecteurs polarisation décomposent l'amplitude du signal électromagnétique: $\mathbf{Pnn}, \mathbf{Pnp}, \mathbf{Ppn}, \mathbf{Ppp}$. Les composantes normales $\mathbf{Pnn}, \mathbf{Ppn}$ et parallèles $\mathbf{Pnp}, \mathbf{Ppp}$ ont respectivement τ'_1 et τ'_2 comme coefficients de transmission. Ces coefficients sont calculés lors de la deuxième réfraction (cf. Module suivant).

Deuxième réfraction (**Module 9**)

Les expressions obtenues dans les calculs suivants sont trop lourdes pour être détaillées dans la suite. Donc, nous nous contenterons de présenter précisément la démarche suivie. Les instructions permettant le calcul complet avec le logiciel de calcul symbolique MAPLE sont fournies en annexe B.2.

La nouvelle direction de réfraction est calculée à nouveau en ramenant le plan (x, y) dans le plan d'incidence par une série de rotations. Le plan d'incidence est défini par la normale \mathbf{Norm}_2 au point d'intersection et par la direction de propagation donnée par \mathbf{R}_1 .

Les coordonnées sphériques de \mathbf{Norm}_2 sont déduites des coordonnées cartésiennes

(X_2, Y_2, Z_2) :

$$\begin{cases} \rho_2 &= 1 \\ \Theta_2 &= \text{atan}\left(\frac{Y_2}{X_2}\right) \\ \Phi_2 &= \text{acos}\left(\frac{Z_2}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}\right) \end{cases} \quad (2.31)$$

Les rotations se décomposent de la manière suivante:

- La première rotation d'axe (z) et d'angle θ_2 amène la normale **Norm₂** dans le plan (x, z).
- La deuxième rotation d'axe (y) et d'angle ϕ_2 amène **Norm₂** sur l'axe (x).
- La troisième rotation d'axe (x) et d'angle $\alpha = \text{atan}\left(\frac{R_{1z}}{R_{1y}}\right)$ amène **R₁** dans le plan (x, y).

Ici, c'est la normale **Norm₂** qui est amenée sur l'axe x .

La direction de réfraction **R₂** est aisément calculée comme lors de la première réfraction, les coefficients de transmission τ'_1 et τ'_2 aussi.

Les vecteurs **Pn'** et **Pp'** subissent ces rotations. Ceci permet la décomposition donnant **Pnn**, **Pnp**, **Ppn** et **Ppp**. Et chaque vecteur polarisation se transmet selon la loi suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{Pnn}' &= \tau'_1 \mathbf{Pnn} \\ \mathbf{Pnp}' &= \tau'_2 \mathbf{Pnp} \\ \mathbf{Ppn}' &= \tau'_1 \mathbf{Ppn} \\ \mathbf{Ppp}' &= \tau'_2 \mathbf{Ppp} \end{cases} \quad (2.32)$$

Chacune des amplitudes **Pnn'**, **Pnp'**, **Ppn'**, **Ppp'** contribue à l'intensité résultante I_{Res} . Le calcul consiste à faire la somme des carrés des amplitudes:

$$I_{Res} = \mathbf{Pnn}'^2 + \mathbf{Pnp}'^2 + \mathbf{Ppn}'^2 + \mathbf{Ppp}'^2 \quad (2.33)$$

Cependant l'expression de ces vecteurs est simple dans le nouveau repère. Par définition, dans ce nouveau repère, les composantes Pnn'_x , Pnn'_y , Pnp'_z , Ppn'_x , Ppn'_y , et Ppp'_z sont nulles. L'intensité résultante peut donc s'écrire:

$$I_{Res} = Pnn'_z{}^2 + Pnp'_x{}^2 + Pnp'_y{}^2 + Ppn'_z{}^2 + Ppp'_x{}^2 + Ppp'_y{}^2 \quad (2.34)$$

L'intensité résultante est calculée. La direction de réfraction doit être exprimée dans le repère initial. Donc le vecteur **R₂** subira les rotations inverses de celles décrites précédemment. La direction donnée par ce vecteur correspondra à la direction de diffusion du rayon (i, j).

Module 10

Le choix de l'angle solide dans lequel l'intensité diffusée est comptabilisée permet de définir la surface de détection. Le vecteur **R₂** donnant la direction de diffusion est exprimé en coordonnées sphériques **R₂** = (1, θ_2 , ϕ_2). Un simple test permet alors de savoir si le rayon (i, j) de la nappe laser considérée va contribuer à l'intensité diffusée par cette nappe.

Fin de l'algorithme

Nous décrivons successivement chaque rayon de chaque nappe se déplaçant à chaque fois d'une certaine quantité. A chaque déplacement, le code donne une nouvelle valeur d'intensité diffusée, pour une position donnée de la nappe laser par rapport au jet.

Le résultat est une série de valeurs assimilable à une série temporelle.

2.3.3 Validation du modèle 3D

La validation est une étape nécessaire qui permet d'accorder une certaine confiance dans les résultats d'un code de simulation. Le code est lancé dans une situation déjà étudiée dans la littérature. Si les résultats concordent, nous supposons que tous les résultats obtenus par ce code seront valides. Nous allons nous baser sur les résultats de H. C. van de Hulst [11].

Avant de réaliser des comparaisons, nous rappelons que deux types d'information évoluent dans notre code de simulation:

- la direction des rayons lumineux,
- leur intensité.

Chacune est traitée par une partie spécifique du code. Or, celui-ci doit être validé dans sa globalité. Les valeurs de ces deux grandeurs devront donc être vérifiées. Nous commencerons par les directions de diffusions.

Angle maximal de diffusion

H. C. van de Hulst présente un calcul de diffusion sur une sphère. Il débute par une étude de la diffusion dans un espace à deux dimensions d'un faisceau laser sur un cercle ¹⁵. Par extension, cette étude préliminaire nous donne l'angle maximum de diffusion d'une nappe laser par un jet liquide cylindrique d'indice 4/3, indice de l'eau. En reprenant les mêmes notations que l'auteur (Fig. 2.5), la déviation totale θ' par rapport à la direction incidente s'écrit:

$$\theta' = 2\tau - 2p\tau' \quad (2.35)$$

$$\text{avec } \theta' = 2\pi k + q\theta$$

où k est un entier, et $q = \pm 1$.

Les extrema sont obtenus en résolvant l'équation $\frac{d\theta'}{d\tau} = 0$. En exprimant τ' en fonction de τ dans l'expression de θ' , et en utilisant la loi de Snell-Descartes sur la réfraction, l'équation (2.35) amène à une condition sur τ :

$$\sin^2(\tau) = \frac{m^2 - 1}{p^2 - 1} \quad (2.36)$$

¹⁵Voir [11], pages 200-204.

où $m = 4/3$ est l'indice de l'eau, et p est le numéro donnant le mode de diffusion. Rappelons que pour des raisons pratiques (cf. section 2.3.2), le code ne simule que le mode de diffusion $p = 1$ correspondant au mode réflexion/réfraction.

Pour $p = 1$, le calcul donne $\theta = 82.8^\circ$ comme angle maximal de diffusion. Cette situation est introduite dans le code. Notamment, l'amplitude de la perturbation sinusoïdale est très petite devant le rayon moyen ce qui permet de considérer le jet comme cylindrique. Alors, l'angle maximal de diffusion est donné par diffusion du faisceau incident pénétrant dans le jet sous incidence rasante: c'est à dire pour $\tau = 0^\circ$, $\theta = 90^\circ$. Dans ce cas, l'angle de diffusion est $\theta = 82.8^\circ$. Nous retrouvons exactement la valeur prévue.

Intensité diffusée H. C. van de Hulst généralise ensuite son calcul de diffusion au cas d'une sphère. Ceci lui permet de calculer le profil d'intensité en fonction de l'angle de diffusion ¹⁶ pour une goutte d'eau. Pour comparaison, nous supposons que le profil d'intensité produit par une colonne liquide fortement perturbée par des varicosités rejoint celui d'une sphère; à cause de la présence, dans les deux cas, de forts rayons de courbure de même nature. Sur la figure 2.14, nous obtenons un accord convaincant entre ces profils d'intensité.

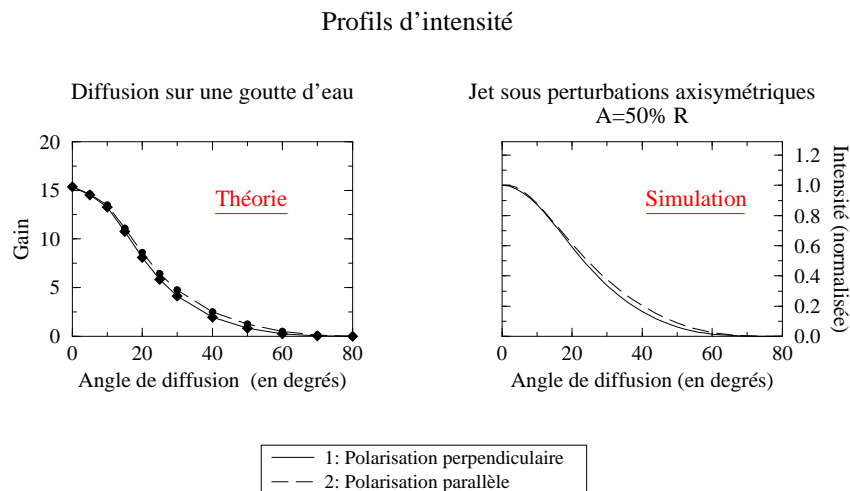


Figure 2.14: *Comparaison entre les profils d'intensité donnés par van de Hulst pour une goutte d'eau, et ceux trouvés grâce au modèle numérique présenté dans ce mémoire pour un jet soumis à de fortes perturbations axisymétriques.*

2.3.4 Résultats des simulations

Rappelons d'abord que deux types de perturbation ont été modélisées: les perturbations axisymétriques (varicosités) et les oscillations de jet (mode sinueux). Ces perturbations (figs 2.9 et 2.10) représentent la quasi-totalité des perturbations que nous serons amenés à rencontrer dans ce mémoire.

¹⁶Voir [11], pages 230 et 232.

Oscillations de jet

Pour chaque série temporelle, un point est calculé pour une position donnée du jet devant la nappe laser. Le jet se déplace successivement sur une distance totale égale à une longueur d'onde de la perturbation. Ainsi, chaque série temporelle est calculée sur une durée égale à la période de la perturbation.

Dans l'expérience, le dispositif de détection est placé suffisamment loin de l'axe du jet pour être bien délimité par un angle solide. Dans un premier temps, nous allons considérer un détecteur fictif de dimension finie égale à celle du détecteur réel, dans la direction radiale, et de dimension infinie selon la direction azimutale (Fig. 2.15).

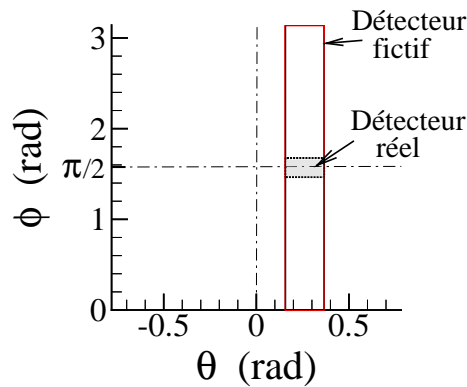


Figure 2.15: Schéma représentant l'angle solide de détection dans le cas du détecteur fictif et du modèle du détecteur réel. Les angles θ et ϕ sont définis sur la figure 2.11. Tous les rayons diffusés vers l'avant pour θ compris entre 0.1569 et 0.3667 rad. (limites en θ du détecteur réel) sont captés par le détecteur fictif.

Avec cette configuration, nous avons représenté six séries sur la figure 2.16 pour différentes valeurs de l'amplitude A du déplacement transversal, comprises entre 5% et 50% du rayon moyen du jet. Nous pouvons d'abord remarquer que, globalement, les variations d'intensité ont une faible amplitude. Nous observons aussi que cette amplitude est proportionnelle à l'amplitude des déplacements transversaux subis par le jet. De plus, la période des séries temporelles est égale à la moitié de celle de la perturbation.

Pour comprendre ces résultats, il faut d'abord se rappeler que l'écriture de la forme du jet par l'équation (2.15) impose un diamètre local du jet constant, indépendant de la position le long de l'axe du jet. Donc, la taille de la section du jet illuminée par la nappe laser est constante. Par conséquent, les variations d'intensité induites par le déplacement du jet devant la nappe laser doivent être l'effet des déviations de la trajectoire des rayons lumineux par le jet.

Sur la figure 2.17, nous avons tracé les champs de lumière diffusée pour des valeurs successives de la position du jet devant la nappe laser. Le jet se déplace ainsi sur une distance égale à la longueur d'onde de la perturbation, c'est à dire sur une distance équivalente à celle qui est nécessaire pour le calcul des séries temporelles. Sur chacun des champs diffusés, l'angle solide du détecteur réel est délimité par un rectangle. Nous constatons alors que

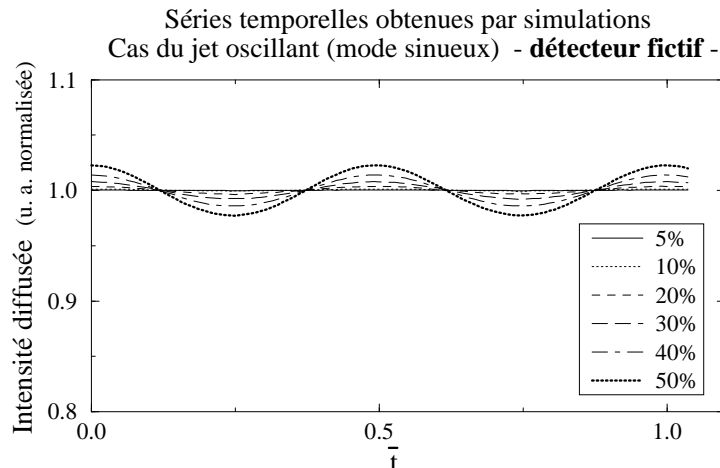


Figure 2.16: **Détecteur fictif**: évolutions simulées de l'intensité dans le cas des oscillations de jet. L'amplitude de la perturbation varie de 5% à 50% du rayon moyen du jet. T est la période de la perturbation sinusoïdale avec laquelle nous construisons le temps adimensionné: $\bar{t} = t/T$. En ordonnée, figure l'intensité diffusée en unité arbitraire normalisée.

la lumière diffusée a toujours la forme d'une nappe. Et celle-ci oscille devant le détecteur (fictif ou réel) au cours du déplacement du jet. Ces oscillations de la nappe diffusée sont bien entendu induites par les oscillations du jet. Or, plus la nappe diffusée est inclinée, plus l'ensemble de détection intercepte une grande largeur de cette nappe, et plus l'intensité détectée augmente. Donc, les oscillations de la nappe diffusée sont à l'origine des variations d'intensité. Et nous pouvons facilement comprendre que l'amplitude du signal ainsi généré est nécessairement faible. Nous pouvons aussi remarquer que les inclinaisons du champ diffusé en $Z = Z_0$ et $Z = Z_0 + V \frac{T}{2}$ sont symétriques. Or, le détecteur intègre toute l'intensité de la lumière reçue et ne distingue pas ces deux positions. Le signal sera donc identique sur une demi-période ou sur la suivante. Ainsi, la période du signal sera deux fois plus petite que celle des oscillations du jet. Ce doublement de fréquence est observable expérimentalement et nous en reparlerons dans le cas du jet soumis à une excitation transversale (section 2.4).

Au dessus d'une amplitude de perturbations de 20%, le champ diffusé sort de l'angle solide du détecteur réel; cela se traduisant par l'apparition de troncatures sur les séries temporelles (voir Fig. 2.18).

Expérimentalement, dans la partie où seules les oscillations de jet évoluent, nous n'avons pu observer ces troncatures que pour des valeurs élevées de l'amplitude de l'excitation situées en dehors de la plage de fonctionnement utilisée pour l'étude d'un jet excité. Dans ce mémoire, nous n'observerons donc jamais de telles troncatures pour des oscillations de jet.

Perturbations axisymétriques

Huit séries temporelles sont calculées pour un jet perturbé par des varicoses (équation 2.16) sur une durée encore égale à la période de la perturbation (voir Fig. 2.19). La valeur

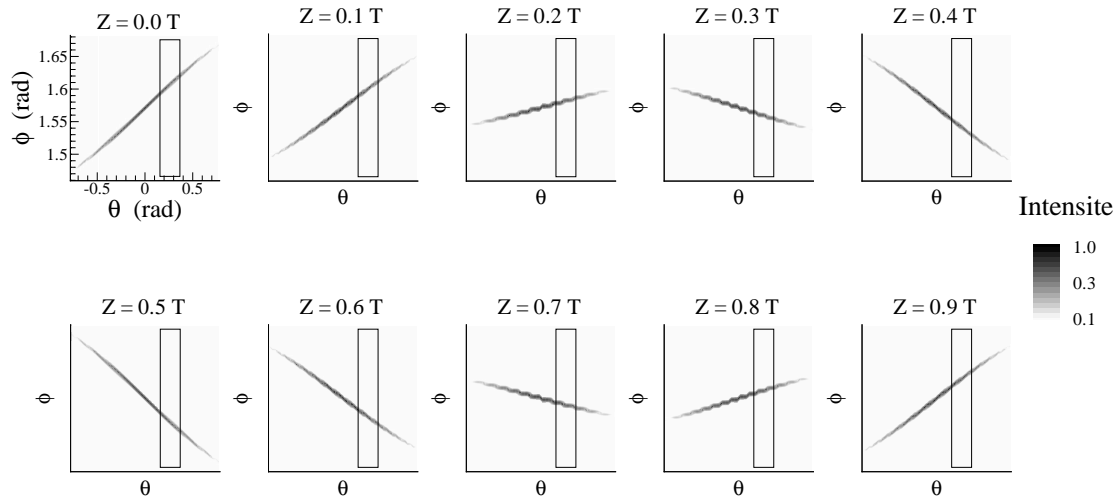


Figure 2.17: *Champs diffusés pour des valeurs successives de z , position de la nappe laser devant le jet. z est ramené à une fraction de $T = TV$ (aux dimensions près), puisque V , la vitesse débitante, est égale à 1 m/s. L'amplitude des oscillations de jet est égale à $A = 20\% R$. Sur chaque graphe, le rectangle représente le domaine de détection (détecteur réel). θ et ϕ sont les angles radial et azimuthal définis sur la figure 2.11.*

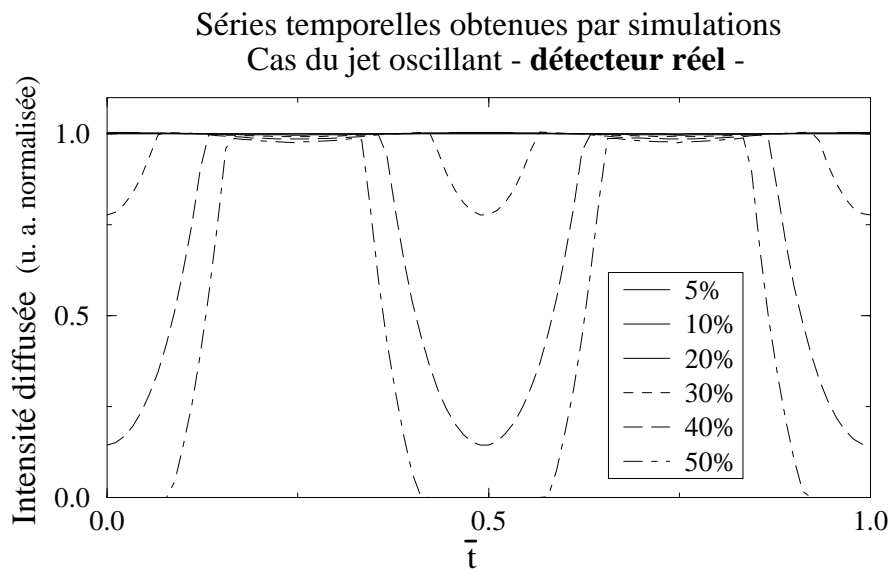


Figure 2.18: **Détecteur réel:** *apparition des troncatures sur les séries temporelles pour des amplitudes d'oscillations du jet supérieures à 20%.*

de l'amplitude de la perturbation varie de 2% à 40% du rayon moyen du jet. Quand cette amplitude croît de 2 à 15% du rayon moyen, l'amplitude du signal calculé augmente dans la même proportion. Chaque série temporelle représente alors une sinusoïde de période égale à celle de la perturbation axisymétrique. En outre, le signal évolue en phase avec la valeur du diamètre local. Par conséquent, nous pouvons dire que, pour cette gamme d'amplitudes de perturbation, l'intensité détectée est proportionnelle au diamètre local du jet vu par la nappe laser. Ensuite, pour des amplitudes supérieures ou égales à 20%, l'évolution sinusoïdale est périodiquement tronquée. Cet effet sera donc signé par la présence, dans le spectre de puissances, d'une harmonique de fréquence double de celle de la perturbation.

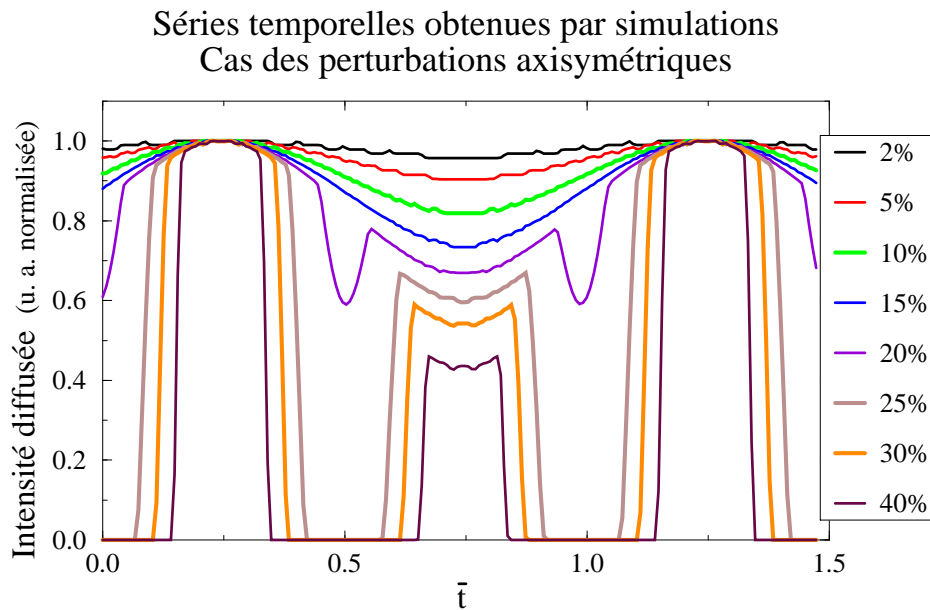


Figure 2.19: Pour des amplitudes de perturbations supérieures à $\delta = 15\% R_{moyen}$, les séries sont tronquées deux fois par période.

En dehors du problème de la troncature, nous pouvons supposer que l'intensité captée est directement reliée à la taille de la partie de la nappe laser interceptée par le volume liquide. Cette taille représente aussi la largeur de la section transverse du jet, et donc la valeur du diamètre local du jet. Il n'est donc pas étonnant de constater que l'évolution de l'intensité détectée soit, troncatures mises à part, proportionnelle au diamètre du jet.

En ce qui concerne l'apparition des troncatures sur le signal sinusoïdal, son origine s'explique encore par les effets des courbures locales de la surface du jet. Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.20, la nappe laser est déviée presque uniformément vers les ϕ positifs ou négatifs. Sur cette figure, l'amplitude de la perturbation est de 10%. La déviation n'est pas suffisante pour faire sortir la nappe diffusée de l'angle solide de détection (détecteur réel). Au delà de 15%, la lumière diffusée dépasse périodiquement les limites du détecteur induisant deux fois par période des troncatures sur le signal enregistré. Ici

encore, les troncatures sont donc dues à la taille finie du détecteur, lorsque les perturbations axisymétriques de fortes amplitudes dirigent la lumière diffusée en dehors de l'angle solide de collection.

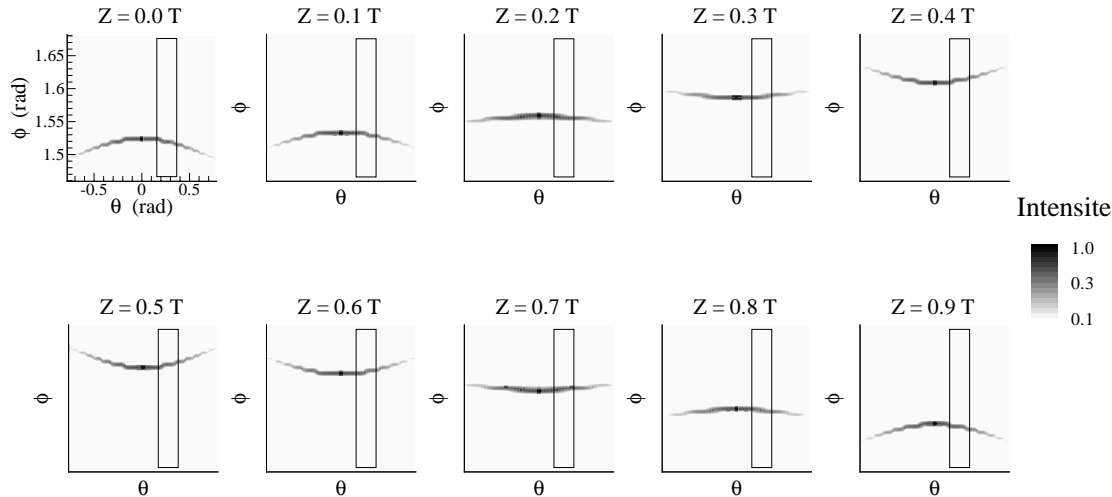


Figure 2.20: L'amplitude des perturbations axisymétriques est égale à 10%. La nappe laser est déviée presque uniformément.

Conclusion

Les résultats des simulations nous donnent des informations importantes pour arriver à interpréter les signaux auxquels nous serons confrontés dans la suite. Mais, plus important encore, ce modèle nous a permis de comprendre comment fonctionne la méthode de mesure.

Nous retiendrons donc:

- 1- **Oscillations de jet:** Des variations d'intensité peuvent être produites par des oscillations du jet laissant pourtant le diamètre local à une valeur constante.
- 2- **Mode axisymétrique:** Dans une certaine gamme d'amplitudes, les perturbations axisymétriques permettent la mesure d'une intensité proportionnelle au diamètre local vu par la nappe laser. Pour des amplitudes trop importantes, la nappe diffusée est dirigée en dehors de l'angle solide de collection produisant un artéfact sur les mesures. Cet artéfact sera signé par la présence d'une harmonique de fréquence double dans le spectre de puissances du signal.

2.4 Croissance des perturbations sur un jet d'eau excité

L'intérêt de l'étude d'un jet d'eau excité réside dans la possibilité de contrôler précisément l'amplitude, la fréquence et la forme des perturbations initiales. Ces perturbations, naissant ou étant ici imposées à la sortie de l'injecteur, sont les déformations de la surface du jet

qui, sous l'effet de l'écoulement libre, vont croître ou disparaître pour laisser finalement place aux instabilités menant à la rupture en gouttes. En fait, les expériences des pionniers Savart [13] et Magnus [14] démontrent qu'un jet liquide émanant d'un injecteur circulaire peut présenter une rupture en gouttes régulière lorsqu'une vibration stable est appliquée au réservoir ou à l'aiguille d'injection. C'est le premier pas réalisé vers un contrôle basique de l'atomisation.

Rappelons d'abord que le dispositif expérimental décrit section 2.2, est celui qui a permis d'obtenir les enregistrements étudiés dans la suite. De plus, en ajoutant au dispositif expérimental un système d'acquisition d'images à l'aide d'une caméra CCD, nous avons constaté que les perturbations évoluant sur le jet sont de deux types: des perturbations axisymétriques et des oscillations de jet (Fig. 2.3).

Dans le cas des oscillations de jet, les simulations montrent un doublement de fréquence du signal mesuré par rapport à la fréquence de la perturbation. Ce doublement de fréquence a été observé expérimentalement lorsque la nappe laser est précisément réglée pour être perpendiculaire à l'axe de déplacement du jet. Par contre, une très légère inclinaison de la nappe laser par rapport à cette position permet de retrouver un signal de fréquence identique à celui des perturbations. Si on se rappelle le raisonnement utilisé pour expliquer le doublement de fréquence, alors il est facile de comprendre l'origine de ce retour à un signal sans doublement de fréquence. En effet, celui-ci s'explique (section 2.3) par la symétrie entre les inclinaisons du jet en une position donnée et une demi longueur d'onde avant ou après. Cette symétrie se retrouve dans les inclinaisons respectives de la nappe diffusée. Ainsi, l'intensité recueillie dans les deux cas est identique puisque le détecteur ne distingue pas ces positions symétriques. Par contre, lorsque la nappe laser est inclinée par rapport à l'horizontale, elle n'est plus strictement perpendiculaire à l'axe du jet. Alors, si les oscillations de jet sont faibles, la symétrie entre les positions de la nappe diffusée est rompue. Nous pouvons même faire en sorte que les positions extrêmes de la nappe diffusée soient telles qu'elles empêchent toute confusion entre chacune des inclinaisons subies par la nappe diffusée au cours du déplacement du jet devant la nappe laser incidente (voir l'exemple donné sur le schéma de la figure 2.21). Ainsi le détecteur distingue différemment toutes les positions de la nappe laser, puisque chacune est associée à une intensité collectée différente. Cette relation bijective entre les intensités détectées et les inclinaisons du jet implique que le signal reçu garde la même fréquence que celle de l'excitation.

Dans le cas qui nous intéresse ici, nous avons réglé la sonde optique de telle sorte que le signal généré par les oscillations de jet ne subisse pas l'apparition d'une fréquence double de celle de l'excitation dans son spectre de puissance.

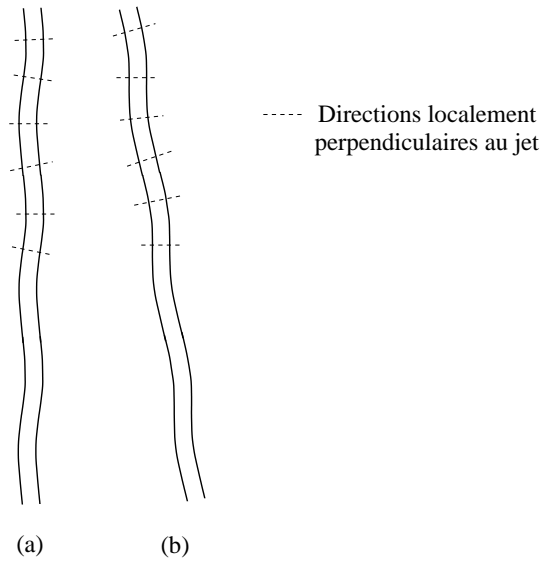


Figure 2.21: (a) le jet vu par la nappe laser lorsqu'elle est parfaitement bien réglée perpendiculairement au jet; (b) lorsque le réglage induit une dissymétrie par rapport à la verticale donnée par l'axe du jet. Ici, les inclinaisons sont exagérées au même titre que l'amplitude des oscillations de jet. Dans le cas réel, les amplitudes étant moins fortes, l'inclinaison nécessaire est moins importante.

Point de fonctionnement du jet excité

Pour cette étude, le jet a les caractéristiques suivantes ¹⁷:

- 1- Diamètre nominal du jet égal à $\Phi = 600\mu m$,
- 2- Rapport de la longueur de la buse sur son diamètre interne égal à $L/\Phi = 200$,
- 3- Vitesse débitante évoluant de $0.94m/s$ à $1.02m/s$ pendant la durée de l'expérience,
- 4- L'excitation imposée est transverse, sinusodale, et de fréquence $F_e \sim 360 Hz$,
- 5- Le liquide injecté est de l'eau.

Nous pouvons rappeler que le rapport L/Φ choisi impose un profil de vitesses établi (profil de Poiseuille) en sortie de buse. Cependant, la vitesse débitante est suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas d'influence de la relaxation du profil des vitesses sur le mécanisme de rupture en gouttes (voir chapitre 1). Le comportement d'un jet libre (non excité) ayant les mêmes paramètres de contrôle que ci-dessus est assez bien décrit par la théorie de Rayleigh modélisant la stabilité d'un cylindre liquide infini [15, 16]. On peut donc s'attendre à ce que la description de Rayleigh reste valide, au moins qualitativement, quand les caractéristiques de l'excitation sont ajustées de manière à reproduire l'instabilité dominante.

¹⁷ $Re \simeq 600$, $We \simeq 8$, $Z = 0.0048$.

Cette instabilité dominante est définie comme la perturbation sinusoïdale dont le taux de croissance est le maximum de ceux donnés dans le cadre de la théorie de Rayleigh pour un jet libre (maximum du diagramme de dispersion). C'est le cas dans ce travail puisque l'excitation est sinusoïdale et sa fréquence a été réglée à $F_e \sim 360 \text{ Hz}$, valeur proche de la fréquence $F_{Ray} = 348 \text{ Hz}$ associée à la longueur d'onde de la perturbation la plus instable dans la description de Rayleigh. De ce fait, les perturbations initiales imposées devraient croître avec le plus grand taux de croissance donné par la théorie de Rayleigh, et l'excitation devrait réduire le temps caractéristique au bout duquel le jet se casse en gouttes. Dans ce cas, la longueur de rupture serait réduite elle aussi. Cependant, comme nous l'avons vu, l'excitation induit une brisure de la symétrie cylindrique, caractéristique du mode variqueux. Or, contrairement aux perturbations axisymétriques, ce mode n'est pas amplifié dans le cadre de la description de Rayleigh.

Malgré tout, en ajustant les paramètres de contrôle du jet aux valeurs énoncées ci-dessus, nous observons que la distribution en tailles de gouttes est monodispersée (voir photographie du jet sur la figure 2.22), comme c'est le cas dans la description du jet libre dans la théorie de Rayleigh. Nous observons aussi une diminution de la longueur de rupture ici égale à $L_{BU} = 16.8 \text{ mm}$.

Il reste donc maintenant à comprendre le rôle exact des oscillations de jet imposées par l'excitation sur le mécanisme de rupture en gouttes, leur croissance, leur évolution par rapport aux varicosités, et une éventuelle compétition entre ces deux modes. Pour ce faire, les séries temporelles ont été enregistrées à une série de distances successives dans l'intervalle $d \in [0.00 \text{ mm}, 19.00 \text{ mm}]$, depuis la sortie de la buse jusqu'à la rupture en gouttes, et par pas de 0.25 mm .

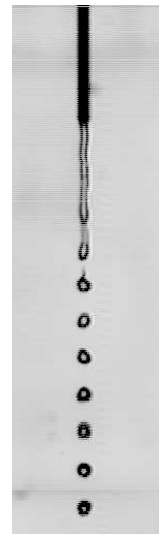


Figure 2.22: Photographie d'un jet excité.

2.4.1 Analyse de la dynamique du jet excité

L'analyse de la dynamique du jet excité que nous allons décrire dans la suite ne représente pas un modèle d'étude à partir des outils de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. L'approche choisie nous a semblé être la plus pertinente pour l'étude particulière de ce jet excité. Bien-entendu, nous verrons plus tard que d'autres analyses, notamment celle d'un jet libre, nécessitent l'utilisation d'outils différents. Cependant, cette partie représente aussi une introduction aux représentations de base qui seront systématiquement utilisées (reconstruction de portraits de phase, section de Poincaré, application de premier retour, etc).

La théorie de la dynamique des systèmes non linéaires traite de l'organisation des trajectoires dans l'espace des phases. Par conséquent, le premier stade de l'analyse est de reconstruire d'autres variables à partir de la seule grandeur physique mesurée à l'aide de la

méthode des décalages temporels, de manière à construire une représentation de l'espace des états.

Reconstruction de l'espace des phases

Les données obtenues par les physiciens étudiant des systèmes dynamiques prennent souvent la forme de séries temporelles, c'est à dire d'une série de valeurs mesurées à intervalles de temps réguliers. Or l'étude d'un système dynamique nécessite de connaître ses états successifs dans l'espace des états de dimension 2, 3 ou plus. Il va donc être important de pouvoir accéder à cette information à partir de la seule série de mesures : ceci sera réalisé à l'aide d'une méthode de reconstruction. L'objet géométrique produit par cette technique est appelé **portrait de phase reconstruit**. Ainsi, de manière à spécifier l'état d'un système m -dimensionnel à un instant donné, la connaissance de m quantités indépendantes est requise.

La base de la technique de reconstruction introduite par N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer et R. S. Shaw [17] repose sur le principe simple que des variables indépendantes peuvent être construites à partir d'une série scalaire temporelle à l'aide d'un décalage temporel τ . En effet, lorsque les variables permettant la description du système sont couplées, le principe de la redondance de l'information nous assure que de l'information est transmise d'une variable à l'autre. Ainsi [18],

Quelle que soit la variable à laquelle vous pensez, son évolution est obligatoirement influencée par toutes les variables qui interagissent avec elles. Leurs valeurs doivent d'une manière ou d'une autre se retrouver dans l'histoire de votre variable. Elle est inévitablement marquée par les autres.

Ainsi, à partir de la variable y du système de Lorenz [19], le portrait de phase peut être reconstruit en utilisant le système de coordonnées

$$\{y(t), y(t + \tau), y(t + 2\tau), \dots\} \quad (2.37)$$

Une projection de cet espace de phases reconstruit est donnée Fig.2.23 pour trois valeurs différentes du décalage temporel τ . Sur la Fig. 2.23, le portrait de phase dépend cruciallement de la valeur du décalage temporel. La détermination de τ a donné lieu à une littérature prolifique [20, 21]. De manière pratique, le choix est guidé par un comportement caractéristique des trop faibles valeurs de τ qui ont tendance à produire une reconstruction qui se confine autour de la première bissectrice (Fig. 2.23.a) et celui de trop grandes valeurs qui orientent de manière exagérée le portrait reconstruit perpendiculairement à la première bissectrice (Fig. 2.23.c). Le décalage temporel τ est un *paramètre de reconstruction*. Sa détermination est essentielle dans la qualité de la reconstruction. Lorsque la dynamique est clairement déterministe, le choix du décalage peut être guidé par l'information mutuelle [22].

Nous allons appliquer cette technique à nos mesures de la forme du jet. Une série temporelle $\{V(t)\}_{t=1}^{20}$ représente l'évolution d'une seule grandeur physique ici proportionnelle à l'intensité $I(t)$ de la lumière captée par le détecteur. Nous sommes alors capables d'obtenir d'autres coordonnées, décalées, en formant un vecteur $\{V(t), V(t + \tau), V(t + 2\tau), \dots, V(t + (d_E - 1)\tau)\}$

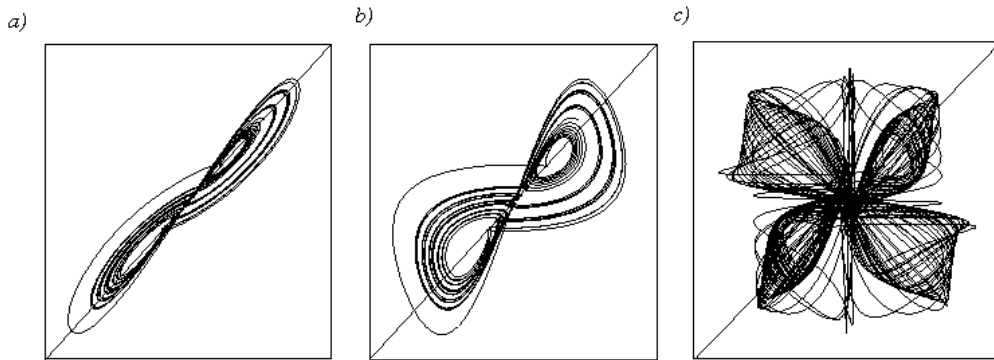


Figure 2.23: *Projection de l'attracteur de Lorenz dans l'espace reconstruit défini par les coordonnées $(y(t+\tau), y(t))$ pour trois valeurs du décalage τ . a) le décalage $\tau = 0.03s$ est trop petit : la dynamique est confinée au voisinage de la diagonale de l'espace. b) Le décalage $\tau = 0.09s$ est correctement choisi : la dynamique est relativement représentative de celle de l'attracteur original. c) Le décalage temporel $\tau = 0.80s$ est trop grand : les structures caractéristiques de l'attracteur original tendent à disparaître suite à des plissements intempestifs de l'attracteur.*

(où τ est le décalage) de manière à reconstruire un espace de phases. D'après le théorème de Takens [23], un espace ainsi construit, de dimension d_E supérieure à $2D_M + 1$, est difféomorphiquement équivalent à l'espace des phases original. D_M représente idéalement la dimension de Hausdorff-Besicovitch. L'équivalence difféomorphe assure que l'espace de phases reconstruit par cette méthode a les mêmes propriétés de différentiabilité en tout point de la trajectoire que l'espace des phases original du système considéré. Une batterie d'outils d'analyse permet alors de montrer que certaines grandes structures de la dynamique sont identiques, qu'elles soient calculées à partir de la reconstruction ou de l'attracteur original.

Pour cette étude, la détermination d'une telle dimension n'est pas requise. Nous utiliserons uniquement des projections bidimensionnelles reconstruites à partir de $\{V(t), V(t + \tau)\}$. Quelques uns de ces portraits de phases reconstruits de la sortie de la buse à la rupture en gouttes sont représentés sur la figure 2.24.

Dans ce type de représentation, une révolution de la trajectoire représente essentiellement l'évolution des deux coordonnées $\{V(t), V(t + \tau)\}$ pendant une pseudo-période T_0 . Dans notre cas, cette pseudo-période est associée à la fréquence d'excitation F_e . Grâce à ces portraits, il est facile d'établir une distinction dans l'évolution de la dynamique, de la buse à la rupture en gouttes, en deux parties principales: (i) la première partie est associée à une décroissance de la région visitée dans l'espace des états reconstruits tandis que (ii) la seconde partie correspond au redéveloppement de cette région. Ces deux parties sont séparées par un point critique situé à 9.58 mm de la sortie de la buse, où le portrait de phase reconstruit est confiné dans une région très petite de l'espace des états reconstruits: cette distance correspond à un comportement du jet pour lequel l'amplitude des oscillations

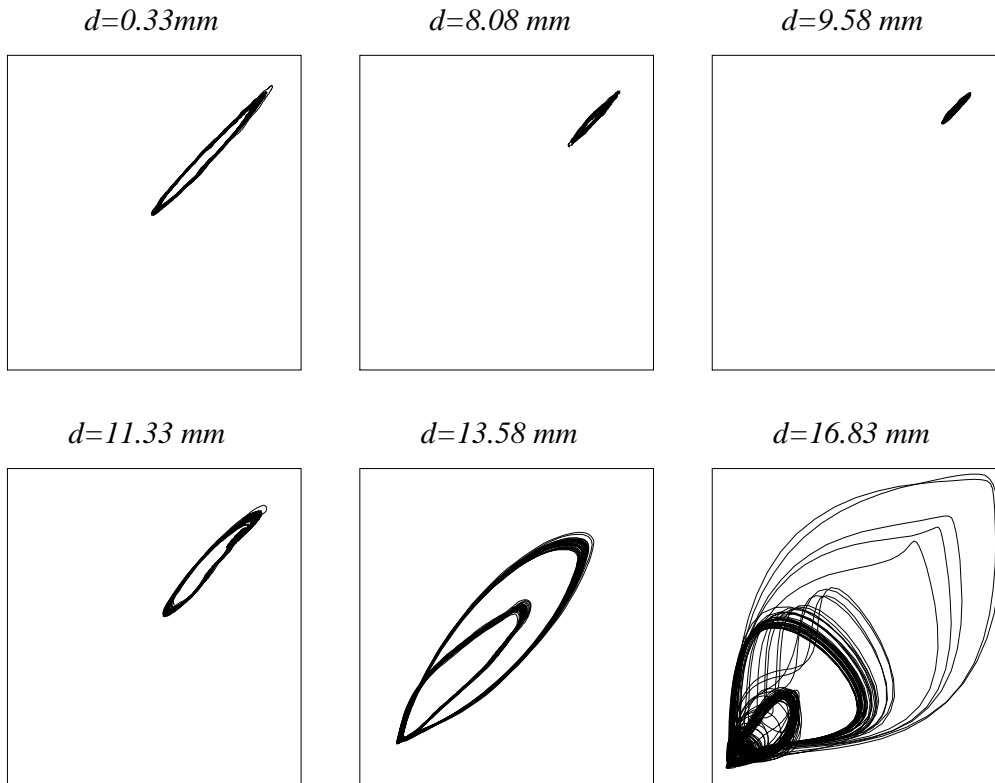


Figure 2.24: Portraits de phase reconstruits depuis la sortie de la buse jusqu'à la rupture en gouttes. Le décalage τ est de $1/(40F_e)$. Deux dynamiques d'origine différente sont mises en évidence le long du jet: dans la première partie, de la sortie de la buse au point critique ($d \simeq 9.58 \text{ mm}$), les oscillations qui seront montrées être dues à l'excitation sont amorties; dans la seconde partie, après le point critique jusqu'à la rupture en gouttes, des modes proches de ceux associés à la théorie de Rayleigh apparaissent et croissent.

du diamètre du jet est très faible. A une distance $d = 16.83 \text{ mm}$ de la sortie de la buse (lieu de la rupture en gouttes), la trajectoire visite de manière sensiblement désordonnée une large région de l'espace des phases. L'absence d'une structure simple pour la trajectoire, surtout en comparaison aux portraits de phase précédents, est ici une signature de fortes instabilités agissant à la rupture en gouttes.

Nous avons vu que le choix du décalage temporel τ est une étape importante dans la reconstruction d'espaces des phases. Chacune des méthodes proposées dans la littérature [20, 21] ont leurs avantages et leurs défauts. Malgré tout, toutes aboutissent à un décalage compris dans l'intervalle $[0, T_0/2]$ où T_0 est la pseudo-période du comportement étudié.

Pour mieux comprendre encore les origines du choix du décalage temporel, prenons le cas d'un simple comportement régi par l'équation différentielle du second ordre:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (2.38)$$

Cette équation se ramène à un système de deux équations différentielles ordinaires:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases} \quad (2.39)$$

où

$$\begin{cases} x = \sin \omega t \\ y = \omega \cos \omega t = \dot{x} \end{cases} \quad (2.40)$$

et définit une ellipse dans l'espace des phases (x, y) . Supposons que nous ne connaissions que l'enregistrement de la variable $x(t)$. Si nous prenons un système de coordonnées décalées

$$\begin{cases} X = x(t) \\ Y = x(t + \tau) \end{cases} \quad (2.41)$$

où $\tau = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{T_0}{4}$, nous vérifions facilement que

$$Y = x(t + \tau) = \sin(\omega(t + \tau)) = \cos(\omega t) = ky \quad (2.42)$$

où k est une constante de proportionnalité ici égale à $1/\omega$. De ce fait, le choix de ce décalage τ particulier montre que représenter la trajectoire de l'évolution du système (2.38) dans l'espace des états reconstruits (X, Y) fournit une représentation équivalente à l'espace des phases original (x, y) : l'équivalence est ici difféomorphique, c'est à dire qu'il existe une bijection entre l'espace (x, y) et l'espace (X, Y) et que la structure différentielle de la trajectoire est préservée au cours de cette application d'un espace à l'autre. Ici, une simple homothétie est appliquée entre les deux espaces. Une reconstruction peut également être réalisée à l'aide de coordonnées dérivées, c'est à dire en utilisant la variable $x(t)$ et sa dérivée première $\dot{x}(t)$: l'espace des états reconstruit (X, Y) est alors identique à l'espace des phases original puisque

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \dot{x} = y \end{cases} \quad (2.43)$$

L'utilisation des coordonnées décalées permet de ce fait de tester directement si l'évolution du diamètre du jet après la buse est de nature sinusoïdale. Comme la fréquence d'excitation est F_e et que nous supposons qu'elle pilote la dynamique de manière prépondérante, nous devons choisir le décalage temporel τ égal à $1/4F_e$ pour pouvoir reconstruire un cercle si l'évolution du diamètre du jet est directement liée à l'excitation sinusoïdale. Le portrait de phases reconstruit à une distance de l'aiguille égale à 0.33 mm est présenté sur la figure 2.25 pour un tel décalage. Nous pouvons remarquer que la forme du portrait de phase est assez proche d'un cercle, impliquant que la composante principale de la dynamique est constituée de l'excitation sinusoïdale imposée par le haut-parleur. Nous pouvons dire que le signal d'excitation sinusoïdale est à l'origine de la dynamique observée au sein de la première partie du jet, appelée partie A . De plus, nous remarquons que les oscillations imposées par l'excitation sont associées à un portrait de phase reconstruit dont le rayon moyen diminue jusqu'à la distance critique, dans la partie A , quand la distance à l'aiguille

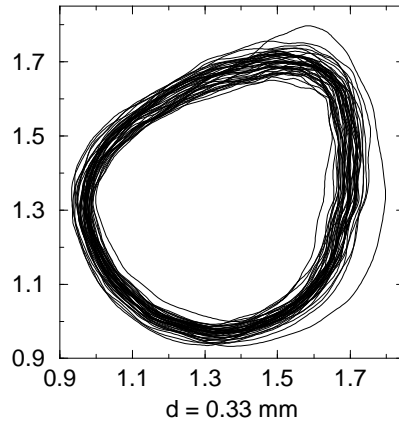


Figure 2.25: *Le décalage temporel est pris égal à $1/4F_e$ dans la partie A de manière à vérifier la contribution prépondérante de la perturbation sinusoïdale induite par l'excitation: la forme quasi-circulaire du portrait de phase reconstruit confirme la nature sinusoïdale de la perturbation.*

augmente. La partie A correspond donc à l'amortissement, dans le jet, de l'excitation transversale appliquée à l'aiguille.

Dans la partie B, si les projections $2D$ de l'espace de phases sont reconstruites avec le même décalage $\tau = 1/4F_e$, les portraits reconstruits sont trop étalés (comme sur la figure 2.26.a, pour $d = 13.58 \text{ mm}$). La dynamique est alors beaucoup trop décorrélée¹⁸. Le décalage temporel doit donc être diminué. Une fois choisi convenablement ($\tau = 1/40F_e$), nous observons des trajectoires correctement développées (Fig. 2.26.b). Le choix du décalage temporel approprié divise à nouveau l'évolution de la dynamique le long de l'axe du jet en deux parties. Nous pouvons aussi remarquer que les projections $2D$ reconstruites dans la seconde partie diffèrent de celles de la première partie. En effet, une seule boucle quasi-circulaire est présentée dans la première partie tandis que dans la seconde, une petite boucle apparaît sur la boucle primaire.

Les périodes temporelles associées à chaque boucle sont notées T_1 et T_2 , respectivement. L'analyse des périodes montre que $T_1 + T_2$ est égal à la période d'excitation $T_e = 1/F_e$ [10]. Ce résultat nous informe que la fréquence d'excitation pilote la dynamique de la seconde partie. Rappelons nous que les processus dynamiques sont cependant différents, comme l'a montré, par exemple, l'analyse du choix du décalage temporel.

Sections de Poincaré

Le calcul d'une section de Poincaré (Fig. 2.27) nous permet d'analyser la dispersion des trajectoires sur la projection $2D$ de l'espace des phases reconstruit. De manière générale, une section de Poincaré est définie comme étant l'ensemble des intersections de la trajectoire du système avec un plan transverse au flot formé par cette trajectoire: un seul sens de traversée est pris en compte. Dans le cas présent, nous choisissons le plan perpendiculaire au plan (x, y) passant par la première bissectrice des axes définie par l'équation $x = y$. Ce

¹⁸Des détails théoriques sur de tels comportements peuvent être trouvés dans la thèse de C. Letellier [24].

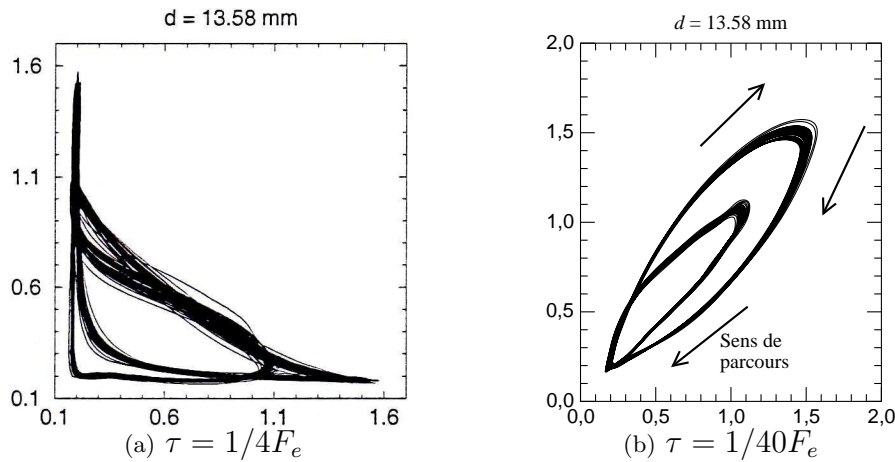


Figure 2.26: *Partie B*: l'effet de la valeur du décalage temporel sur l'espace des phases reconstruit. Pour $\tau = 1/4F_e$, le portrait de phase présente une configuration nettement perpendiculaire à la bissectrice: la dynamique est décorrélée. Un décalage convenable vaut $\tau = 1/40F_e$. Nous pouvons en conclure que les dynamiques correspondant aux parties A et B sont de natures différentes.

plan admet donc pour troisième coordonnées: $z = V(t + 2\tau)$. De telle sorte que la section de Poincaré est représentée ici par l'ensemble

$$P \equiv \{(Y, Z) \in \mathbb{R}^2 \mid X = Y, \dot{X} > 0\} \quad (2.44)$$

où les coordonnées (X, Y, Z) sont définies par la relation:

$$\begin{cases} X = V(t) \\ Y = V(t + \tau) \\ Z = V(t + 2\tau) \end{cases} \quad (2.45)$$

Pour chaque projection $2D$ le long de l'axe du jet, de la sortie de la buse à la rupture, une section de Poincaré est calculée.

Application de premier retour

Dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, la nature déterministe du processus régissant la dispersion des trajectoires dans une section de Poincaré peut être associée à la présence d'une structure de l'application de premier retour à cet ensemble. Une application de premier retour à une section de Poincaré est obtenue en traçant une des coordonnées de la $(n + 1)^{ieme}$ intersection de la trajectoire avec le plan de Poincaré en fonction de celle de la n^{ieme} intersection. Par exemple, pour une distance de 13.58 mm à la sortie de la buse, une application de premier retour est représentée figure 2.28. Au lieu d'une forme bien identifiable, telle une parabole, nous ne voyons sur cette figure qu'un nuage de points. Nous pouvons en conclure que les variations d'intensité collectée ne sont pas gouvernées

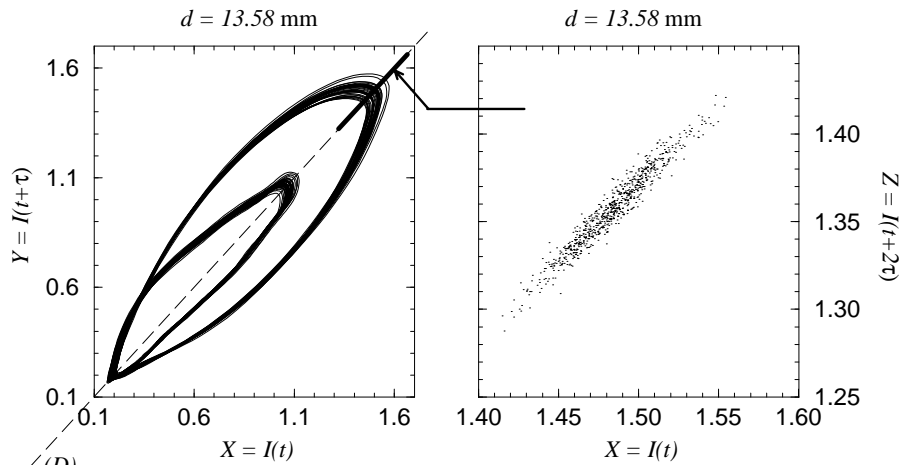


Figure 2.27: (D) La section de Poincaré pour $d = 13.58\text{mm}$ est calculée en prenant les intersections de la trajectoire avec un plan transverse passant par la première bissectrice des axes définie par $(X = Y)$, où $(X, Y) = (V(t), V(t + \tau))$. Une troisième coordonnée $Z = V(t + 2\tau)$, orthogonale au plan (X, Y) , est nécessaire pour représenter la section de Poincaré dans une projection plane.

par une dynamique déterministe fortement dissipative et de basse dimension. En d'autres termes, cette dynamique ne peut pas être décrite par un ensemble d'équations différentielles ordinaires comportant un faible nombre de variables physiques. Il est notamment possible qu'il s'agisse simplement d'une dynamique stochastique (c'est-à-dire de "bruit").

Nous en concluons que, à chaque position successive le long du jet, seul un comportement "moyen" de l'évolution de l'intensité collectée a un intérêt pour l'analyse de la dynamique le long de l'axe du jet. Ce comportement global résume de manière performante l'information lisible sur le portrait de phase.

2.4.2 Extraction d'orbites périodiques et croissance des perturbations

L'extraction des orbites périodiques

On dit d'un phénomène chaotique qu'il est *déterministe* et *sensible aux conditions initiales*. Or, la théorie des systèmes dynamiques non linéaires nous apprend que la trajectoire d'un système chaotique typique est construite, dans l'espace des phases, autour d'un squelette d'orbites périodiques [25]. Cependant, nous savons déjà que même si le jet est un système chaotique, ce qui n'est pas prouvé, sa dynamique n'est pas décrite par un faible nombre de degrés de liberté. Or, en l'état actuel des connaissances sur les systèmes dynamiques non linéaires, il n'existe pas d'outils permettant l'étude de systèmes chaotiques à haut degré de liberté, si tant est que le jet excité en soit finalement un. Cependant, le concept de squelette d'orbites peut être utilisé. En effet, les trajectoires qui se développent sur les portraits de phase de la figure 2.24, peuvent être vues comme reposant principalement au voisinage d'une orbite périodique ne présentant qu'une seule intersection avec la section de Poincaré. Dans ce cas, l'orbite est dite de période 1 (Fig. 2.29) et représente une solution

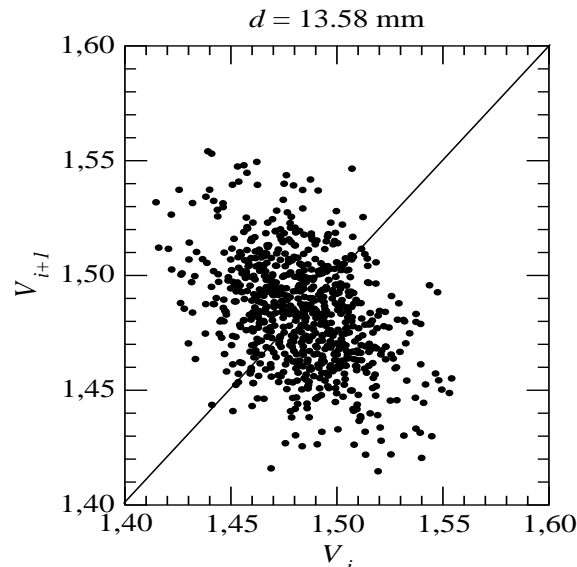


Figure 2.28: *Application de premier retour à la section de Poincaré. Aucune structure n'est mise en évidence sur ce graphe. Cette constatation permet de rejeter l'hypothèse d'un processus déterministe fortement dissipatif de basse dimension.*

périodique au voisinage de laquelle notre système va évoluer.

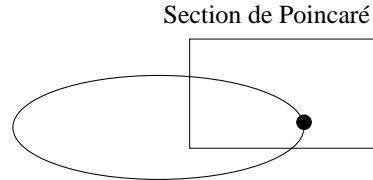


Figure 2.29: *Orbite de période 1.*

De manière générale, les orbites périodiques sont extraites à partir d'une section de Poincaré par la recherche des points de récurrence par une méthode similaire à la technique de Newton-Raphston [26]. Ainsi, lorsque la distance entre deux intersections successives de la trajectoire avec un plan de Poincaré est inférieure à une distance seuil ϵ , la portion de trajectoire est identifiée à une orbite périodique.

Comme nous recherchons l'orbite caractérisant au mieux le comportement global de la trajectoire dans l'espace des phases, nous choisissons d'extraire l'orbite de période 1 associée au maximum de la probabilité de visite des trajectoires dans une section de Poincaré. Cette orbite peut être considérée comme étant la plus représentative de l'évolution du système à cette distance de la buse. Notre but est alors de caractériser l'évolution de la dynamique le long de l'axe du jet à partir de l'extraction de cette orbite à chaque point d'acquisition le long du jet.

Dans tous les cas, la fonction de densité de probabilité de visite sur les abscisses de

la section de Poincaré est bien approchée par une allure gaussienne (Fig. 2.30). Cela est un argument en faveur de l'existence d'une composante stochastique au sein des processus distribuant la trajectoire autour de l'orbite la plus représentative.

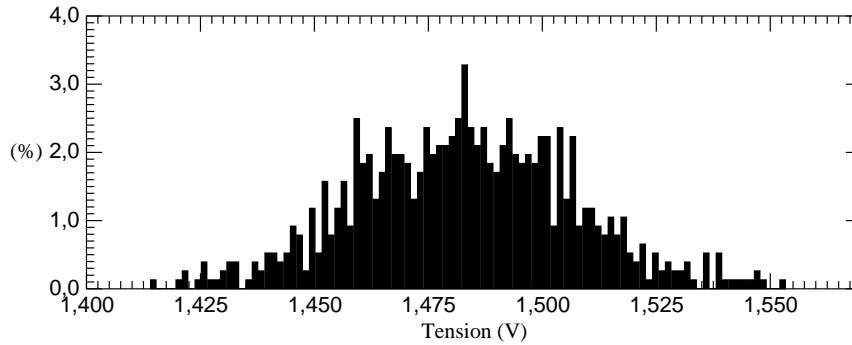


Figure 2.30: *Densité de Probabilité de présence sur les abscisses de la section de Poincaré à la distance $d = 13.58\text{mm}$ (partie B). Cette pdf gaussienne est une preuve supplémentaire de l'existence d'une composante stochastique de la trajectoire autour d'un comportement moyen dont l'orbite la plus représentative est une bonne estimation.*

Les orbites périodiques sont extraites à l'aide d'un code basé sur celui développé pour l'extraction des orbites périodiques dans des études théoriques [25]: comme celles sur les systèmes non linéaires numériques de Rössler [27] ou de Lorenz [28].

L'orbite la plus représentative de la trajectoire dans l'espace des phases correspond à une portion de série temporelle de laquelle l'orbite a été reconstruite initialement. Dans la suite, nous nommerons indistinctement *orbite* la trajectoire extraite du portrait de phase et la portion de série temporelle correspondante. Un exemple d'une telle orbite est donné figure 2.31. Cette procédure est exécutée pour chaque portrait reconstruit à partir des séries temporelles acquises aux distances à la sortie de la buse d sur l'intervalle $[0.00\text{ mm}, 19.00\text{ mm}]$.

En concaténant les orbites périodiques les plus représentatives (ici, des portions de séries temporelles) de la sortie de la buse (0.00 mm) jusqu'à un peu après la rupture (19.00 mm), nous obtenons une représentation globale de l'évolution de la dynamique le long de l'axe du jet. Cette représentation est tracée sur la figure 2.32. En abscisse, c'est la position de mesure qui est représentée, c'est à dire la distance à la sortie de la buse, même si les points de la courbe représentent en fait des points des portions de séries temporelles concaténées les unes à la suite des autres.

A nouveau, deux comportements distincts sont mis en évidence, séparés par un point critique à la distance $d = 9.83\text{ mm}$:

Partie A ($d < 9.83\text{ mm}$): Ici, les oscillations ont une fréquence F_e et sont générées par le déplacement transverse du jet venant du mécanisme d'excitation. Cette première partie est associée à l'amortissement de la perturbation liée à l'excitation. Il faut se souvenir cependant que l'excitation a été choisie de manière à reproduire l'instabilité dont le taux de croissance prédit par la théorie de Rayleigh pour un jet libre est le plus grand. Mais la symétrie axiale est brisée par l'action transverse de l'excitation. De ce fait, il apparaît

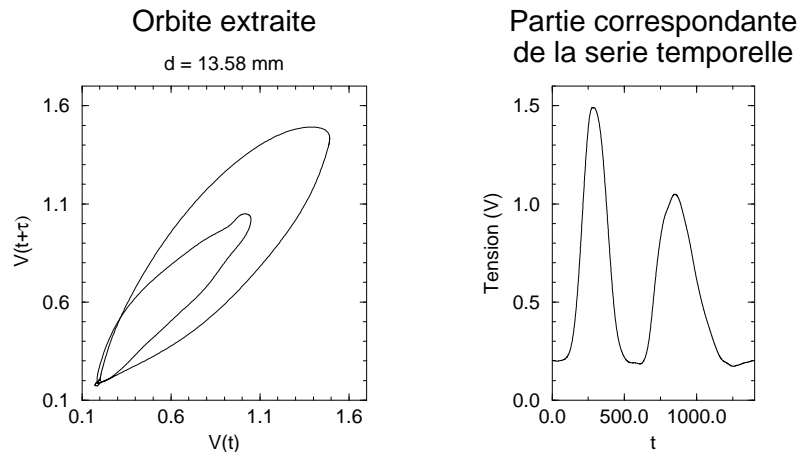


Figure 2.31: *Projection 2D et portion de la série temporelle correspondant à l'orbite périodique extraite pour $d = 13.58$ mm.*

que l'écoulement tend, dans un premier temps, à restorer la symétrie axiale du jet par l'amortissement des oscillations transverses dues à l'excitation radiale. Cet amortissement est en accord total avec la théorie de Rayleigh puisqu'elle prédit un taux de croissance négatif pour les modes sinueux, et donc la stabilité par rapport à des perturbations non-axisymétriques (voir chapitre 1).

Ensuite, l'extinction de ces perturbations permet la croissance (deuxième partie) des modes axi-symétriques correspondant à ceux prédits par la théorie de Rayleigh pour un jet libre.

Partie B ($d > 9.83$ mm): Notons que la fréquence d'excitation F_e reste la fréquence principale dans cette deuxième partie. Ainsi, la fréquence d'excitation continue à diriger la dynamique dans cette seconde partie bien que les oscillations aient été presque totalement amorties dans la partie A. En fait, une première oscillation se développe et devient la composante principale de la dynamique. Cela se traduit par l'apparition d'un pic principal dans le spectre de puissance à la fréquence F_e . Pendant cette croissance, et presque immédiatement après le passage au point critique ($d = 9.83$ mm), une oscillation secondaire apparaît, faisant apparaître un pic secondaire de fréquence $2F_e$ dans le spectre de puissance. Comme nous l'avons vu lors des simulations, cette oscillation secondaire est due à un artefact du système de collection. Comme le doublement de fréquence associé aux oscillations de jet a été supprimé en modifiant légèrement le réglage du montage optique, nous pouvons affirmer que l'existence de l'oscillation secondaire est aussi la signature de la présence de perturbations axisymétriques. La partie B est donc une région où les perturbations axisymétriques, déstabilisant le jet d'après la théorie de Rayleigh, évoluent.

La disparition de l'oscillation secondaire est une signature de la rupture en gouttes puisqu'à ce niveau des particules individuelles apparaissent. Chaque passage d'une des gouttes devant la sonde optique induit uniquement une impulsion. La fréquence de ces impulsions se rapporte à la fréquence de l'oscillation primaire, c'est à dire à celle de l'excitation. Parfois, des impulsions plus petites peuvent néanmoins s'intercaler entre deux

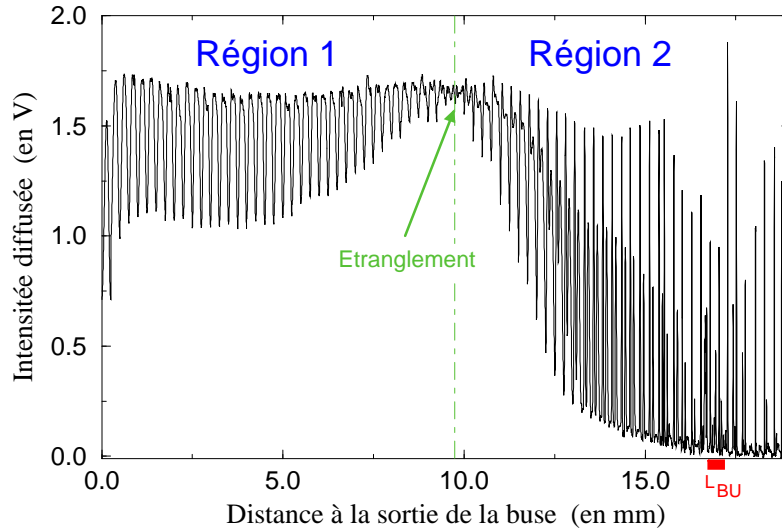


Figure 2.32: *Evolution de l'orbite la plus représentative en fonction de la distance à la buse: cette représentation globale de l'évolution de la dynamique le long de l'axe du jet est obtenue en concaténant chacune des portions de série temporelle correspondant à l'orbite la plus représentative. ($L_{BU} = 16.8$ mm est la longueur de rupture en gouttes.)*

impulsions "primaires", produites par le passage d'une fine gouttelette appelée *satellite*.

Analyse du spectre de puissance

Au moyen des spectres de puissance calculés à chaque distance de la sortie de l'aiguille, nous pouvons calculer l'évolution des amplitudes associées au mode fondamental de la fréquence d'excitation (le mode 0 correspond à 360 Hz). Ce calcul fournit aussi l'évolution des cinq premières harmoniques (Fig. 2.33):

$$\text{Mode 1} = 715 \text{ Hz}$$

$$\text{Mode 2} = 1078 \text{ Hz}$$

$$\text{Mode 3} = 1435 \text{ Hz}$$

$$\text{Mode 4} = 1794 \text{ Hz}$$

$$\text{Mode 5} = 2150 \text{ Hz}$$

Les première et seconde harmoniques permettent la partition de l'évolution de la dynamique approximativement à la même distance que dans les sections précédentes, soit vers le point critique situé à $d = 9.83$ mm. Dans la partie A, tandis que le mode fondamental est globalement légèrement amorti depuis la distance $d = 0.00$ mm jusqu'à $d = 9.83$ mm, les autres harmoniques restent à une amplitude constante. Après 9.83 mm, les modes 0, 2,

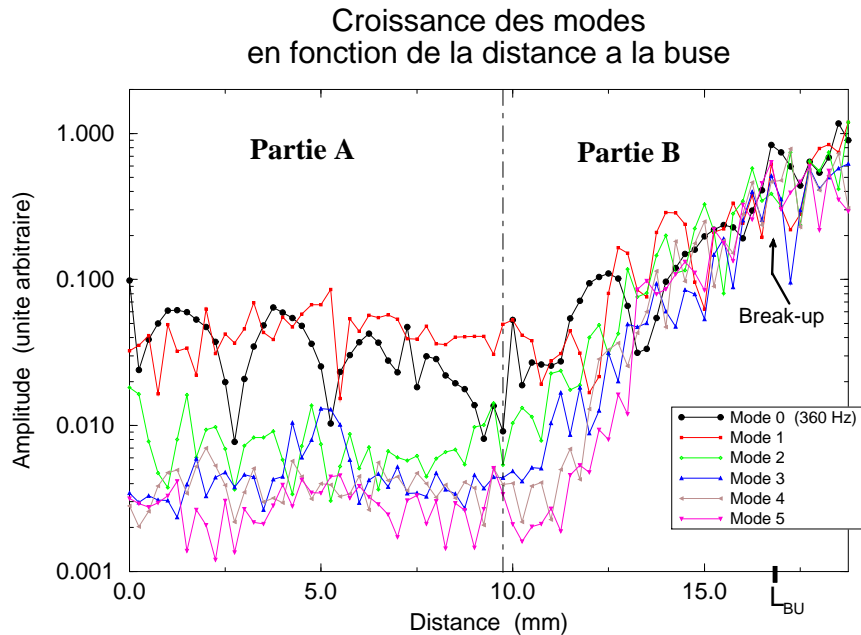


Figure 2.33: Les deux parties de l'évolution de la dynamique le long de l'axe du jet sont aussi distinguées sur cette représentation de la croissance des différentes harmoniques. ($L_{BU} = 16.8\text{mm}$ est la longueur moyenne de rupture.)

et 3 commencent à croître. Les modes 1, 4, et 5 commencent à croître à une distance plus grande. La croissance décalée des harmoniques successives de la fréquence fondamentale n'est pas étonnante au regard des résultats de M.C. Yuen *et al.* [29]. En effet, dans leur article, ils mettent en évidence ce genre de comportement à partir des résultats de leur modèle faiblement non linéaire (voir aussi le chapitre 1). Par ailleurs, l'étude du comportement d'un jet excité longitudinalement (induisant des modes variqueux), en utilisant la technique de mesure d'extinction d'un faisceau laser par le liquide rendu opaque [4], confirme cet effet.

2.4.3 Conclusion

Nous avons vu que l'existence d'une oscillation secondaire, traduite par l'apparition d'un pic de fréquence $2F_e$ sur le spectre de puissance, est associée à la présence de perturbations axisymétriques sur le jet. En effet, les résultats des simulations, conjointement au réglage de l'inclinaison de la nappe laser, fournissent un moyen de différencier chacun des modes de perturbation (sinueux et variqueux).

Cette distinction permet de scinder l'évolution de la dynamique du jet en deux parties. Nous avons construit des représentations de l'évolution de la dynamique le long du jet de la sortie de l'aiguille d'injection, à la rupture en gouttes. En particulier, l'extraction puis le tracé de l'évolution de l'orbite la plus représentative précise la distinction de deux parties qui sont respectivement associées à l'amortissement des oscillations dues à l'excitation

de l'aiguille et à la croissance des perturbations axisymétriques correspondant au mode déstabilisant prédit par la théorie de Rayleigh. Nous observons que l'extinction des perturbations dues à l'excitation (brisant la symétrie axiale) serait une condition nécessaire à la croissance des modes axisymétriques menant à la rupture en gouttes.

Une fois la symétrie axiale restaurée la croissance de différentes harmoniques peut apparaître dans la seconde partie de l'évolution. Chacune commence à croître successivement jusqu'à la rupture en gouttes à la façon du schéma prédit théoriquement [29, 30] et confirmé dans le cas d'excitations axisymétriques par l'expérience [4]. L'amplitude de l'oscillation secondaire, due à l'artéfact sur la mesure des déformations axisymétriques de la surface du jet, permet aussi de situer le lieu de la rupture en gouttes.

2.5 Instabilités d'un jet d'eau libre

Après l'étude de l'atomisation forcée d'un jet, nous allons étudier celle d'un jet libre, c'est à dire non soumis à une excitation quelconque.

En fait, toute excitation, qu'elle soit transverse, axisymétrique, ou encore électrohydrodynamique, influence fortement le mécanisme de rupture en gouttes. Bien entendu, dans chaque cas, c'est l'effet recherché qui impose l'idée d'apporter une perturbation externe. Dans l'étude précédente, le but était d'obtenir un jet stable mono-dispersé. L'idée d'initier artificiellement les perturbations vient de la théorie linéaire: si les perturbations initiales sont contrôlées, alors l'atomisation est contrôlée. Inversement, l'étude non exclusive de l'atomisation d'un jet doit être réalisée sans excitation extérieure de manière à identifier, le cas échéant, l'influence des mécanismes internes à l'écoulement sur l'initiation des perturbations. Cette dernière remarque revêt toute son importance dans la problématique de l'influence de la relaxation du profil des vitesses en sortie de buse sur la naissance des instabilités (voir chapitre 1).

Nous choisissons ici d'étudier un jet d'eau libre particulièrement simple (photographies de la figure 2.34). Son comportement étant bien connu, les alterations du signal par la présence de l'artéfact sur la mesure seront facilement identifiables.

Point de fonctionnement

- 1- Diamètre nominal du jet égal à $\Phi = 600\mu m$,



Figure 2.34: Photographies du jet libre. Son comportement est décrit par la théorie de Rayleigh.

- 2- Rapport de la longueur de la buse sur son diamètre interne égal à $L/\Phi = 200$,
- 3- Vitesse débitante égale à 0.98 m/s ,
- 4- Pas d'excitation imposée,
- 5- Le liquide injecté est de l'eau.

Les nombre de Reynolds, Weber et Ohnesorge de ce jet sont les suivants: $Re \simeq 600$, $We \simeq 8$, $Z = 0.0048$. Le lecteur pourra s'étonner du choix d'un rapport L/Φ si élevé. Manifestement, un jet simple devrait avoir un profil de vitesses plat en sortie d'injecteur, de manière à ne pas ajouter un paramètre supplémentaire dans l'étude des mécanismes menant à l'atomisation en gouttes. Cependant, comme nous l'avons vu dans le cas du jet excité, ce jet a une vitesse débitante ($\simeq 1 \text{ m/s}$) suffisamment faible pour ne pas être influencé par la relaxation du profil de vitesses (voir observations phénoménologiques, chapitre 1). La rupture en gouttes sera alors pilotée complètement par les forces capillaires (théorie de Rayleigh). En outre, le choix d'un tel jet nous permet d'étudier un jet libre dont le point de fonctionnement est identique au jet excité étudié précédemment, à l'excitation près.

Grâce à la théorie linéaire, nous pouvons calculer la fréquence associée à la longueur d'onde de la perturbation ayant le plus fort taux de croissance: $F_{Ray} = 363 \text{ Hz}$. Enfin, notons que la longueur de rupture mesurée sur ce jet libre est égale à $L_{BU} = 29.3 \text{ mm}$.

Evolution des portraits de phase

Les portraits de phase sont présentés sur la figure 2.35. Par comparaison au cas du jet excité, les trajectoires sont fortement dispersées sur les portraits. Ici, il n'y a plus d'excitation externe contraignant la dynamique sur un cycle limite comme auparavant.

Nous pouvons distinguer grossièrement trois régions. Une première partie, assez longue, où il n'y a quasiment pas de perturbations visibles de la surface du jet, commence dès la sortie de buse ($d = 0.00 \text{ mm}$) jusqu'à $d \simeq 19.00 \text{ mm}$. Cette région est associée à des fluctuations possibles de faibles amplitudes, non révélables par notre technique de mesure. Dans un deuxième tronçon, le signal croît fortement de $d \simeq 19.00 \text{ mm}$ à $d = 29.50 \text{ mm}$: c'est la région où les perturbations croissent rapidement pour amener à la rupture. Ensuite, au delà de $d = 29.50 \text{ mm} \simeq L_{BU}$, le maximum d'amplitude étant atteint, les trajectoires s'organisent sur le portrait de phase pour finalement montrer une évolution assez structurée ($d = 37.00 \text{ mm}$): c'est l'amortissement des oscillations de la forme des gouttes après la rupture.

Evolution de l'amplitude des modes de Fourier

Comme pour le jet excité, le calcul des spectres de puissance sur les signaux mesurés (Fig. 2.36) à chaque position le long du jet, permet de tracer l'évolution de l'amplitude de la fréquence principale (fréquence naturelle du jet égale à F_{Ray}) et de ses harmoniques.

Sur ce graphe, nous retrouvons les trois régions définies précédemment. Notons qu'en région 2, la première harmonique (mode 1) domine, signant la présence de l'artéfact de mesure pour des perturbations axisymétriques. A la transition entre la région 2 et 3, celle-ci passe le relais au mode fondamental. En réalité, cette disparition du doublement de

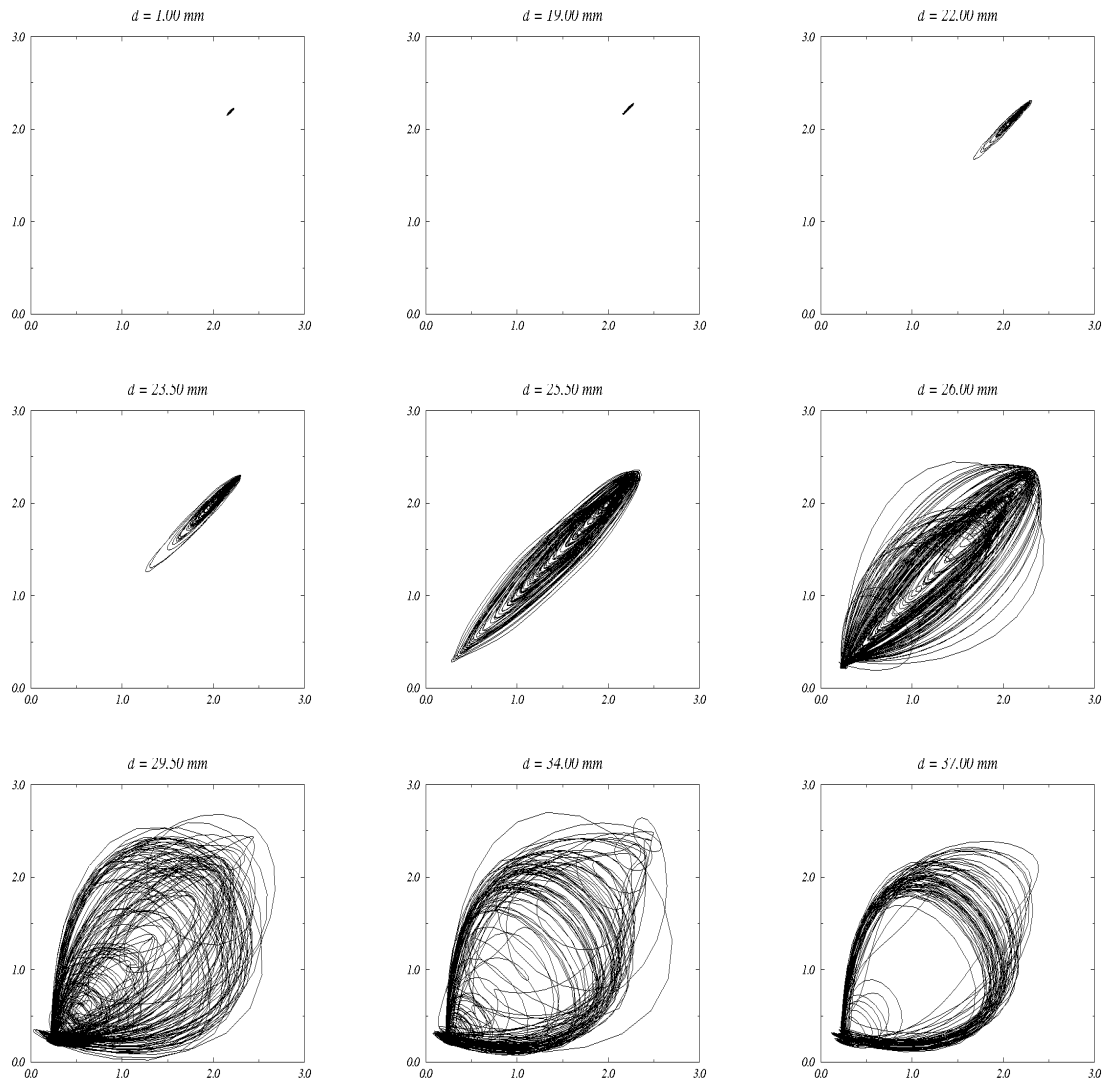


Figure 2.35: *Evolution du portrait de phase reconstruit en fonction de la distance à la sortie de la buse dans le cas d'un jet libre dans le régime de Rayleigh. Le décalage τ est égal à $4 \cdot 10^{-2} \text{ ms} \simeq 1/70 F_{Ray}$.*

fréquence correspond à la rupture en gouttes comme dans le cas du jet excité. Notons que, sur cette figure, chaque évolution présente un maximum en région 2. Ce maximum est dû à l'artéfact de mesure qui brouille ainsi la lisibilité de l'évolution des modes.

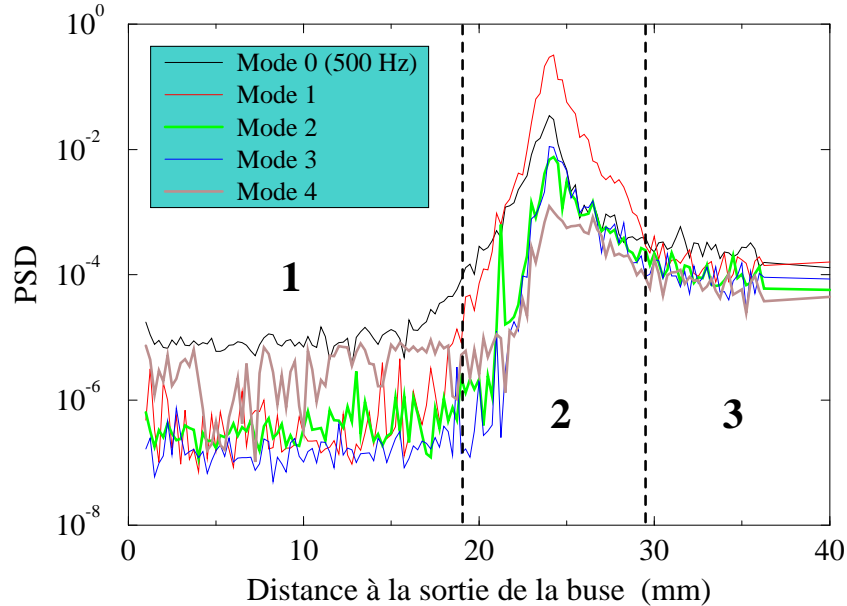


Figure 2.36: *Evolution du mode fondamental et de ses premières harmoniques en fonction de la distance à l'injecteur. La fréquence associée au mode fondamental correspond grossièrement à la fréquence naturelle du jet, c'est à dire à F_{Ray} .*

Première région ($d < 19.0 \text{ mm}$)

Comme nous pouvons le vérifier sur la figure 2.37, le signal mesuré donne l'évolution de diamètres locaux pour de très faibles perturbations de la surface du jet.

Ce signal est donc très bruité comme en témoigne l'allure désordonnée des trajectoires sur le portrait de phase (Fig. 2.38). Globalement, nous constatons simplement un début de croissance des perturbations vers les plus grandes distances de la sortie de l'injecteur.

Deuxième région (de $d \simeq 19.00 \text{ mm}$ à $d = 29.50 \text{ mm}$)

Dès 22.00 mm , le portrait de phase commence à s'organiser, et nous pouvons déjà constater la présence de l'artéfact sur la mesure (Fig. 2.39). 3.50 mm plus loin, les perturbations se sont fortement amplifiées (Fig. 2.41). L'artéfact domine encore la majeure partie de la dynamique.

A cette distance de la sortie de la buse, la dispersion des trajectoires est telle que nous pouvons chercher à savoir si elle est régie par une loi particulière. Comme nous l'avons déjà vu dans le cas du jet excité, le premier pas consiste à calculer une section de Poincaré. Il

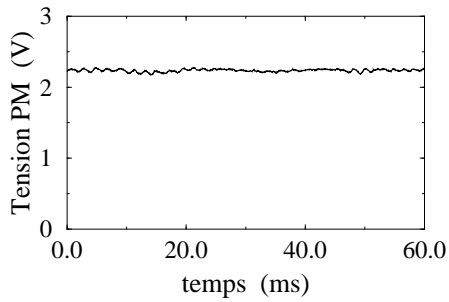


Figure 2.37: *Extrait de la série temporelle enregistrée à $d = 19.00$ mm.*

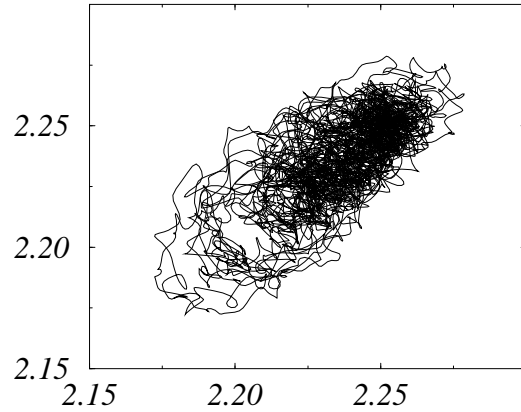


Figure 2.38: *Portrait de phase à $d = 19.00$ mm. Le décalage est égal à $\tau = 3 \cdot 10^{-1}$ ms $\simeq 1/9F_{Ray}$.*

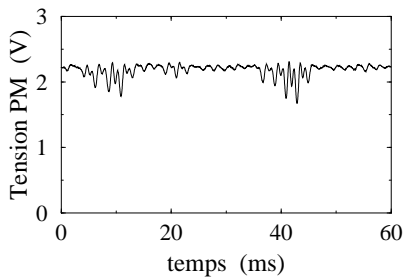


Figure 2.39: *Extrait de la série temporelle enregistrée à $d = 22.00$ mm.*

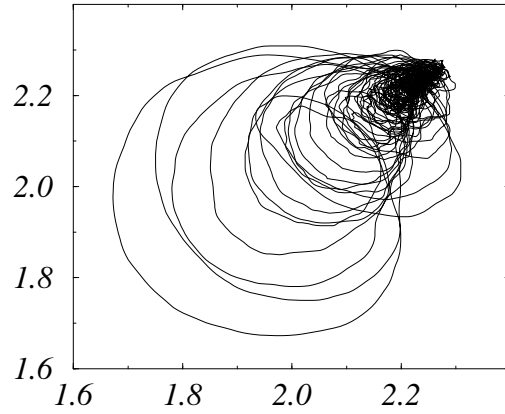


Figure 2.40: *Portrait de phase à $d = 22.00$ mm. Le décalage est égal à $\tau = 3 \cdot 10^{-1}$ ms $\simeq 1/9F_{Ray}$.*

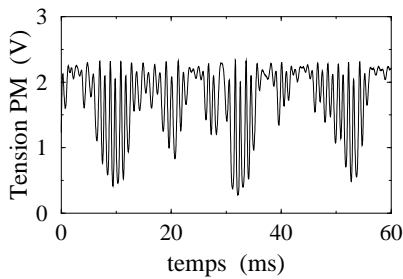


Figure 2.41: *Extrait de la série temporelle enregistrée à $d = 25.50$ mm.*

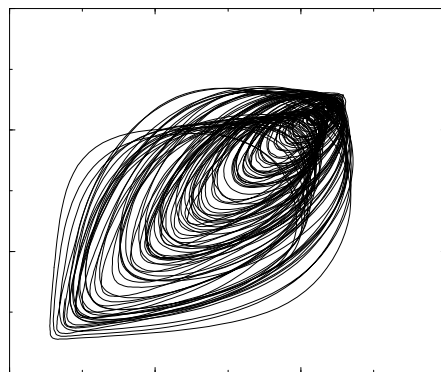


Figure 2.42: *Portrait de phase à $d = 25.50$ mm. Le décalage est égal à $\tau = 1.5 \cdot 10^{-1}$ ms $\simeq 1/18F_{Ray}$.*

semble plus intéressant de chercher à réaliser cette section aux endroits où la trajectoire du portrait reflète l'amplitude des déformations de la surface du jet arrivant successivement les unes après les autres. C'est pourquoi, nous pouvons envisager deux différentes sections. Elles sont réalisées en sélectionnant un sens d'intersection différent des trajectoires du portrait de phase avec le plan passant par la première bissectrice.

La première section est définie par:

$$P_+ = \{(X, Z) \in \mathbb{R}^2 \mid X = Y, \dot{X} > 0\} \quad (2.46)$$

et la seconde par

$$P_- = \{(X, Z) \in \mathbb{R}^2 \mid X = Y, \dot{X} < 0\} \quad (2.47)$$

Nous remarquons facilement que l'intersection des trajectoires avec le plan de Poincaré P_+ (Fig. 2.43) forme une structure repliée (imaginez l'intersection d'un ruban légèrement plié avec un plan: vous obtenez une figure en "U"). Cette structure double est une signature du doublement de fréquence induit par l'artéfact de mesure. L'application de premier retour n'apporte rien de plus (Fig. 2.44). Sur la deuxième section P_- , nous retrouvons une configuration similaire mais cette fois le repliement est plus écrasé (Fig. 2.45). L'application de premier (Fig. 2.46) ne fournit aucune information supplémentaire.

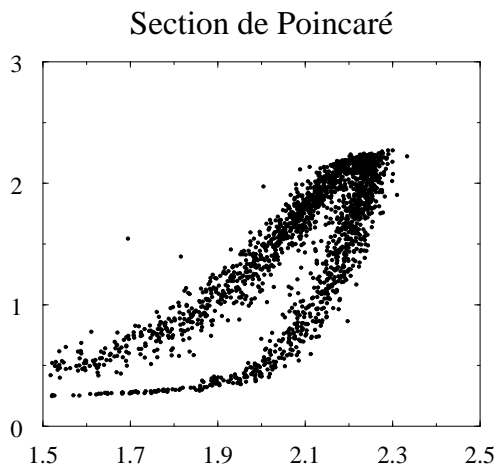


Figure 2.43: *Section de Poincaré sur les trajectoires de la partie supérieure du portrait de phase. ($d = 25.50$ mm)*

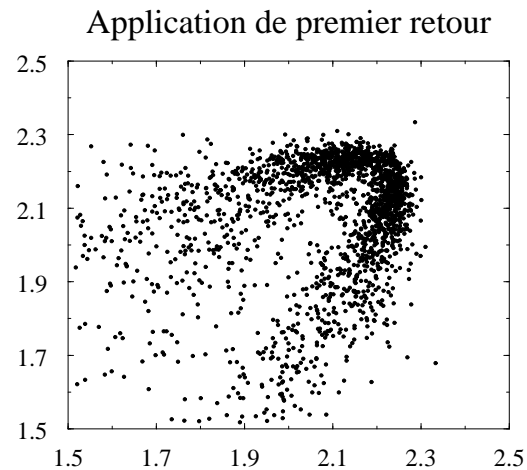


Figure 2.44: *Application de premier retour sur les abscisses de la section de Poincaré (cf. fig 2.43). ($d = 25.50$ mm)*

Sur le deuxième type de section P_- , nous retrouvons un même type de distinction sur la section de Poincaré, mais pas sur l'application de premier retour (cf. figures 2.45 et 2.46).

De manière à pallier l'artéfact de mesure, c'est à dire le doublement de fréquence, nous pouvons sélectionner uniquement les intersections se plaçant sur une seule branche de la configuration en "U" (Fig. 2.47). La branche choisie regroupe en réalité l'ensemble des minima que prend le diamètre local. A première vue, l'application de premier retour sur les abscisses de ces minima ne présente pas de structure particulière (Fig. 2.48). Par contre, en numérotant par ordre d'apparition les intersections, nous retrouvons le mécanisme

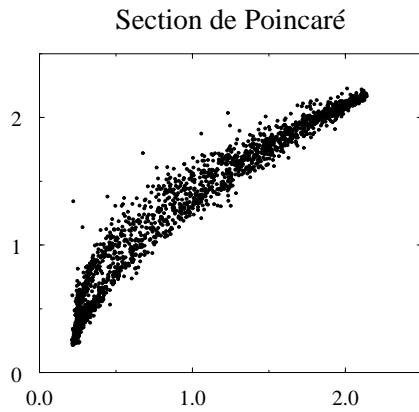


Figure 2.45: *Section de Poincaré sur les trajectoires de la partie inférieure du portrait de phase. ($d = 25.50$ mm)*

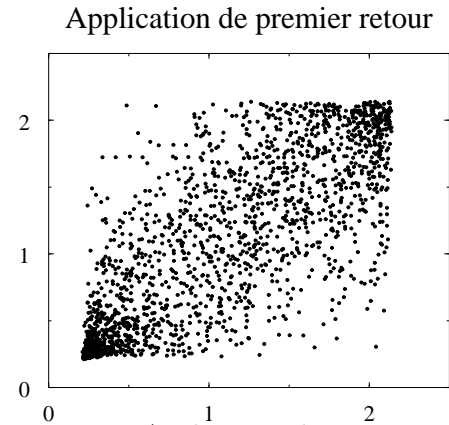


Figure 2.46: *Application de premier retour sur les abscisses de la section de Poincaré (cf. fig 2.45). ($d = 25.50$ mm)*

d'arrivées successives de perturbations par "bouffées" caractéristiques des phénomènes d'intermittence. Ce type de fonctionnement est déjà visible sur la série temporelle (Fig.2.49). Néanmoins, ce phénomène d'intermittence ne peut être étudié à partir des séries temporelles en raison de l'artéfact de mesure. Nous verrons que les mesures par ombroscopie (Chapitre 3) nous permettront d'aller plus loin dans cette analyse du comportement du jet libre.

Notons enfin qu'une analyse analogue à celle d'une "dynamique symbolique" (chapitre 4) nous permettra de déceler une forte composante déterministe au sein de ce comportement dynamique et de réaliser une première distinction entre un jet d'eau dont le point de fonctionnement se situe avant le point critique sur la courbe de stabilité, tel celui étudié ici et un jet d'eau ayant dépassé la vitesse critique (partie descendante de la courbe de stabilité). Ici, nous ne présentons pas ces résultats qui se sont avérés dérisoires en comparaison aux résultats obtenus sur les mesures par ombroscopie.

Dynamique du jet après la rupture en gouttes $d > 29.50$ mm

L'organisation des trajectoires sur le portrait de phase (Fig. 2.50), à l'origine de la définition de cette partie du jet, a lieu à partir de la rupture en gouttes ($L_{BU} = 29.3$ mm). Ce n'est pas un hasard, car cela correspond à la relaxation des oscillations de gouttes vers une forme stable, sphérique. Cependant, on ne peut pas conclure sur la nature de la forme des gouttes et l'éventuelle relaxation de leurs oscillations tant que l'on a pas un suivi complet (sans artéfact) de l'évolution temporelle du diamètre du jet, de la sortie de la buse à la rupture en gouttes.

La section de Poincaré P_+ (Fig. 2.51) et la densité de probabilité de visite sur les abscisses de cette section (Fig. 2.52) permettent de distinguer deux types de gouttes de diamètres différents: les gouttes principales, et les satellites. L'application de premier retour (Fig. 2.53) permet de constater l'alternance du passage entre gouttes et satellites. La densité de points sur les quatre ensembles composant l'application de premier retour permet aussi de dire qu'il est très rare de voir deux satellites passer devant la nappe laser

l'un à la suite de l'autre, sans que ne s'intercale une goutte entre les deux.

Conclusion

Nous pouvons distinguer facilement la rupture en gouttes, notamment sur l'évolution des modes en fonction de la distance. Et nous avons grossièrement distingué quelques traits de la dynamique, comme l'arrivée par bouffées des ondes de perturbations à la surface du jet. Cependant, nous avons vu clairement que les artéfacts sur les mesures brouillent systématiquement la lecture que nous pouvons avoir de la dynamique du jet.

2.6 Conclusion

L'artéfact de mesure nous a été utile pour la description de la dynamique du jet excité. Il nous a permis de faire la distinction entre les oscillations de jet et les perturbations axisymétriques. Malgré cela, il rend impossible une étude précise de la dispersion des trajectoires sur le portrait de phase. En effet, l'organisation des trajectoires sur un portrait de phase ne peut être pertinente que si la grandeur mesurée est représentative de l'évolution d'une variable dynamique du jet.

Le dispositif actuel ne permet pas l'acquisition de signaux dépendant linéairement du diamètre du jet sur tout le domaine d'amplitude des perturbations (axisymétriques). Les simulations mettent clairement en évidence la nature du problème. Différentes possibilités d'améliorations de cette technique de mesure, basées sur l'augmentation de l'angle solide de collection ont été envisagées mais se sont révélées insuffisantes¹⁹.

De manière à fournir une étude plus fine des jets cylindriques et, notamment, afin de comparer les différents modes de rupture dont nous savons qu'ils sont pilotés par des mécanismes différents (dominés par la tension de surface, les forces aérodynamiques, les caractéristiques internes à l'écoulement), il faut envisager une méthode basée sur un principe de mesure complètement différent.

C'est donc les résultats de cette nouvelle méthode qui sont présentés dans le chapitre suivant.

¹⁹Pour une description complète des améliorations successives apportées au dispositif expérimental, voir le rapport interne [31].

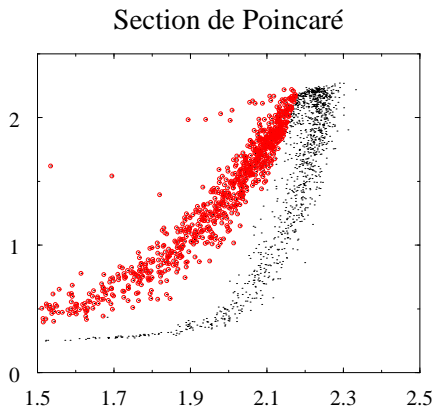


Figure 2.47: Sélection des points d'une des branches de la section de Poincaré.

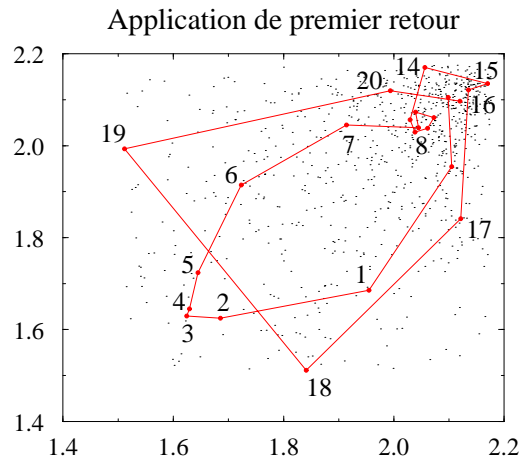
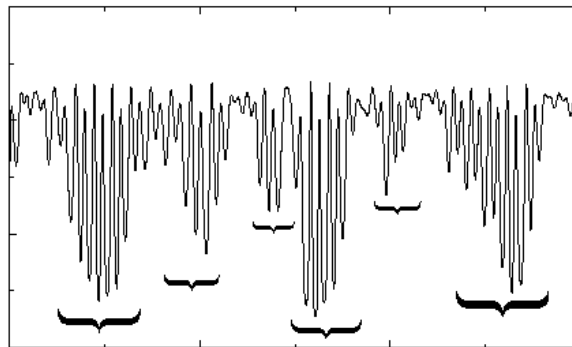


Figure 2.48: Application de premier retour sur les abscisses des points sélectionnés. Deux "bouffées" sont représentées par les points reliés entre eux et numérotés de 1 à 8, puis 14 à 20.



⎵ : Bouffées

Figure 2.49: Visualisation des bouffées sur la série temporelle.

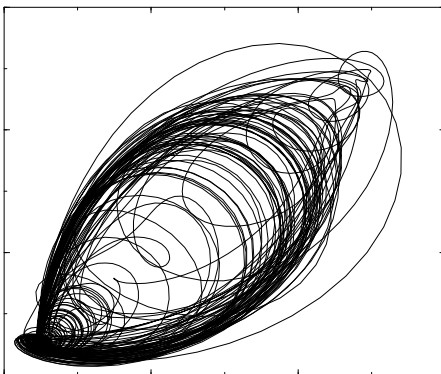


Figure 2.50: Portrait de phase à $d = 34.00$ mm. Le décalage est égal à $\tau = 3 \cdot 10^{-2}$ ms $\simeq 1/90 F_{Ray}$.

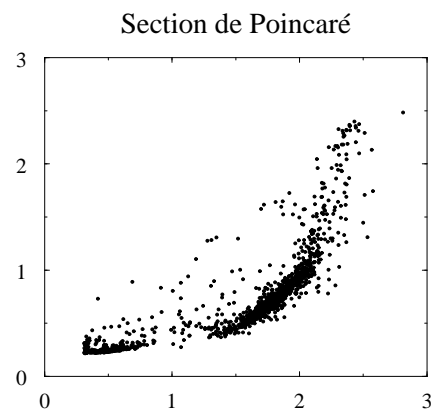


Figure 2.51: Section de Poincaré à $d = 34.00$ mm.

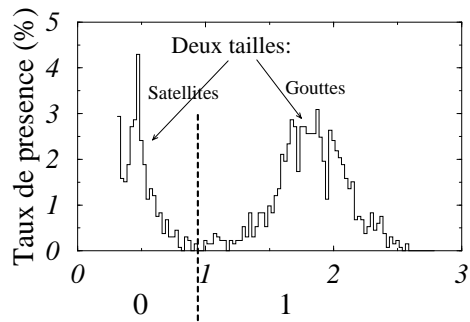


Figure 2.52: *Histogramme représentatif de la fonction densité de probabilité de visite sur la section de Poincaré à $d = 34.00$ mm.*

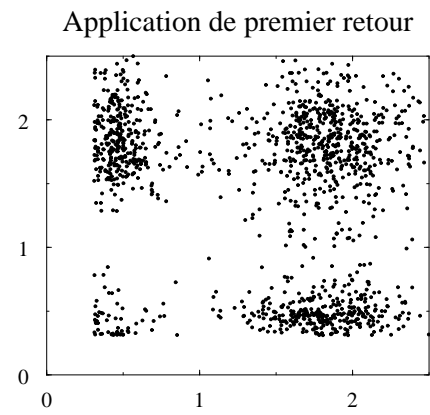


Figure 2.53: *Application de premier retour à $d = 34.00$ mm.*

Bibliography

- [1] G. E. Cossali and A. Coghe. A new laser based technique for instability growth rate evaluation in liquid jets. *Experiments in fluids*, **14**:233–240, 1993.
- [2] A. J. Yule and D. G. Salters. A conductivity probe technique for investigating the breakup of diesel sprays. *Atomization and Sprays*, **4**:41–63, 1994.
- [3] P.Jr. Seleglim and E. Hervieu. Direct imaging of two-phase flows by means of electrical conductivity. *Proceedings of the International Conference on Multiphase flow, ICMF'98*, 1998.
- [4] J. H. Xing, A. Soucemarianadin, and P. Attane. Experimental study of the breakup of viscoelastic fluid jets. *Proceedings de la 6^{ème} Int. Conf. on liquid Atomization and Sprays Syst. (6^{ème} ICLASS), Rouen*, 1994.
- [5] S. Leroux, C. Dumouchel, and M. Ledoux. The stability curve of Newtonian liquid jets. *Atomisation and Sprays*, **6**(6), 1996.
- [6] J. B. Blaisot, D. Allano, and M. Ledoux. *8^{ème} Ann. European Conf. on Liquid Atomization and Spray Systems, Amsterdam*, pages 271–276, 1992.
- [7] J. B. Blaisot, M. Ledoux, D. Ducret, and J. Vendel. A new monosized drop generator: monitoring of isolated drop or drop packet. *J. of Aerosol Science*, **25**(1):s231–s232, 1994.
- [8] P. Bergé, I. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, Paris, 1984.
- [9] C. Letellier, F. Onofri, J. L. Letoulouzan, B. Maheu, G. Gouesbet, and G. Gréhan. On the breakup of a liquid jet : characterization of the time series by topology of the reconstructed state space. *Partec 95, 11^{ème} European Conference of ILASS-Europe on Atomization and Sprays*, Mars 1995.
- [10] J. Godelle, G. Fougereux, C. Letellier, J.N. Letoulouzan, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Etude de l'atomisation d'un jet: vers une prédiction de la taille des gouttes. *Proceedings de la 11^{ème} COFERA(e), CNAM, Paris*, 1995.
- [11] H.C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Dover Publication, Inc., New York, 1981.

- [12] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986.
- [13] F. Savart. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. de Chim.*, **53**:337–86, 1833.
- [14] G. Magnus. Hydraulische Untersuchungen. *Ann. Phys. Chem.*, **95**(171):1–59, 1855.
- [15] Lord Rayleigh. On the instability of jets. *Proc. London Math. Soc.*, **10**:4–13, 1878.
- [16] J. M. Schneider and C. D. Hendricks. *Rev. Sci. Instrum.*, **35**:134, 1964.
- [17] N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and R. S. Shaw. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, **45**(9):712–716, 1980.
- [18] *J. Gleick. La théorie du chaos.*
- [19] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**:130–141, 1963.
- [20] H. D. I. Abarbanel. *Nonlinearity and Chaos Engineering Dynamics*, chapter Analysing and utilizing time series observations from chaotic systems, pages 379–391. J. M. T. Thompson, S. R. Bishop and John Wiley, 1995.
- [21] Th. Buzug and G. Pfister. Optimal delay time and embedding dimension for delay-time coordinates by analysis of the global static and local dynamical behavior of strange attractors. *Physical Review A*, **45**(10):7073–7984, 1992.
- [22] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, and L. Sh. Tsimring. The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Review of Modern Physics*, **65**(4):1331–1388, 1993.
- [23] F. Takens. *Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, Warwick 1980*, volume **898**, chapter Detecting Strange Attractors in Turbulence, pages 366–381. D. A. Rand and L. S. Young, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [24] C. Letellier. *Caractérisation topologique et reconstruction d'attracteurs étranges*. Thèse de l'université de Paris 7, 1994.
- [25] P. Cvitanović. Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos. *Physica D*, **51**:138–151, 1991.
- [26] P. Dutertre. *Caractérisation des attracteurs étranges par la population d'orbites périodiques*. Thèse de l'université de Rouen, 1995.
- [27] C. Letellier, P. Dutertre, and B. Maheu. Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization. *Chaos*, **5**(1):271–282, 1995.

-
- [28] C. Letellier, P. Dutertre, and G. Gouesbet. Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field. *Physical Review E*, **49**(4):3492–3495, 1994.
- [29] M.C.Yuen. Non-linear capillary instability of a liquid jet. *J. Fluid Mech.*, **33**:151–163, 1968.
- [30] D. B. Bogy. Drop formation in a circular liquid jet. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**:207–228, 1979.
- [31] J. Godelle. Description des tentatives d’améliorations de la méthode de mesure du diamètre d’un jet translucide par diffusion d’une nappe laser: techniques pour augmenter l’angle solide de collection. *Rapport interne*, CORIA - UMR 6614 / LESP, Rouen, France, Février-Mars 1998.

Chapter 3

Mesures par ombroscopie

Résumé

Les mesures par ombroscopie sont présentées, expliquées et surtout, validées. Les séries temporelles acquises avec cette méthode vont permettre de suivre la dynamique complète du diamètre du jet, sans troncature due à un artéfact sur la mesure comme cela était le cas dans le chapitre précédent. Une comparaison directe des deux méthodes de mesure est bâtie autour du cas d'un jet d'eau excité transversalement. Une fois montré l'intérêt de cette nouvelle méthode de mesure, nous mettons en évidence une intermittence de phases sur l'évolution du diamètre du jet, dans le cas jet d'eau excité autant que dans le cas du jet d'eau libre. Finalement, l'étude de la dynamique de jets de classes différentes (cf. chapitre 1, distinction des trois zones, section 1.3.4) permet de donner des indices pour une meilleure compréhension de l'action de la relaxation du profil des vitesses dans le jet.

3.1 Introduction

Nous avons vu précédemment qu'une méthode de mesure bâtie autour de la diffusion d'une nappe laser ne permet pas un suivi continu de la valeur d'un diamètre local d'un jet axisymétrique. La première partie de ce chapitre est donc consacrée à la description et à la validation d'une méthode expérimentale permettant l'enregistrement complet, sans artéfact, de cette évolution. Mieux, nous verrons en fait que ce dispositif mesure la taille d'une section transverse du jet, qu'il soit symétrique ou non.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous comparerons les séries temporelles acquises simultanément avec la technique de diffusion de la nappe laser et avec la nouvelle technique de mesure. Le système étudié sera un jet d'eau excité transversalement. Nous pourrons alors évaluer l'amélioration de la qualité des informations extraites de ces nouveaux enregistrements avec l'étude de la dynamique de ce jet d'eau excité. Nous verrons que dans le cas précis des déplacements transverses, l'utilisation simultanée des deux méthodes peut fournir des renseignements complémentaires. Cette partie sera l'occasion de dresser le bilan des études de la dynamique du jet d'eau excité transversalement.

Dans la troisième partie de ce chapitre, nous nous attacherons à l'étude de la dynamique

d'un jet d'eau libre à partir des différents enregistrements de l'évolution du diamètre du jet. Nous verrons que la dynamique du diamètre du jet y est complète contrairement aux mesures effectuées par diffusion de la lumière (cf. chap. précédent). Nous y présenterons aussi la plupart des outils qui vont permettre de distinguer différents régimes de fonctionnement d'un jet liquide libre basse vitesse.

C'est sur la base des résultats de cette étude qu'une analyse systématique de la dynamique de différents types de jets a été réalisée. Dans la section 3.4, le bilan de cette campagne d'analyse est dressé. Nous pourrions constater les différences dans les dynamiques associées aux jets de zone 1 et zone 3 telles qu'elles ont été définies dans les travaux de Leroux *et al.* [1] (Voir chap. 1, section 1.3.4).

3.2 Montage optique

3.2.1 Description du dispositif

La technique de mesure présentée ici demeure basée sur une nappe laser. Seul le dispositif de collection est modifié (Fig. 3.1). Il s'agit en fait d'une méthode de mesure par ombroscopie: l'ombre du jet éclairé par la nappe laser est portée sur le dispositif de collection. En optique géométrique, la taille de la "tache" sombre est proportionnelle au diamètre de la section éclairée de l'objet. Dans le cas du jet éclairé par une nappe laser, cette grandeur est proportionnelle à la taille de la section transverse "vue" par la nappe laser. Dans le cas d'un jet axisymétrique, nous pouvons ainsi exprimer l'intensité mesurée, I , en fonction du diamètre local Φ du jet:

$$I = I_{max} \left(1 - \frac{M\Phi}{\delta} \right) \quad (3.1)$$

où I est l'intensité mesurée, et I_{max} , l'intensité maximale mesurée lorsque le diamètre du jet est nul (pas d'objet devant la nappe laser); δ est la largeur de la fente d'analyse; Φ est le diamètre de la section du jet éclairée par la nappe laser; et M est un facteur d'agrandissement correspondant au grossissement de l'ombre du jet en raison de la divergence du faisceau incident.

Lorsqu'il n'y a pas d'objet devant la nappe laser, l'intensité maximale correspond à l'intensité de la lumière passant par la fente. La relation suivante permet de remonter au diamètre du jet par la relation de proportionalité:

$$\Phi \propto \left(1 - \frac{I}{I_{max}} \right) \quad (3.2)$$

Ces relations ne tiennent pas compte de la complexité des mécanismes de diffusion de la lumière. Aux petits angles de diffusion, c'est à dire dans un angle solide orienté dans la même direction et dans le même sens que la nappe laser, la diffraction et la lumière transmise par le jet contrôlent l'allure du diagramme de diffusion. Par exemple, des franges de diffraction vont apparaître, interdisant la définition d'un bord net séparant l'ombre du faisceau "nappe laser" direct (figure 3.2).

Deux cas se distinguent alors: (i) le cas d'un objet opaque pour lequel le problème ne fait intervenir que la diffraction; (ii) le cas d'un objet translucide pour lequel la partie transmise par une double réfraction (entrée et sortie de l'objet) intervient aussi.

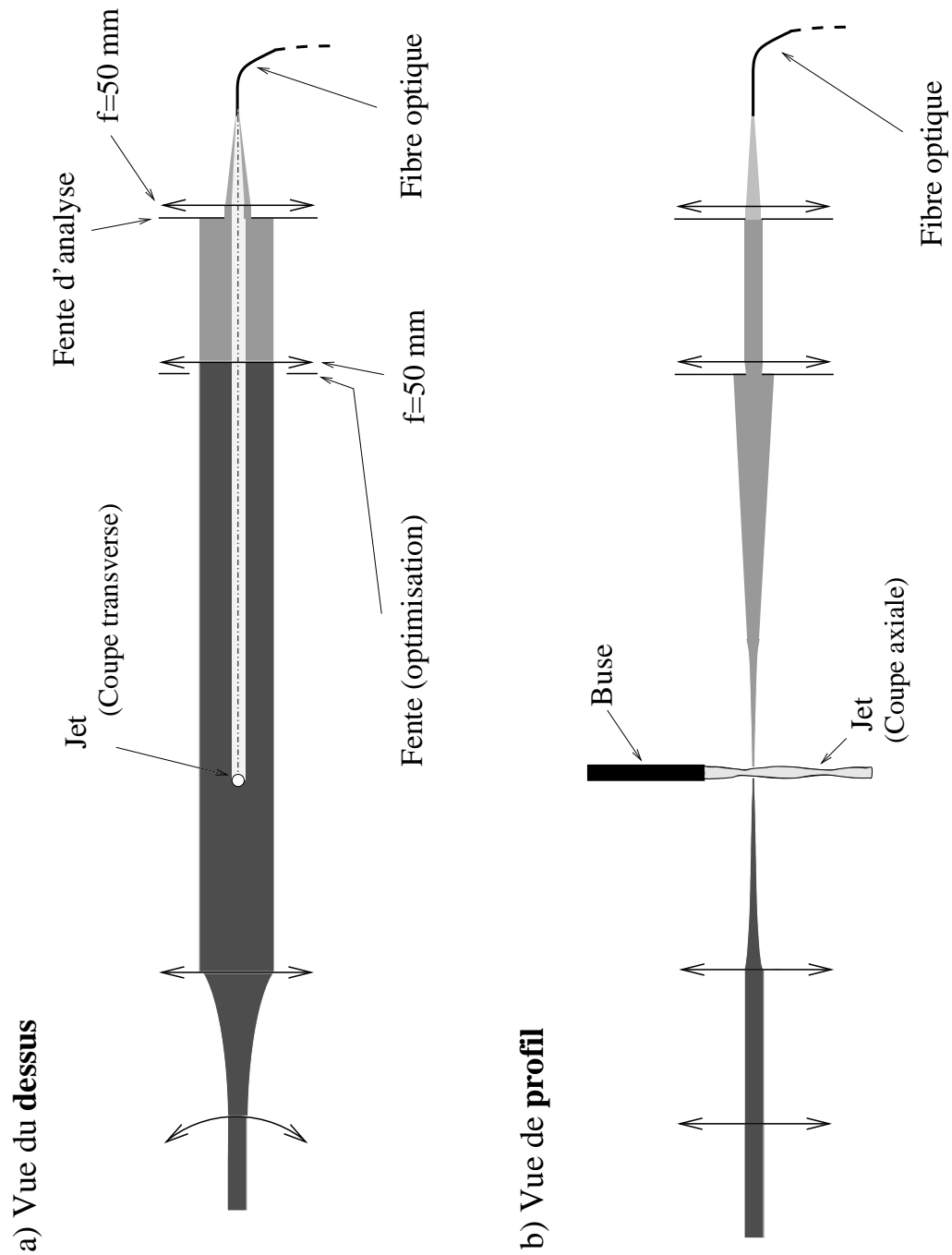


Figure 3.1: Principe de l'ombroscopie: a) Vue du dessus; b) Vue de profil. L'éclairage du jet est toujours réalisé par la nappe laser d'épaisseur $40 \pm 10 \mu\text{m}$ et de largeur de l'ordre de 5cm.

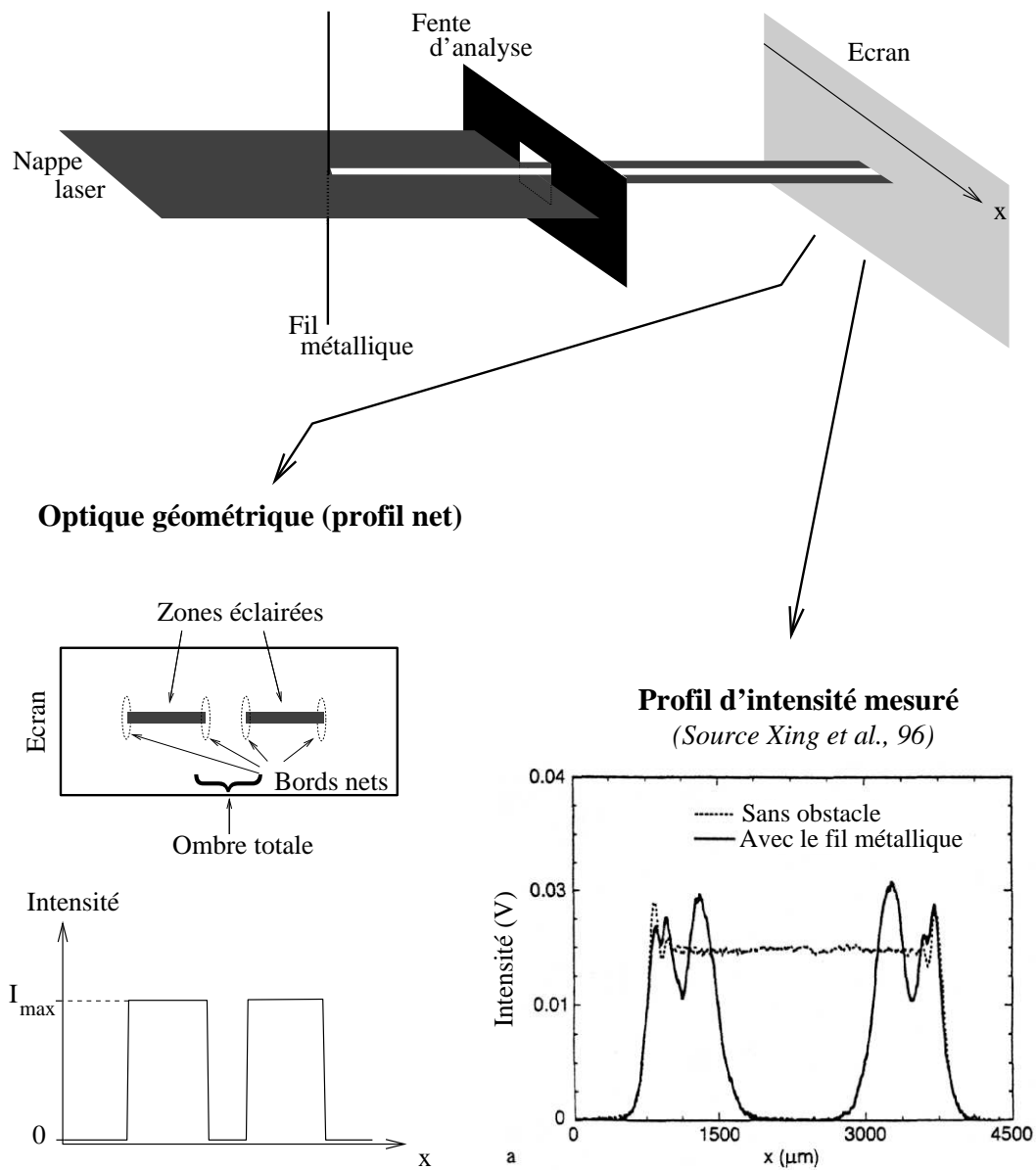


Figure 3.2: L'ombre, portée sur un écran, d'un fil éclairé par une source lumineuse monochromatique montre un bord flou. Globalement le profil de diffusion créé par ce système est complexe, et dépend de la nature de la source lumineuse, des dimensions de l'objet et de la distance objet-écran. a) Cas des bords nets dans le modèle de l'optique géométrique; b) Profil d'intensité mesuré par Xing et al. dans le cas d'un fil métallique de $51\mu\text{m}$ de diamètre où nous constatons l'action de la diffraction sur les bords du fil. L'intensité totale intégrée sur toute la longueur de la fente d'analyse est pourtant proportionnelle au diamètre du jet dans les deux cas.

Pour simplifier l'exposé, nous allons maintenant nous focaliser sur le cas d'un objet purement cylindrique. A cause de la symétrie cylindrique qui résulte de ce choix, le diagramme de diffusion se réduit à un profil d'intensité donnant les variations d'intensité en fonction de l'angle θ , défini dans un plan horizontal par rapport à la direction des rayons incidents, donnant la direction de propagation du faisceau diffusé par rapport à la direction incidente.

Dans le premier cas (*i*), une étude expérimentale [2] prouve que la relation (3.2) reste vraie, même pour de petits diamètres où l'intervention de la diffraction dans le profil d'intensité est pourtant plus importante. Notons que la notion de petits diamètres est fonction de la valeur de la longueur d'onde de la source laser (de l'ordre de $0.6\mu m$ dans cette étude [2] et pour ce travail de thèse). En fait, Xing *et al.* utilisent deux sources de lumière, l'une monochromatique, l'autre blanche, et s'assurent dans chaque cas que l'intensité mesurée reste proportionnelle aux diamètres des différents fils métalliques placés devant leur dispositif. En pratique, l'effet de la diffraction devrait être accentué dans le cas d'une source de lumière laser monochromatique en comparaison à une source de lumière blanche puisque dans le dernier cas il y a superposition des figures de diffractions relatives à chaque longueur d'onde. Pourtant, même si grâce à leur dispositif, ils observent effectivement les pics de diffraction, ils concluent que le rapport des intensités totales mesurées en présence et en absence de fil est égal, à 1% près, au rapport $(\delta - D_f)/\delta$ où δ est la largeur de la fente que j'ai appelée *fente d'analyse* dans la figure 3.1, et D_f est le diamètre du fil. Ce résultat a été extrapolé à tout objet axisymétrique non nécessairement cylindrique, et de toutes tailles, même inférieures au diamètre du fil le plus fin qu'ils aient pu utiliser ($21\mu m$). La validation de cette méthode est assurée par des mesures de diamètres de jets liquides opaques axisymétriques grâce auxquels différents profils du jet sont reconstruits. Les profils reconstruits sont identiques aux profils réels des photographies du jet.

Par conséquent, leur conclusion est que la diffraction a un effet négligeable sur la mesure du diamètre du jet. Il en déduisent que la diffraction modifie l'allure du profil d'intensité diffusée aux petits angles, mais ne change pas la valeur de l'intensité totale intégrée par l'ensemble de détection.

Dans le cas d'un jet liquide translucide (*ii*), une partie de la lumière traversant le jet est transmise par une double réfraction. Cet effet s'ajoute à l'action de la diffraction discutée précédemment. Cependant une théorie complète de la diffusion de la lumière indique que ces effets ne peuvent être décorrélés et traités séparément car ils interagissent et ne sont donc pas décomposables. Il est nécessaire, pour être rigoureux, de traiter dans son ensemble le problème de la diffusion de la nappe laser sur un objet cylindrique transparent, sans faire de distinctions entre lumière diffractée et transmise. Cependant, il est toujours possible de raisonner en ordre de grandeur sur l'intensité de ces deux composantes de la lumière diffusée. En effet, la lumière interceptée par le jet est "redistribuée" dans tout l'espace par réflexion sur la surface d'entrée (mode 0 de rétrodiffusion), et par réfraction sur la surface d'entrée puis réflexion(s) interne(s) (mode p quelconque). Expérimentalement, comme lors des simulations basées sur l'optique géométrique (chapitre II), j'ai pu constater que la majeure partie de l'intensité incidente interceptant le jet est souvent suffisamment déviée pour ne

pas être détectée par le dispositif de collection. Cela peut arriver lorsque le jet présente une surface inclinée par rapport au plan normal à la direction incidente. Mais surtout, la majeure partie de la lumière interceptant le jet est suffisamment redistribuée dans l'espace, par diffusion, pour que cette contribution parvenant au détecteur soit négligeable par rapport à l'intensité du faisceau direct non intercepté par le jet (incluant les franges de diffraction induites par le passage de la lumière aux bords du jet). En fait, autant expérimentalement que lors de l'examen des résultats de simulations (voir chapitre précédent, figures 2.17 et 2.20), le champ diffusé montre que l'effet du jet sur la partie de la lumière laser interceptée par celui-ci est comparable à l'effet d'une lentille cylindrique de focale très faible. Le résultat de cette optique particulière est une autre nappe laser d'étendue très importante ($\pm 82.6^\circ$, correspondant à l'angle maximal de double réfraction sur le volume du jet) redistribuant l'énergie lumineuse interceptée par le jet sur une grande répartition angulaire (Fig. 3.3).

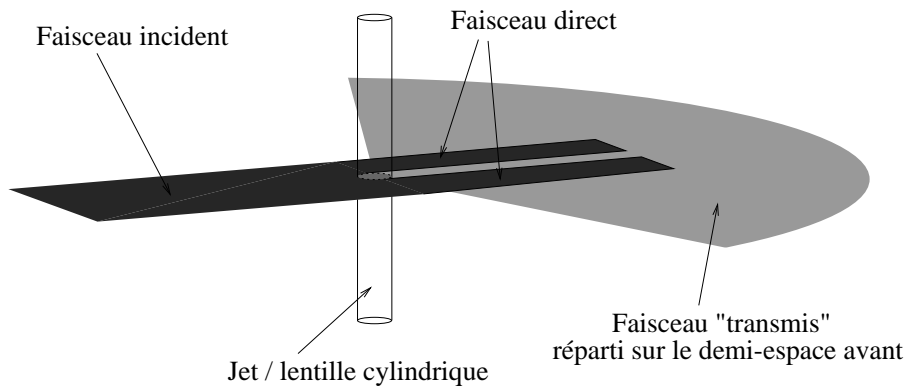


Figure 3.3: *Le jet agit comme une lentille cylindrique de courte focale. Le champ "transmis" par le jet est redistribué dans la majeure partie du demi-espace avant. Le simple éloignement du détecteur permet donc de négliger cette contribution au signal mesuré. Notons que la partie de la lumière redistribuée dans l'espace par réflexion n'est pas schématisée sur la figure.*

Il est facile de comprendre que plus le détecteur est placé loin du jet, plus l'angle solide de collection est faible. Cela diminue d'autant le rapport de l'intensité du champ "transmis" sur celle du faisceau direct non perturbé dont la divergence est négligeable comparée à celle de la nappe laser sortant du jet.

En conséquence, une précaution permet de diminuer autant que l'on veut ce rapport en plaçant suffisamment loin le dispositif de collection par rapport au jet, au regard de la taille de la section éclairée du jet. En pratique, la distance choisie est approximativement égale à 1000 rayons moyen du jet.

Cette précaution prise, le problème de la mesure du diamètre du jet par ombroscopie revient au cas de la mesure du diamètre d'un jet opaque.

Ainsi, nous pouvons nous attendre à ce que la méthode développée ici fournisse une

mesure linéairement dépendante du diamètre local du jet éclairé par la nappe laser. La confirmation de cette hypothèse est présentée dans le paragraphe suivant.

3.2.2 Validation de la méthode de mesure

Le but ici est de calibrer la méthode de mesure dans un cas particulier, le moins favorable, et donc d'établir, pour une classe d'objets donnés, la courbe expérimentale donnant l'intensité mesurée en fonction du diamètre de la section éclairée de l'objet. Du point de vue de l'interprétation réalisée précédemment, nous pouvons dire que le cas le moins favorable correspond au passage d'une partie du champ "transmis", c'est à dire de la lumière interceptée par l'objet et doublement réfractée par celui-ci, dans l'angle solide de détection. C'est le cas pour une fibre cylindrique non inclinée par rapport à la nappe laser incidente.

La technique de mesure est donc ici calibrée pour un ensemble de fibres de verre cylindriques ayant un diamètre variable mesuré au préalable ¹. Nous obtenons la courbe de calibration donnée figure 3.4. Nous pouvons constater que, aux incertitudes de mesures près, l'intensité mesurée est bien une fonction linéaire du diamètre réel de la fibre.

Calibration de l'ombroscopie

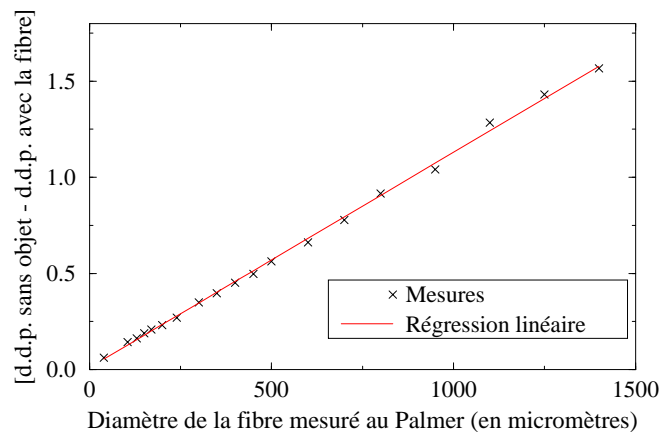


Figure 3.4: Validation de la méthode de mesure du diamètre du jet par ombroscopie. Il existe bien une relation linéaire entre l'intensité mesurée (différence entre le signal mesuré sans objet et le signal mesuré avec la fibre) et le diamètre de la section éclairée du jet.

D'autres types d'objets, de forme sphérique par exemple, ont été placés devant notre sonde optique. Le diamètre éclairé, mesuré au préalable, correspond au diamètre obtenu en reportant l'intensité mesurée sur la courbe précédente. Ceci étend donc le domaine de validité de cette calibration, mais surtout prouve définitivement que cette technique permet effectivement de mesurer le diamètre d'objets dont la taille est comprise entre $40\mu m$ et $1.4mm$: domaine sur lequel j'ai réalisé la calibration avec des fibres de verre.

¹Mesure faite simplement à l'aide d'un Palmer.

3.3 Diffusion et ombroscopie dans le cas d'un jet d'eau excité

Dans cette expérience, j'ai repris un point de fonctionnement proche de celui présenté au chapitre précédent dans le cas du jet excité. Le but est de réaliser des mesures simultanées en diffusion et en ombroscopie de manière à comparer la qualité de l'information sur la dynamique que nous pouvons atteindre avec l'une et l'autre méthode. La méthode de mesure en ombroscopie est celle qui a été décrite jusqu'à maintenant. La technique "en diffusion" correspond au dispositif initial pour lequel la première lentille de collection est placée à la distance focale, à 20cm du jet. Cela correspond aussi au cas détaillé dans ce mémoire où l'angle solide de collection est le plus petit (voir chapitre précédent).

Le jet a les caractéristiques suivantes:

- 1- Diamètre nominal du jet sensiblement égal à $\Phi = 600\mu\text{m}$,
- 2- Rapport de la longueur de la buse sur son diamètre interne égal à $L/\Phi = 200$,
- 3- Vitesse débitante égale à 0.81m/s^2 ,
- 4- L'excitation imposée est transverse, sinusodale, et de fréquence $F_e \sim 366\text{ Hz}$,
- 5- Le liquide injecté est de l'eau.

La seule différence notable entre ce point de fonctionnement et celui de l'étude du jet excité au chapitre précédent concerne la valeur du débit ³. Cependant, comme dans le cas du chapitre précédent, ce débit nous permet de garantir un fonctionnement du jet non-excité selon la description de Rayleigh. De la même manière, nous nous sommes assurés que le jet était pratiquement monodispersé.

La longueur de rupture calculée sur les photographies prises au cours de l'expérience est de 17 mm . Elle est donc légèrement supérieure à l'étude précédente, malgré une valeur plus faible du débit. Cela s'explique par le fait que l'intensité de l'excitation est elle aussi plus petite dans le cas présent que lors de la précédente étude du jet excité ⁴.

La double acquisition des séries temporelles, en diffusion et en ombroscopie, a été réalisée par pas de 0.25 mm de la sortie de la buse jusqu'aux gouttes. Ce déplacement le long de l'axe du jet décrit l'intervalle $[0.00\text{ mm}, 21.00\text{ mm}]$. L'évolution des enregistrements en fonction de leur position est donnée en annexe C sur les figures C.1 pour les mesures par diffusion, et C.2 pour les mesures par ombroscopie. Seulement quelques positions ont été choisies pour représenter l'évolution globale le long de l'axe du jet. Ces positions sont repérées sur la figure 3.5.

²En fait, cette grandeur dérivait au cours de l'expérience de 1% environ en croissant à cause des effets de gravité sur la pression d'alimentation lorsque l'on déplace l'ensemble d'injection.

³Précisons les valeurs des nombres sans dimension caractérisant ce jet: $Re = 485$, $We = 5.4$, et toujours $Z = 0.0048$.

⁴Il s'agit ici d'une information qualitative, car la mesure précise de cette intensité n'a pas été réalisée, le seul critère déterminant étant l'obtention d'un jet quasiment monodispersé.

3.3.1 Comparaison des deux dynamiques

La démarche adoptée lors de la première étude du jet excité est reprise. Nous allons décrire l'évolution des portraits de phase en fonction de la distance à la sortie de la buse. Encore une fois, le choix du décalage temporel en chaque point de mesure va nous donner une précieuse indication sur la nature des dynamiques associées à chacune des deux familles de séries temporelles.

Dans un premier temps, nous recourrons de nouveau à la méthode systématique d'extraction des orbites périodiques afin de présenter les évolutions de l'orbite la plus représentative pour chacune des méthodes de mesure.

Nous verrons que la nouvelle technique de mesure permet de poursuivre l'étude de la dynamique au delà de cette représentation en nous permettant une étude plus complète des dynamiques locales, c'est à dire des dynamiques temporelles associées à chaque point de mesure. Nous pourrions donc nous attacher à une analyse de la topologie de l'attracteur en se limitant à une reconstruction 3D du portrait de phase. Nous verrons quels renseignements peut fournir ce type d'analyse, et surtout nous proposerons un critère topologique permettant de déterminer si la dynamique mène ou non à la production de satellites.

Portraits de phases reconstruits - Diffusion

Les portraits de phase sont reconstruits de la même manière que précédemment. Nous utilisons donc la méthode du décalage temporel pour laquelle le choix du délai τ est primordial. La figure 3.6 représente l'évolution des portraits de phase pour les mesures par **diffusion de la lumière**. Comme pour les séries temporelles, les différentes positions le long de l'axe du jet sont repérées sur la figure 3.5.

Au regard de l'évolution des portraits de phase de la figure 3.6, nous pouvons déjà constater qu'il existe une différence entre cette expérience et celle qui a été réalisée précédemment sur un jet excité au chapitre 2 (Fig. 2.24). En effet, même si l'évolution des portraits de phase est comparable, la première partie de cette évolution correspondant à l'amortissement des oscillations de jet dues à l'excitation transverse est, dans le cas présent, restreinte à une petite portion. Au regard de tous les portraits de phase reconstruits (de 0.25 en 0.25 mm), ce tronçon va de la sortie de la buse d'injection jusqu'à environ 2.5 mm de cet orifice, et couvre donc une très faible partie de la longueur totale du jet (qui est environ égale à la longueur de rupture en gouttes: 16.5 mm) contrairement à la première expérience sur le jet excité où cette partie s'étale à peu près sur la moitié de la longueur totale.

Une autre différence majeure entre les deux expériences en jet excité réside dans le choix du décalage temporel pour la reconstruction des portraits de phase: initialement égales à $1/4F_e$ et $1/40F_e$, les valeurs du décalage τ prises pour cette analyse sont respectivement $1/14F_e$ et $1/140F_e$ pour la première et la deuxième partie de l'évolution. Cela peut s'expliquer par la grande sensibilité de la méthode de mesure par diffusion à la distance entre le jet et la première lentille de collection; et de manière plus générale, à la sensibilité de tous les réglages optiques concernant la collection. Cependant, cela n'enlève rien à la valeur des résultats, limitée par l'artéfact, ni à la comparaison avec la méthode de mesure par ombroscopie. On remarquera que le facteur 10 sur la valeur du décalage temporel entre les deux régions est préservé dans les deux expériences.

Notons aussi que la répartition des trajectoires sur les portraits de phase de 11.50 à 15.00 mm n'est pas aussi structurée que dans la première expérience réalisée sur un jet excité.

En fait, les deux effets que nous venons d'évoquer résultent du choix d'une amplitude d'excitation plus faible pour cette expérience que dans le cas précédent. L'amortissement des oscillations du jet dont l'amplitude initiale est moins importante se réalise nécessairement sur une distance plus courte car le taux de décroissance doit être identique dans les deux cas.

De la même façon, la dynamique associée au jet subissant une excitation initiale plus faible est nécessairement moins contrainte par cette excitation. La répartition des trajectoires sur les portraits de phase est donc moins structurée. Il faut tout de même noter que le portrait de phase à la distance de 20.00 mm , c'est à dire dans les gouttes, a une trajectoire bien structurée, construite autour d'un cycle limite. Ce résultat montre que malgré la grande dispersion des trajectoires dans les portraits de phase de 11.50 à 15.00 mm , le jet est finalement conduit à une dynamique structurée correspondant à l'obtention d'un jet monodispersé.

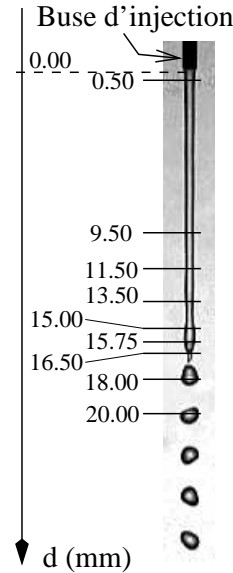


Figure 3.5: *Positions pour lesquelles les séries temporelles et les portraits de phase sont présentés dans ce mémoire. La région de la rupture en gouttes est mieux décrite car elle montre des évolutions plus rapides.*

Les décalages choisis reflètent encore la scission entre deux dynamiques. Cette fois, cette scission ne se situe pas exactement à la coupure entre la dynamique d'amortissement des oscillations de jet et celle de croissance des perturbations axisymétriques puisque les oscillations de jet sont amorties beaucoup plus tôt. Cependant cette distinction révèle toujours l'arrivée des modes axisymétriques associés à la présence de l'artéfact dans les mesures par diffusion, y introduisant une oscillation secondaire.

Portraits de phases reconstruits - Ombroscopie

Dans le cas de l'**ombroscopie**, l'évolution des portraits de phase est donnée sur la figure 3.8 pour les mêmes points de mesures le long de l'axe du jet que précédemment.

Dès à présent, nous pouvons constater les grandes différences existant entre les portraits de phase reconstruits à partir des signaux de diffusion et d'ombroscopie. Comme nous nous y attendions, le premier secteur correspondant à l'amortissement des oscillations de

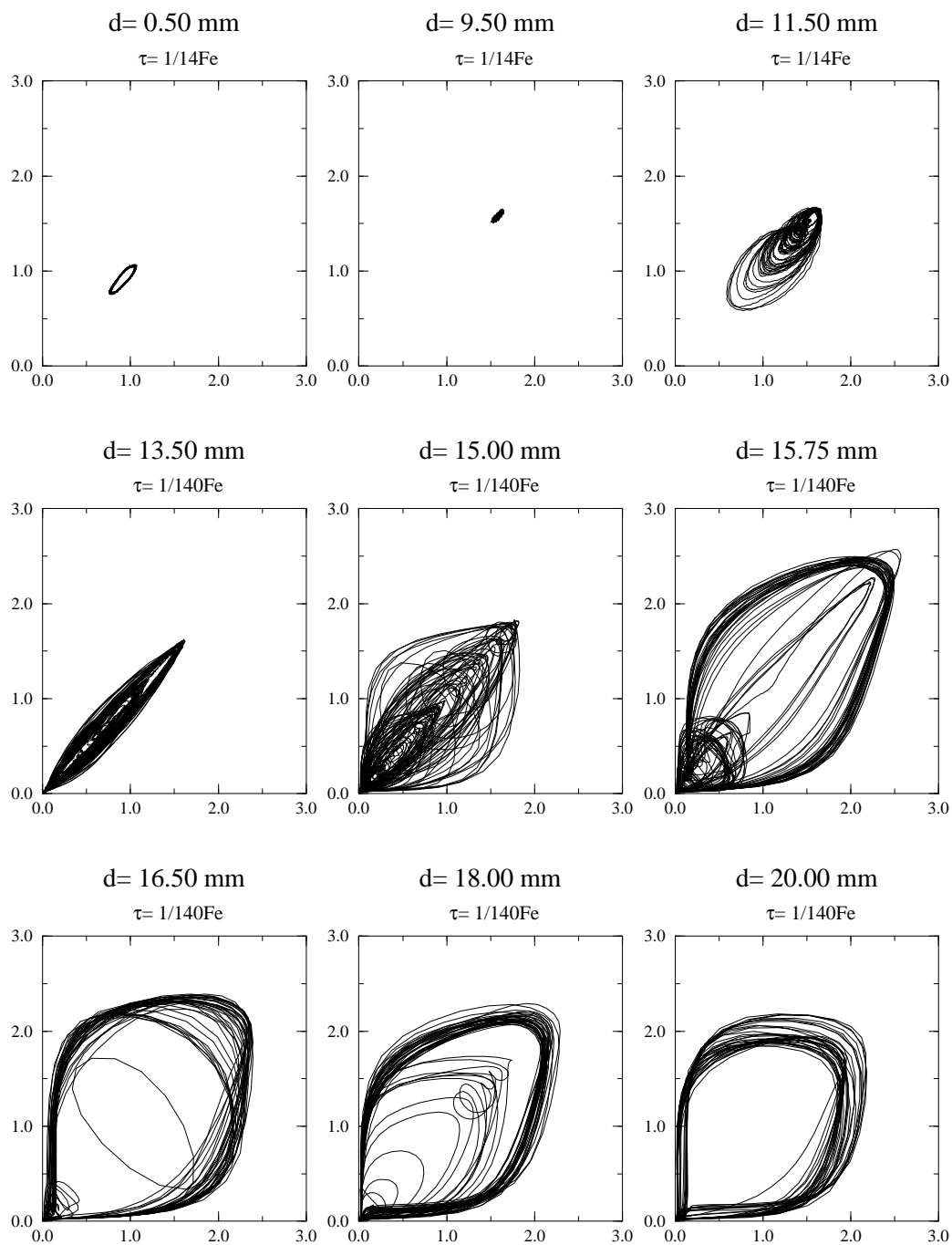


Figure 3.6: Evolution des portraits de phase reconstruits en six points de mesures le long de l'axe du jet par la méthode de diffusion de la lumière. Le choix du décalage temporel permet à nouveau de distinguer les deux parties correspondant au deux dynamiques différentes le long de l'axe du jet.

jet n'est pas vu par ombroscopie. De plus, la dispersion des trajectoires observée de 11.50 à 15.00 mm devient presque anecdotique en ombroscopie par comparaison aux mesures par diffusion. Cette distinction est spectaculaire si l'on considère en particulier les portraits à 15.00 mm . En diffusion, la dispersion est amplifiée par l'effet de l'artéfact sur les mesures. Ceci se traduit par une grande sensibilité de la mesure sur une certaine gamme de diamètres, mais révèle aussi le gros défaut de la méthode de mesure par diffusion qu'est l'artéfact dont nous avons longuement discuté au chapitre précédent.

Ce problème est encore mieux visible si nous comparons les portraits à 11.50 mm pour les deux types de mesures (Fig. 3.7). En diffusion, nous pouvons distinguer deux boucles produites par l'artéfact de mesure. Comme nous l'avons vu lors des simulations des mesures en diffusion, les maxima associés à ces deux boucles correspondent aux valeurs minimales et maximales que peut prendre le diamètre du jet. Ils représentent donc aussi les valeurs des extrema que nous pouvons extraire sur le portrait en ombroscopie. Cela signifie qu'à 11.50 mm la dynamique du diamètre du jet est déjà totalement tronquée lors des mesures par diffusion et, bien-entendu, correctement prises en compte par les mesures par ombroscopie.

a) Diffusion ($\tau = 1/14 Fe$) b) Ombroscopie ($\tau = 1/9 Fe$)

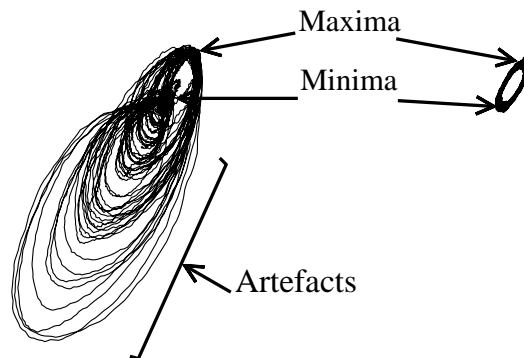


Figure 3.7: *Comparaison des portraits de phase à 11.50 mm pour les deux types de mesures: l'artéfact tronque déjà complètement la dynamique du diamètre du jet sur les mesures par diffusion (a). Ainsi, en diffusion, les maxima du signal correspondent alternativement aux maxima et minima du diamètre local.*

Enfin, notons que la valeur du décalage temporel reste identique pour la reconstruction de tous les portraits de phase le long du jet dans le cas de l'ombroscopie. Cette valeur, représentative de la pseudo-période caractéristique du signal considéré, est proche de celle d'un signal sinusoïdal de même fréquence (F_e): le décalage choisi vaut $1/9F_e$ contre $1/4F_e$ dans le cas idéal d'un signal sinusoïdal. Par comparaison aux valeurs du décalage dans le cas de la diffusion, nous en déduisons que le passage de $1/14F_e$ (proche de $1/9F_e$) à $1/140F_e$ après 11.50 mm est encore une fois lié à l'artéfact de mesure.

Nous voyons donc que les mesures réalisées en ombroscopie apportent un suivi complet

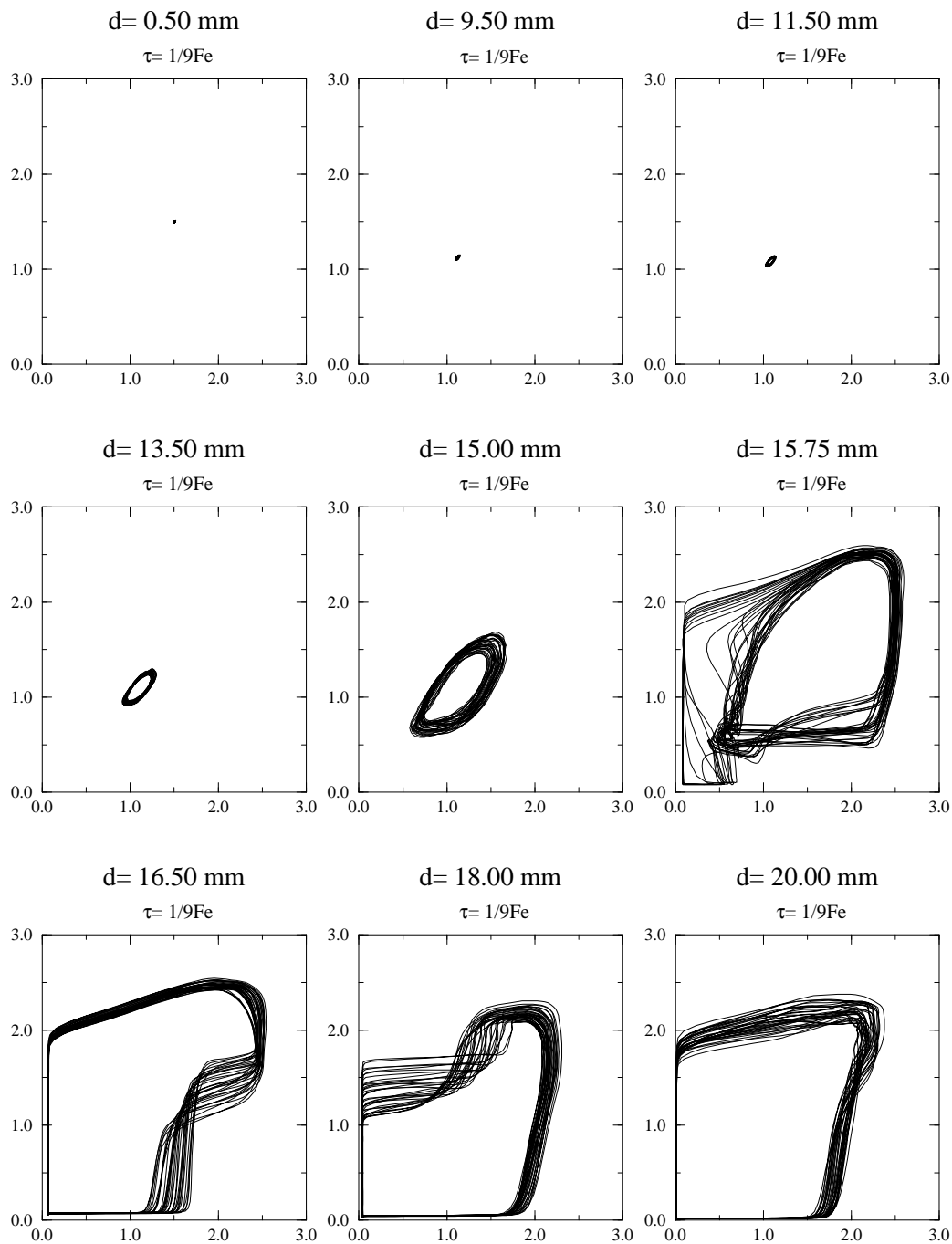


Figure 3.8: *Evolution des portraits de phase reconstruits dans le cas des mesures en ombroscopie. La distribution des trajectoires sur les portraits de phase est visiblement plus structurée que dans le cas des mesures par diffusion de la lumière. Ce résultat confirme que la nouvelle technique de mesure accède à la dynamique complète du diamètre du jet.*

de la dynamique du diamètre du jet. Ce suivi permet d'interpréter toute évolution du signal comme une évolution du diamètre local du jet.

D'une manière plus générale, nous pouvons noter que l'évolution du système en fonction de la distance à la sortie de la buse ressemble à un processus de déstabilisation d'un point fixe. Le portrait de phase est bâti sur un point fixe, de 0.00 mm à environ 11.50 mm . Après ce premier stade, l'évolution du système se fait par révolutions successives autour du point fixe initial. En effet, après 11.50 mm , le point fixe se déstabilise en une trajectoire assimilable dans un premier temps, à un cycle limite. Ce cycle limite se déstabilise lui-même en une trajectoire plus complexe à partir de 15.75 mm .

Sections de Poincaré et applications de premier retour

Rappelons que les sections de Poincaré et les applications de premier retour qui leur sont associées permettent l'étude de la dispersion des trajectoires sur le portrait de phase.

Dans le cas des mesures par diffusion, les sections de Poincaré sont définies de la même manière qu'au chapitre précédent. Les applications de premier retour sur les abscisses de ces dernières présentent à nouveau un nuage de points sans structure apparente (Fig. 3.9). Cependant, nous ne pouvons plus nous permettre de conclure hâtivement sur la nature déterministe ou non de la dynamique du jet. Il est nécessaire de tenir compte de la dynamique complète, sans artéfact, telle que nous la mesurons par ombroscopie. Malgré tout, l'absence de structure dans l'application de premier retour justifie l'utilisation de la méthode d'extraction des orbites les plus représentatives que nous avons utilisée au chapitre précédent.

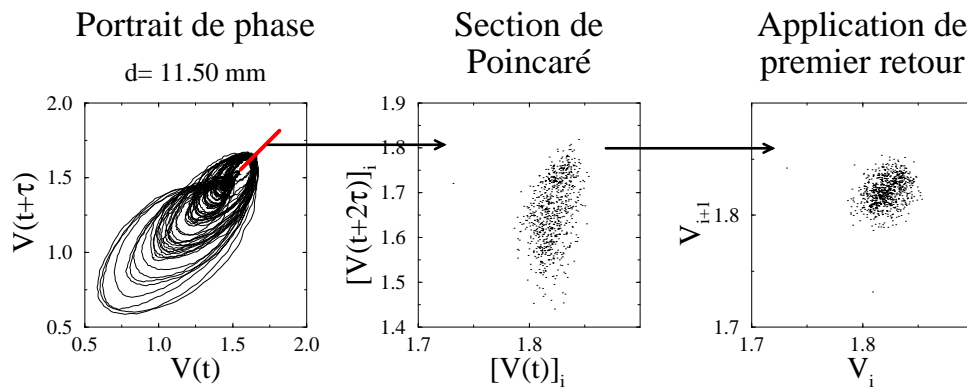


Figure 3.9: *Exemple d'une section de Poincaré et de l'application de premier retour qui lui est associée: mesures par diffusion.*

Dans le cas des mesures par ombroscopie, les sections de Poincaré et applications de premier retour sont définies et présentées en section 3.3.2. Elles nous permettront de caractériser précisément la nature de la dynamique de ce type de jet excité. Cependant, dans un premier temps, et de manière à continuer la comparaison diffusion/ombroscopie en utilisant les représentations globales de la dynamique définies au chapitre 2, nous allons considérer que les trajectoires sur les portraits de phase en ombroscopie sont suffisamment peu dispersées pour considérer la dynamique inscrite sur un cycle limite.

Nous allons ainsi pouvoir procéder à l'extraction de chacune des orbites les plus représentatives et tracer leur évolution en fonction de la distance à la sortie de la buse pour chacune des techniques de mesure.

Nous présenterons aussi les courbes d'évolution de l'amplitude du mode fondamental et des harmoniques pour chacune des méthodes de mesures.

Extraction d'orbites, croissance des perturbations

A chaque distance de la sortie de buse, une orbite est extraite, représentant, par hypothèse, la majeure partie de la dynamique. L'évolution de l'orbite la plus représentative en fonction de la distance à la sortie de la buse est donnée sur les figures 3.10 et 3.11, respectivement pour les mesures par diffusion et par ombroscopie.

En diffusion, notons simplement la présence de trois régions: (I_d), (II_d), et (III_d). La région (I_d) correspond à l'amortissement des oscillations de jet. La région (II_d) est une zone transitoire avant la croissance des perturbations axisymétriques, région (III_d), dont la nature est signée par la présence de l'oscillation secondaire.

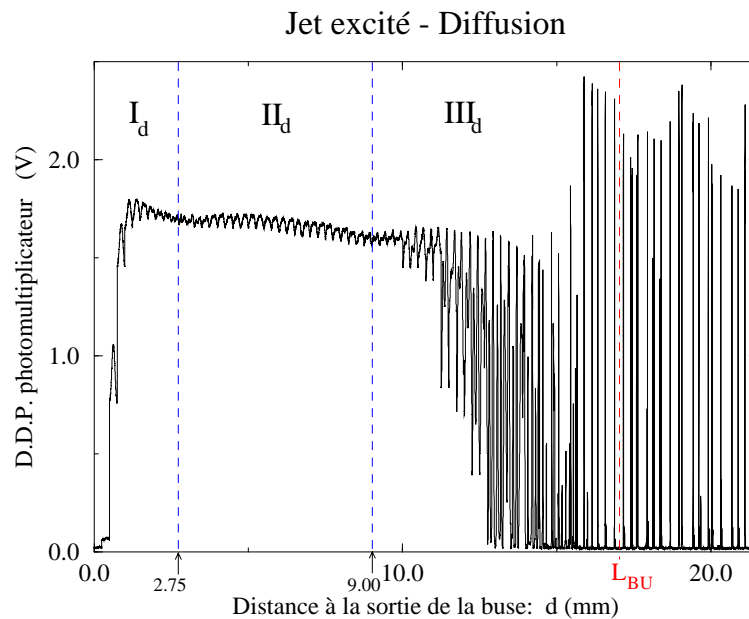


Figure 3.10: Evolution de l'orbite la plus représentative en fonction de la distance à la sortie de la buse pour les mesures par diffusion. Trois régions se distinguent: de la sortie de la buse à 2.75 mm; de 2.75 mm à 9.00 mm; et de 9.00 mm à la rupture en gouttes.

En ombroscopie, nous distinguons trois régions: (I_0) correspond à la région de contraction rapide du jet en sortie de buse; (II_0) est une portion du jet où le diamètre sous l'action de la gravité décroît toujours, mais moins rapidement qu'en sortie de buse. (III_0) est la seule des trois régions dont les limites concident avec celle de son homologue (III_d) en dif-

fusion. Dans ce tronçon, nous observons la croissance des perturbations axisymétriques qui ressemble à une croissance exponentielle que toutes les théories envisagent, au moins partiellement, dans l'évolution des perturbations menant à la rupture en gouttes. Dans cette troisième partie, le minimum du signal semble ne plus évoluer à partir de 15.75 mm pour s'annuler brutalement à la rupture. Cette petite région reflète la présence d'un ligament qui tarde à se sectionner, retardant d'autant la rupture en gouttes. Ce ligament a déjà été observé et la dynamique de sa rupture précisément étudiée dans d'autres expériences (voir notamment [3]). La présence de ce ligament est liée à l'action des non linéarités (apparition des harmoniques dans le spectre de puissance donnant la forme de la perturbation évoluant sur le jet).

Dans ce secteur du jet, le maximum du signal arrête de croître au même endroit, 15.75 mm , pour diminuer légèrement avant la rupture en gouttes. Nous pouvons comparer cette valeur aux diamètres maxima des gouttes, pour $d > L_{BU}$ après la rupture. Les diamètres maxima atteints, avant la rupture, par les perturbations axisymétriques, dépassent ceux des gouttes finalement produites par ce jet. Ce renflement avant la rupture doit être dû à l'inertie de l'action de gonflement du jet au niveau des ventres des varicoses. Cette action de gonflement provient de l'action des forces de tension de surface. L'inertie du gonflement des varicoses dans le jet doit aussi être responsable de l'oscillation du diamètre maximum des gouttes qui s'ensuit. Nous pouvons aussi envisager qu'une goutte bourgeonnante oscille à cause du détachement de la goutte précédente. Notons que cette oscillation du diamètre vu par la nappe laser concide avec l'oscillation de la forme des gouttes vue sur les photographies du jet.

Evolution des harmoniques associées à la fréquence d'excitation

L'évolution des harmoniques de la fréquence d'excitation est calculée pour le cas de la diffusion (Fig. 3.12) et celui de l'ombroscopie (Fig. 3.13).

Bien entendu, en diffusion, cette évolution est gouvernée par l'artéfact générant les importantes troncatures dans la dynamique. Cela a pour conséquence la présence d'un maximum dans cette représentation, pour le mode fondamental autant que pour la première harmonique, correspondant au lieu où l'amplitude de l'oscillation secondaire est maximum. Même si cette évolution pour les mesures par diffusion est plus difficile à interpréter, nous pouvons simplement noter que la rupture est pourtant assez bien marquée par un saut brusque de l'amplitude des modes.

En ombroscopie, nous voyons nettement à partir d'environ 9 mm la croissance décalée des harmoniques successives menant à la rupture en gouttes. De plus, le taux de croissance d'un mode augmente avec le numéro de celui-ci. Qualitativement, ces résultats sont en accord avec les résultats expérimentaux de [4] sur des jets d'encre excités longitudinalement, et aussi avec la théorie faiblement non linéaire de Yuen *et al.* [5] traitant de la croissance des modes sur un jet liquide cylindrique. Sur cette évolution nous pouvons aussi voir la présence du renflement à 15.75 mm déjà mis en évidence précédemment sur l'évolution de l'orbite la plus représentative.

Comme nous l'avons précisé, nous avons traité séparément l'étude de la dispersion des

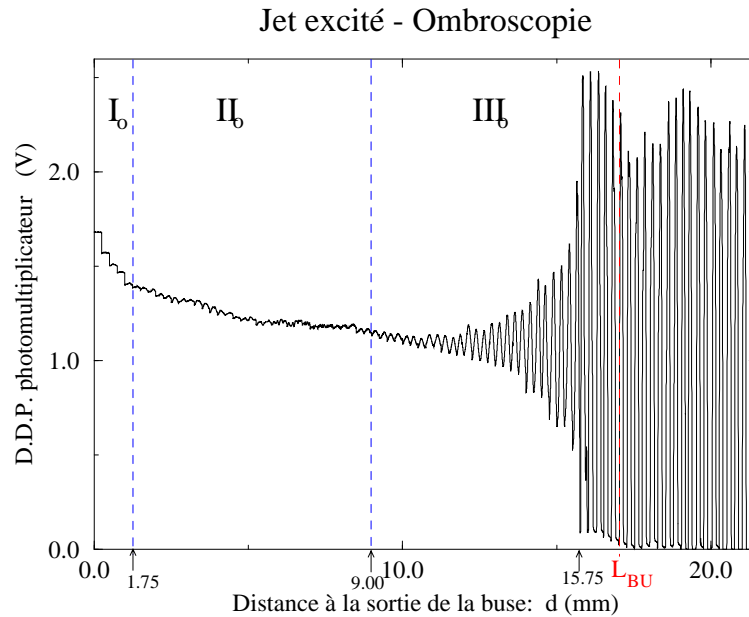


Figure 3.11: Evolution de l'orbite la plus représentative en fonction de la distance à la sortie de la buse pour les mesures en ombroscopie. Avant 9.00 mm, cette région correspond bien à la zone de contraction du jet. Ensuite, nous voyons la croissance exponentielle des perturbations axisymétriques.

trajectoires dans le portrait de phase pour les mesures par diffusion et par ombroscopie. Déjà réalisée sur les mesures par diffusion, l'étude ne permet pas de conclure sur la nature déterministe ou non du comportement du diamètre du jet. Nous allons maintenant mener ce type d'étude en profitant de la dynamique complète du diamètre du jet, c'est à dire à partir des mesures par ombroscopie. Cette étude va nous révéler la présence d'**intermittence de type-I** dans le comportement local du diamètre du jet.

3.3.2 Intermittence de phase, de type-I

L'étude de la dispersion des trajectoires autour du portrait de phase n'a de sens, du point de vue de la dynamique, que si l'on considère une série temporelle relevant, à chaque instant, la mesure d'une variable du système. Or, entre deux gouttes, l'écoulement liquide n'est plus détectable par la technique de mesure. Soit nous considérons que la mesure entre les gouttes n'est pas réalisée car il n'y a plus de jet: dans ce cas, la série temporelle n'est pas continue et nous ne pouvons pas envisager l'étude de la dynamique. Soit nous considérons que la mesure entre les gouttes est définie avec un diamètre nul: alors la série temporelle donne la valeur d'une variable du jet en tout instant.

Pour répondre à ce problème, nous avons simplement scindé le domaine d'étude en deux régions: le corps du jet et les gouttes. Nous verrons ensuite qu'il est en fait possible d'établir un lien entre les comportements de ces deux parties du jet.

Evolution des modes - Jet excité Mesures par diffusion

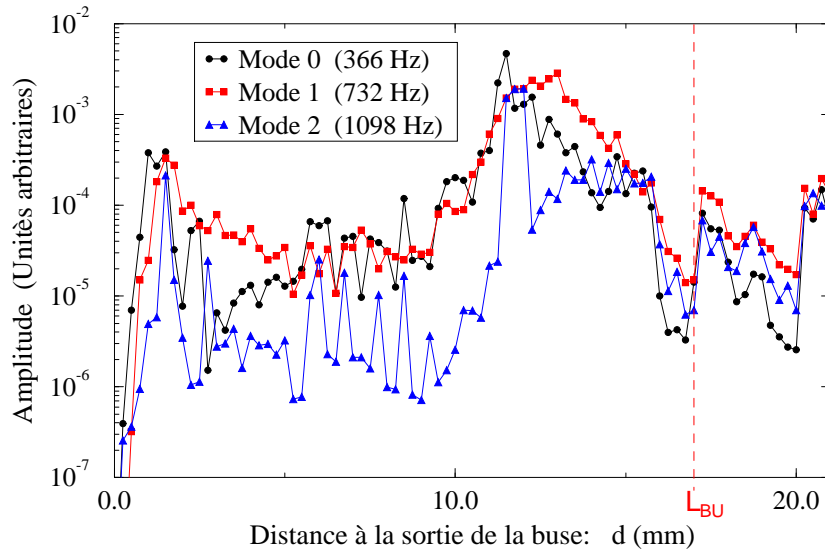


Figure 3.12:

Evolution des modes - Jet excité Mesures par ombroscopie

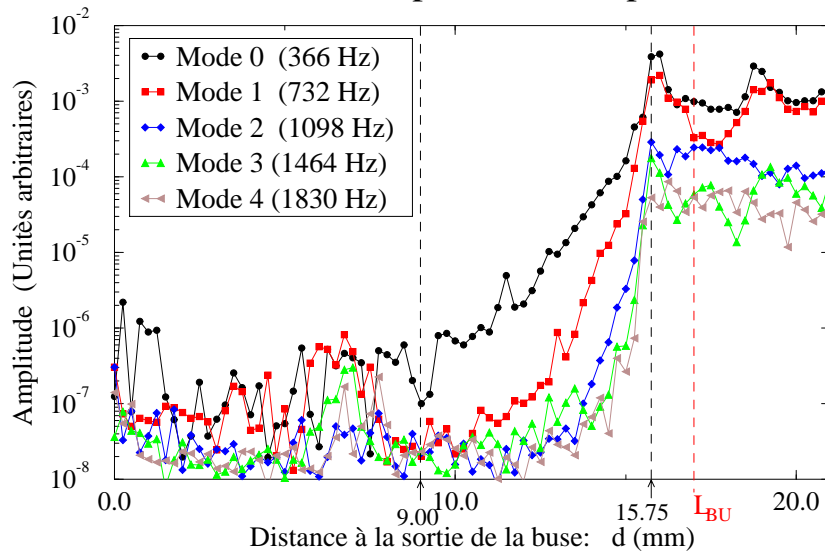


Figure 3.13:

Avant la rupture en gouttes

Nous avons vu que l'évolution des portraits de phase en fonction de la distance à la sortie de la buse, ressemble à un processus de déstabilisation d'un point fixe. D'un point de vue géométrique, le portrait de phase est d'abord limité à un point, puis les trajectoires s'organisent par révolutions successives autour de ce point. Ce "centre" du portrait de phase permet de définir proprement une section de Poincaré. En effet, sur les modèles numériques, nous savons qu'une analyse d'un attracteur est idéale si nous pouvons définir une section de Poincaré par l'ensemble des intersections de la trajectoire avec un demi-plan transverse au flot de trajectoire passant par le point fixe central. Il est aussi commode de choisir une partie de l'attracteur où les trajectoires s'inscrivent sur une bande de faible épaisseur, sans repliement. Pour l'analyse de données expérimentales, on choisira l'endroit où les trajectoires sont quasiment parallèles, c'est à dire l'endroit où elles se recoupent le moins.

Finalement, pour le jet excité, les sections de Poincaré sont définies comme étant l'ensemble des intersections du portrait de phase défini par

$$P = \{(X, Z) \in \mathbb{R}^2 \mid X = Y, X > X_F\} \quad (3.3)$$

où X_F correspond au diamètre du jet non perturbé en sortie de buse.

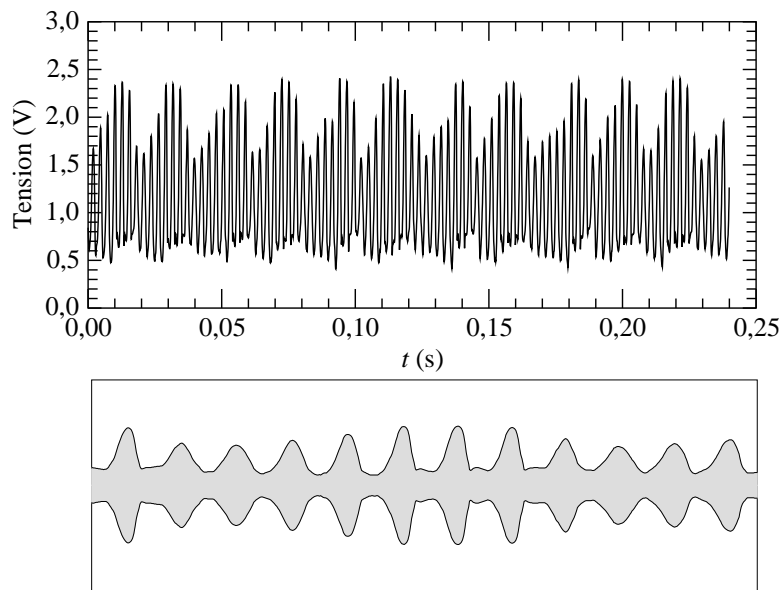


Figure 3.14: (a) Série temporelle enregistrée à $d = 15.50 \text{ mm}$ (Jet excité). (b) Reconstitution du jet directement à partir de la série temporelle, à $d = 15.50 \text{ mm}$ en faisant l'hypothèse d'une vitesse constante. Le rapport d'aspect n'est pas respecté: de manière à mieux visualiser les perturbations, les distances sont dilatées dans la direction perpendiculaire à l'axe du jet.

Nous choisissons d'étudier la dynamique pour $d = 15.50 \text{ mm}$: une série temporelle est représentée figure 3.14 ainsi qu'une reconstitution du jet. Un phénomène de battement caractéristique d'une compétition entre deux fréquences, est clairement observé.

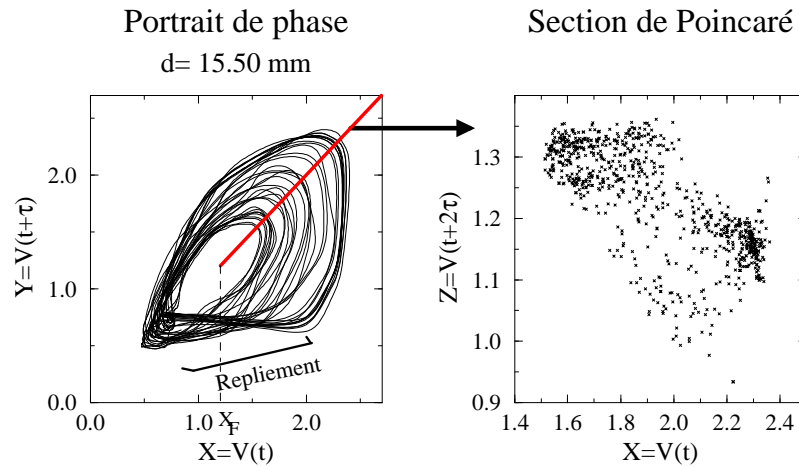


Figure 3.15: Définition de la section de Poincaré: c'est l'ensemble des points d'intersection des trajectoires de la bande supérieure du portrait de phase avec le plan perpendiculaire à la figure. Sur la section, les trajectoires sont quasiment parallèles localement. Il serait difficile d'interpréter une section réalisée sur la région où se situe le repliement.

La section de Poincaré, réalisée à $d = 15.50 \text{ mm}$, est présentée sur la figure 3.15. Sur le portrait de phase, les trajectoires sont relativement parallèles localement. En outre, elles présentent un repliement localisé dans la partie de l'attracteur associée aux faibles diamètres. Le parallélisme local entre les trajectoires reflète le déterminisme sous-jacent puisque en mD , où m serait la dimension de plongement de la dynamique, nous savons qu'un croisement entre trajectoire équivaut à associer à un même état présent deux passés et deux futurs différents. La marque de cette composante déterministe se retrouve dans l'allure de l'application de premier retour (Fig. 3.16) sur les abscisses de la section de Poincaré. Celle-ci est structurée contrairement à ce que nous avons pu voir dans le cas des mesures par diffusion. En fait, les points de l'application de premier retour semblent s'ordonner selon une structure annulaire. Le tracé de quelques points de cet ensemble, liés entre eux par un segment suivant l'ordre chronologique d'apparition sur la section de Poincaré, confirme que cette application s'inscrit sur une application circulaire ayant une certaine épaisseur. Cela implique que la dynamique s'inscrit près un tore T^2 (voir définition au chapitre I). Ainsi, deux fréquences caractéristiques dominent la dynamique gouvernant l'évolution du diamètre du jet. Les deux fréquences sont facilement mises en évidence sur le spectre de puissance du signal considéré (Fig. 3.17). Bien entendu, la fréquence principale, dominant sur le signal, est la fréquence d'excitation F_e . La présence de deux fréquences caractéristiques peut faire penser à un comportement quasi-périodique tel qu'il a été défini dans le chapitre d'introduction, mais nous allons voir par la suite qu'un aspect de la dynamique permet de conclure à un comportement plus complexe.

L'application étant circulaire, cela incite à opérer un changement de coordonnées afin d'étudier la dynamique non plus sur la valeur du diamètre, mais sur un angle de phase. L'angle de phase φ est défini sur la figure 3.18.a comme étant l'angle que fait le vecteur po-

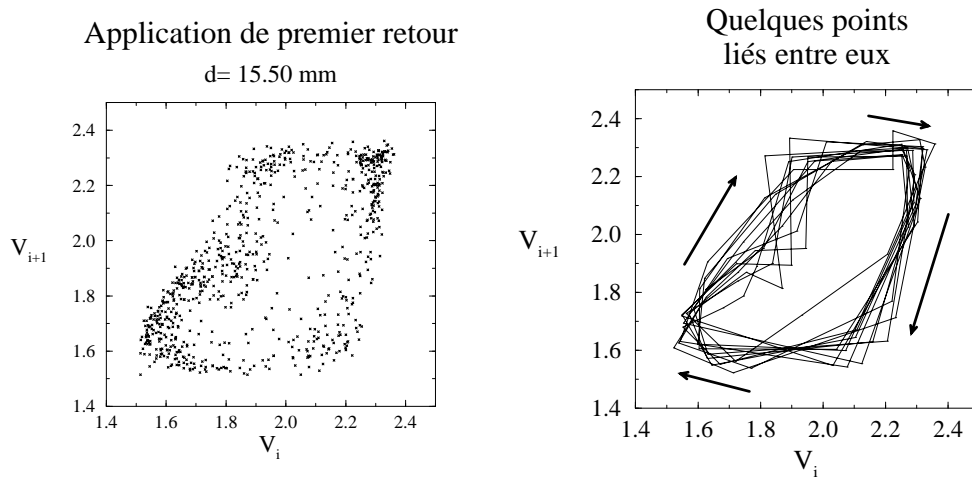


Figure 3.16: *L'application de premier retour adopte une structure essentiellement annulaire. Sur la figure de droite, quelques points de cet ensemble sont tracés afin de mieux mettre en évidence cette structure. Ils sont liés entre eux par un segment suivant l'ordre d'intersection de la trajectoire avec le plan de Poincaré.*

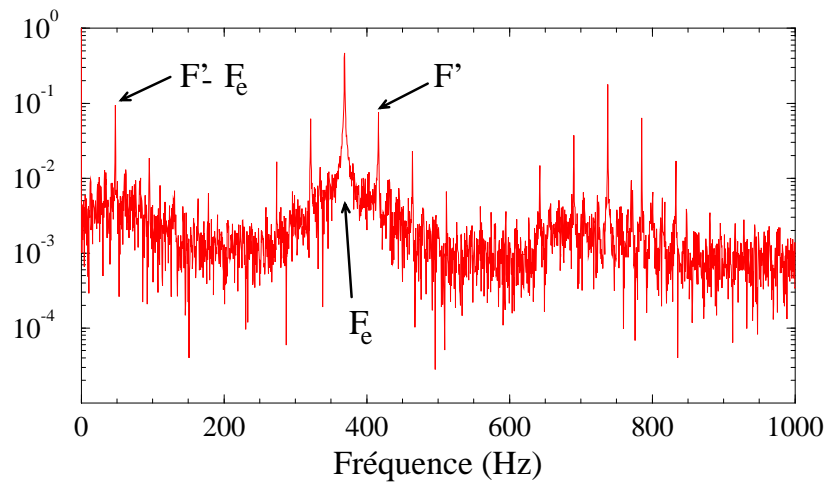


Figure 3.17: *Spectre de puissance du signal enregistré à $d = 15.50$ mm. Deux fréquences, caractéristiques d'une dynamique inscrite sur un tore T^2 , sont identifiables: l'une $F_e = 369$ Hz correspond à la fréquence d'excitation et l'autre $F' = 416$ Hz est propre à la dynamique du jet.*

sition d'un point du graphe, ici l'application de premier retour, avec un vecteur, horizontal sur la figure, donnant l'origine des phases. Il faut savoir que cet angle de phase correspond à la différence de phase existant entre les deux modes fondamentaux F_e et F' identifiés sur le spectre de puissance [6].

Une application de premier retour est calculée sur cet angle de phase φ (Fig. 3.18.b) dont les valeurs, données à 2π près, sont normées entre -1 et 1 . Cette application montre une fine structuration de la dynamique autour d'une application circulaire. Les discontinuités du graphe en -1 et 1 , et sur la droite $y = 0.5$, ne sont qu'apparentes et résultent du mode de représentation utilisé. En fait, elles disparaissent lorsque l'on identifie -1 et 1 en abscisse et en ordonnée.

Cette application circulaire est presque tangente par deux fois sur l'intervalle $[-1; 1]$ à la première bissectrice des axes. Cette particularité de l'application de premier retour sur l'angle de phase est la preuve de la présence d'un mécanisme d'intermittence de phase. Le comportement caractéristique de ce type de fonctionnement se présente comme la succession de bouffées laminaires et de bouffées intermittentes (appelées encore processus de relaminarisation). Les phases laminaires sont produites par le passage de l'angle de phase φ par un canal borné par la première bissectrice et par l'application proprement dite. Ces canaux sont au nombre de deux dans notre cas (Fig. 3.19).

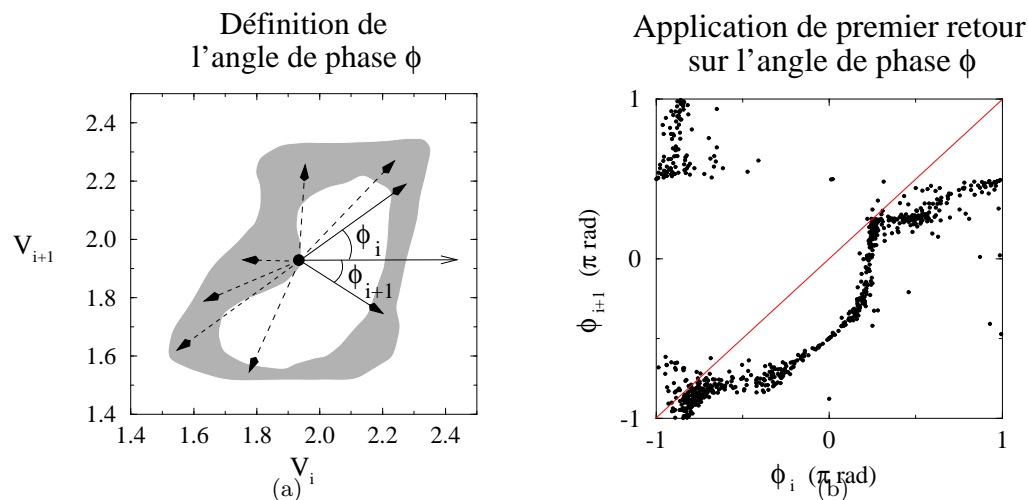


Figure 3.18: (a) Définition de l'angle de phase φ à l'aide des vecteurs positions et d'une origine des phases (vecteur horizontal sur la figure). (b) Application de premier retour sur l'angle de phase φ ainsi défini ($d = 15.50$ mm).

Pour mieux comprendre le mécanisme et identifier les canaux laminaires, nous réalisons une approximation par morceaux de l'application de premier retour sur φ à l'aide d'un algorithme de décomposition en valeurs singulières (SVD [7, 8]). La figure 3.19 montre cette approximation avec un grossissement sur un des deux canaux. Nous pouvons remarquer que le mécanisme d'intermittence impose un temps de passage plus long dans les zones de tangence, ce qui se traduit par une plus grande densité de points autour de ces zones sur l'application de premier retour (Fig. 3.20). Les bouffées turbulentes font transiter rapide-

ment l'angle φ d'une zone de tangence à l'autre. C'est le processus de relaminarisation.

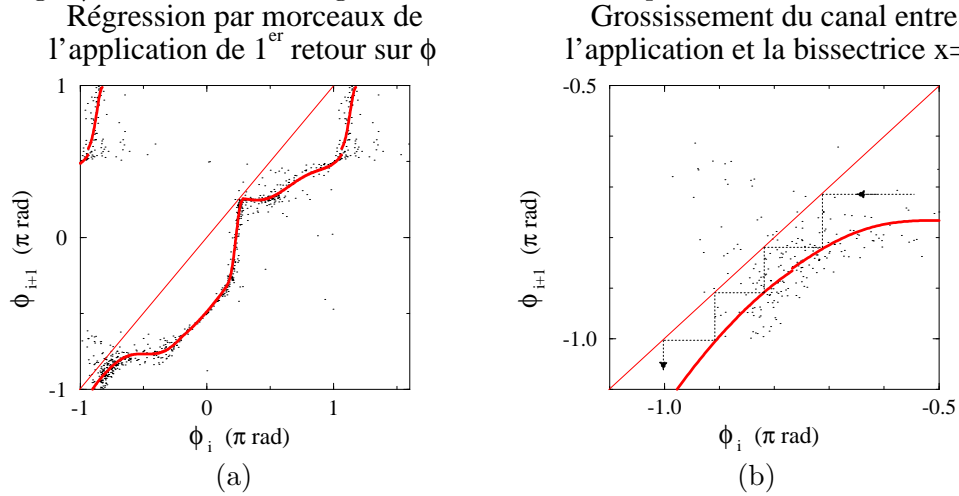


Figure 3.19: (a) Approximation par morceaux de l'application sur φ . (b) Grossissement sur une des deux régions tangentes à la première bissectrice des axes: nous y avons fait figurer en pointillés un exemple de trajectoire possible au cours de la phase laminaire.

Le calcul de la densité de probabilité de la durée des phases laminaires montre un histogramme borné, caractéristique d'une intermittence de type-I [9] (Fig. 3.21).

Le lecteur a peut être remarqué que l'intermittence de phase est caractérisée sur un angle de phase défini sur les points de l'application de premier retour et non sur les points de la section de Poincaré comme cela est envisagé habituellement. En fait, la section de Poincaré n'est pas circulaire mais l'application de premier retour l'est. Sachant que nous pouvons considérer l'application de premier retour comme une reconstruction de la section de Poincaré, cette définition particulière de l'angle de phase suggère simplement un problème d'observabilité de l'intermittence de phase sur la variable directement mesurée, mais ne remet pas en cause nos conclusions.

Rupture en gouttes

On retrouve le comportement d'intermittence de phase, mais moins clairement identifiable comme nous pouvons le constater sur l'application de premier retour sur φ pour une série temporelle enregistrée à $d = 20.00 \text{ mm}$ (Fig. 3.22). Le passage de la rupture en gouttes doit ajouter une fonction de transfert au comportement des perturbations éloignant un peu la dynamique de l'intermittence de phase décrite auparavant.

Sur certains portraits de phase, de 15.50 mm à 19.00 mm (Fig. 3.23), l'allure des trajectoires s'ordonne apparemment selon une séquence précise. Lorsque les trajectoires ne sont pas confinées sur une ligne, ce qui correspond au passage de l'espace entre deux gouttes (c'est à dire, lorsque l'abscisse et l'ordonnée n'atteignent pas leur valeur minimum), la répartition des trajectoires semble être localement parallèle. Prenons le cas particulier du portrait de phase à 16.50 mm (on retrouve ce portrait sur la séquence donnant l'évolution globale des portraits de phase, figure 3.8).

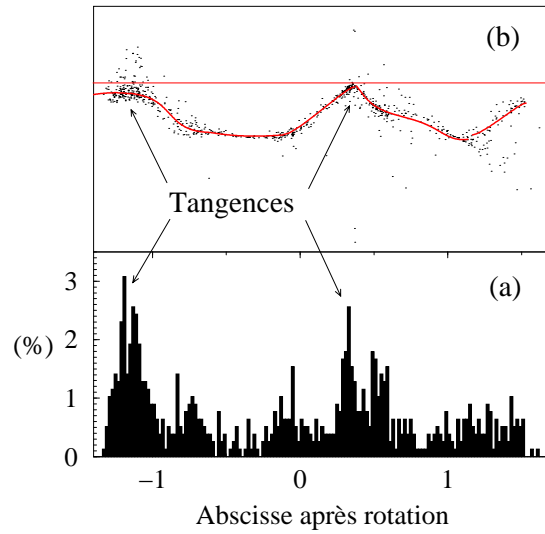


Figure 3.20: (a) Fonction de densité de probabilité de présence sur les abscisses de l'application sur φ (b) ayant subi une rotation de 45° pour que l'histogramme ait une meilleure représentativité de la densité de points sur l'application de premier retour.

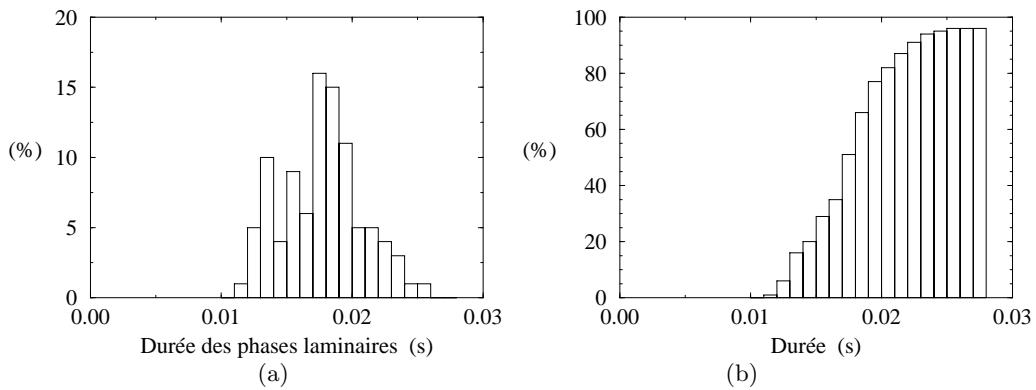


Figure 3.21: (a) Histogramme représentatif de la fonction densité de probabilité calculée sur la durée des phases laminaires. (b) Forme intégrée donnant la densité de bouffées laminaires ayant une durée inférieure ou égale à la durée indiquée en abscisse. Ces histogrammes sont caractéristiques d'une intermittence de type-I.

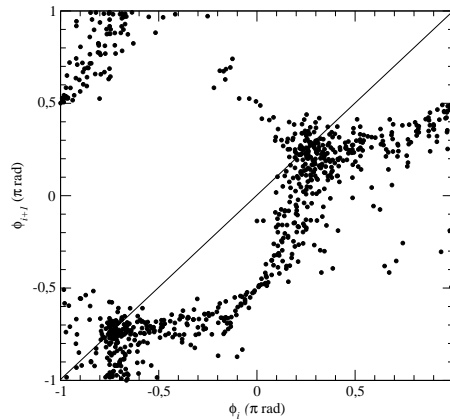


Figure 3.22: *Application de premier retour sur l'angle de phase φ à $d = 20.00$ mm de la sortie de la buse.*

Le parallélisme local des trajectoires montre qu'une fois une trajectoire choisie au début d'une révolution sur le portrait, nous sommes capable de dire exactement le chemin qu'elle va suivre jusqu'à sa réinjection sur la ligne commune. En fait ce parallélisme local entre trajectoires reflète le déterminisme qui gouverne l'évolution du système pour une révolution sur le portrait de phase. Dans notre cas, cela traduit le fait qu'une fois qu'une goutte est initiée, le reste de sa forme, donnée par les mesures successives du diamètre local, est déterminée.

Sur le portrait choisi comme exemple, les trajectoires parallèles non confinées sur une ligne apparaissent inscrites sur une bande qui subit une torsion, avant de se réinjecter finalement sur la ligne commune. Ce ruban n'est pas sans rappeler la structure typique des trajectoires de certains systèmes chaotiques très connus, comme celui de Rössler par exemple (figures 3.24 et 3.25). Sans aller aussi loin dans la comparaison, il est pourtant clair qu'une torsion locale reflète l'intervention d'une rétroaction/saturation, caractéristique des phénomènes non linéaires, comme c'est le cas pour la réinjection des trajectoires autour du point fixe principal dans le système de Rössler [10].

Il est nécessaire de montrer que ce processus n'est pas simplement produit par la visualisation du portrait de phase dans la projection à deux dimensions particulière que nous avons utilisée jusqu'à présent. C'est ce que nous allons mettre en évidence en visualisant les croisements orientés entre trajectoires à l'aide d'un algorithme de détermination automatique des croisements⁵. Nous utilisons une convention qui permet de distinguer les deux types de croisement en leur attribuant un signe (Fig. 3.26).

Un système déterministe peut alors être décrit en terme de signe des croisements entre trajectoires, et en terme de torsion locale (Fig. 3.27).

Nous pouvons calculer systématiquement le signe et les coordonnées de tous les auto-croisements de la trajectoire (croisements avec elle-même) du portrait de phase que nous avons choisi. La localisation des croisements est donnée par leur position dans le portrait

⁵Code développé par Olivier Ménard, CORIA - UMR 6614.

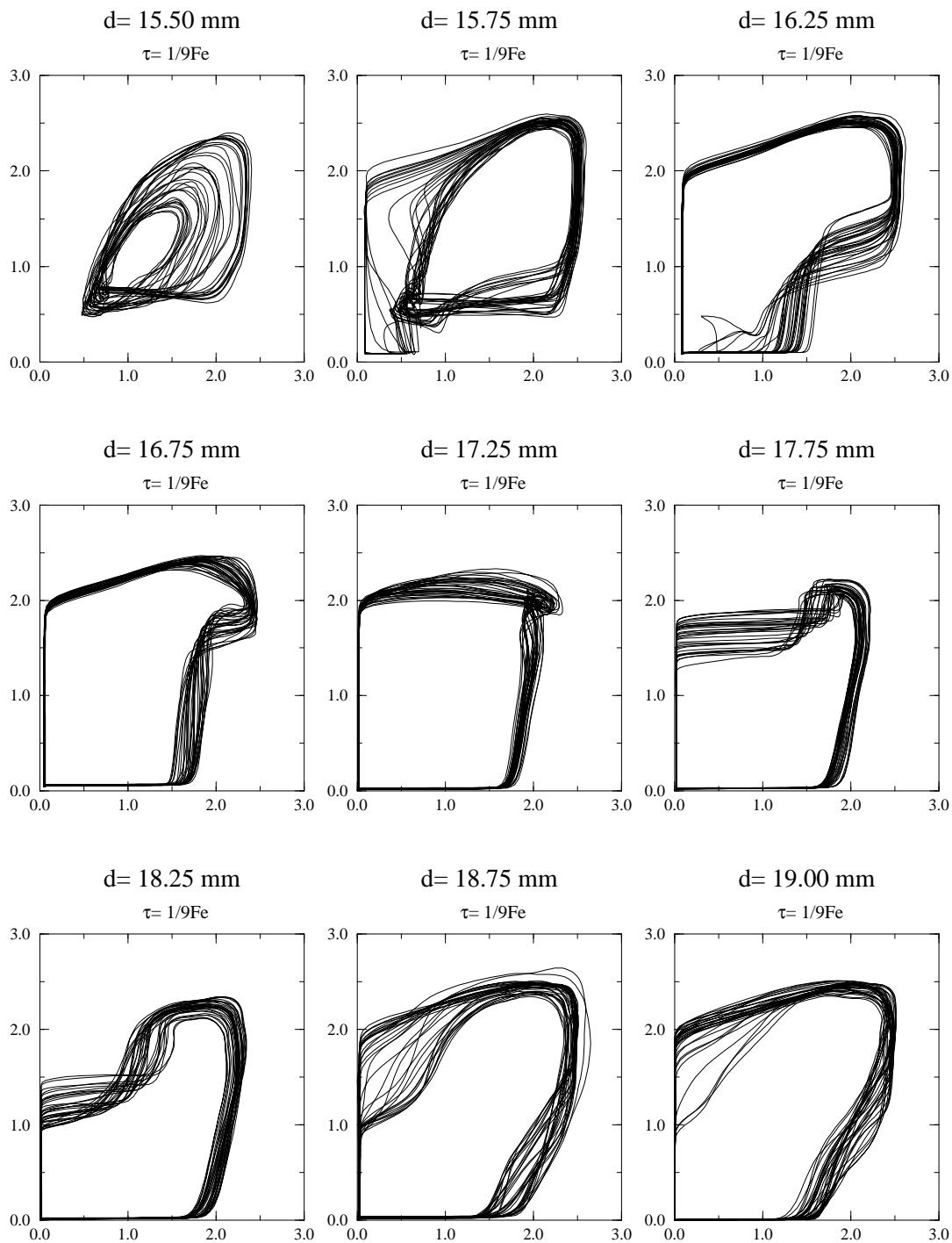


Figure 3.23: *Evolution plus précise ($d \in [15.50 \text{ mm}; 19.00 \text{ mm}]$) des portraits de phase sur la région couvrant la rupture en gouttes. Nous y voyons la naissance du repliement et son déplacement le long du portrait de phase au fur et à mesure que la distance à la buse augmente, jusqu'à sa disparition une fois la relaxation achevée.*

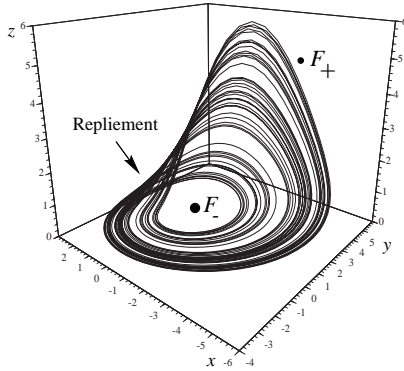


Figure 3.24: *Attracteur généré par le système de Rössler pour $(a, b, c) = (0.398, 2.0, 4.0)$.*

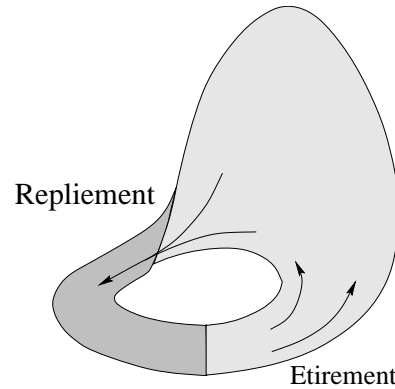


Figure 3.25: *Schéma de la surface sans épaisseur sur laquelle peut être décrit l'attracteur généré par le système de Rössler. Nous remarquerons la présence des deux ingrédients essentiels à un comportement chaotique: l'étirement responsable de la sensibilité aux conditions initiales et le repliement lié à l'action des non linéarités.*

de phase. Cette position est elle-même représentée par l'intervalle de temps séparant la coordonnée du croisement considéré avec une origine des temps prise systématiquement au début de la phase où les trajectoires deviennent parallèles entre elles (Fig. 3.28). L'histogramme tracé sur la figure 3.29 représente alors le nombre de croisements rencontrés à partir d'une origine des temps arbitrairement fixée, à un intervalle de temps Δt donné. L'origine des temps est choisie de telle sorte que les portions de trajectoires parallèles aux axes de coordonnées, confinées sur une ligne, ne génèrent pas un fort nombre d'auto-croisements associé à des chevauchements de trajectoires uniquement dues au bruit expérimental. Ce repérage permet de prouver que la zone apparente de torsion locale correspond effectivement à une région confinée où le nombre d'auto-croisements positifs s'accroît brusquement dans la représentation 3D du portrait de phase.

3.3.3 Conclusion

Pour conclure, il est essentiel de ne pas oublier que l'origine physique du repliement, attribué aux trajectoires d'un portrait de phase reconstruit sur les valeurs du diamètre du jet, est liée à la présence d'ondes de surfaces évoluant à la surface du jet, générées par la rupture en gouttes à chaque fois qu'une goutte se détache du corps du jet. Par ailleurs, c'est pour cette raison que la position du repliement voyage sur le portrait de phase à mesure que la distance à la buse augmente. Ainsi, deux informations évoluent en sens contraire: une onde capillaire fait osciller la forme de la goutte qui se détache du jet, induisant un repliement sur le portrait reconstruit; et une autre doit remonter le long du jet vers la buse. Cette dernière, impliquant une remontée d'information de la rupture en gouttes vers

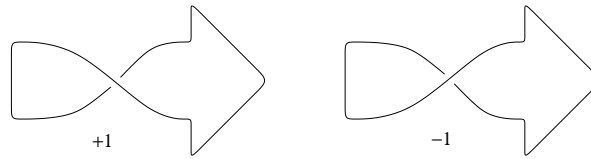


Figure 3.26: *Convention de signe des croisements. A chaque croisement est associée une rotation positive ou négative d'un angle π . Ainsi, une rotation de -1 signifie que le ruban effectue un demi-tour dans le sens trigonométrique, et réciproquement.*

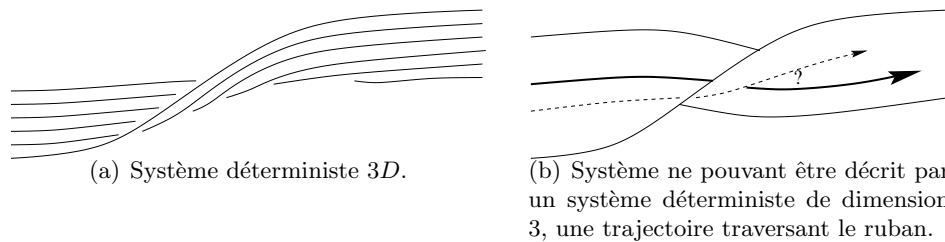


Figure 3.27: *Alors qu'un système déterministe de dimension 3 peut être décrit par une rotation d'un ruban n'impliquant que des croisements négatifs (ou positifs) (a), il ne peut être caractérisé par un ruban impliquant des croisements voisins de signes opposés : dans ce cas (b), il existe au moins une des trajectoires qui traverse le ruban impliquant une rupture du déterminisme car à un état présent, il existe deux futurs possibles.*

la buse, explique l'origine du processus de rétroaction, celui-ci étant caractéristique d'une dynamique non linéaire telle que nous l'avons mise en évidence à travers l'intermittence de phase dans le jet.

Enfin, de manière plus générale, ce phénomène montre les relations qu'il peut exister entre une dynamique spatio-temporelle, que nous commençons à concevoir avec la remontée d'une onde capillaire le long du jet, et une dynamique temporelle telle que celle qui décrit le mécanisme d'intermittence de phase de type-I.

3.4 Instabilités de jets d'eau libre en Zone 1 et Zone 3

3.4.1 Points de fonctionnement

Les points de fonctionnement retenus pendant les campagnes de mesure en jet libre sont les suivants:

- 1- Diamètre nominal du jet sensiblement égal à $\Phi = 600\mu m$,
- 2- Rapport de la longueur de la buse sur son diamètre interne égal à $L/\Phi = 10$,

Les autres grandeurs caractérisant le jet sont résumés dans le tableau suivant:

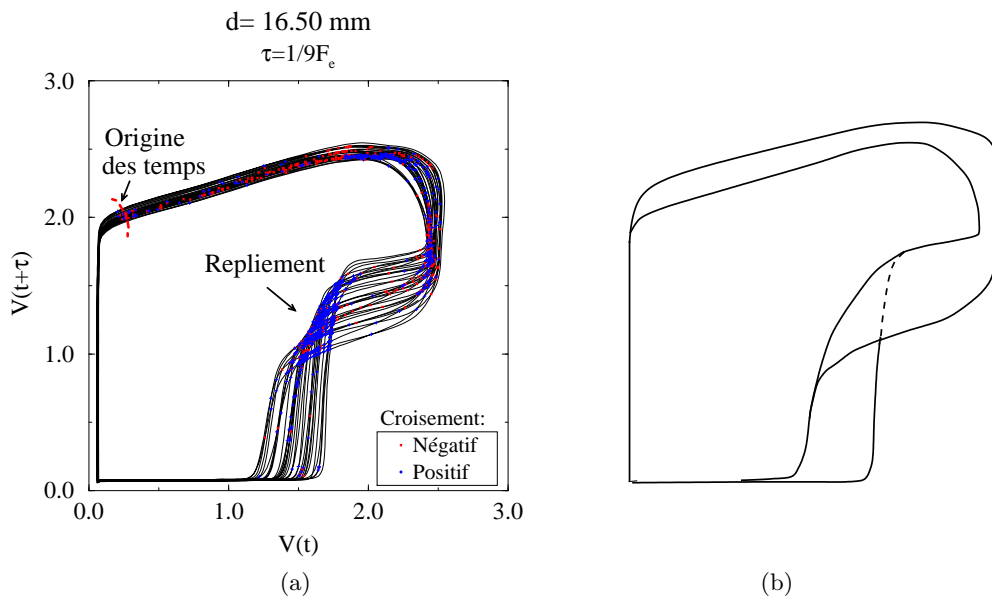


Figure 3.28: (a) Portrait de phase en $d = 16.50 \text{ mm}$ sur lequel est identifiée l'origine des temps à chaque révolution de la trajectoire sur le portait. (b) Schéma du "ruban" associé au portrait de phase reconstruit.

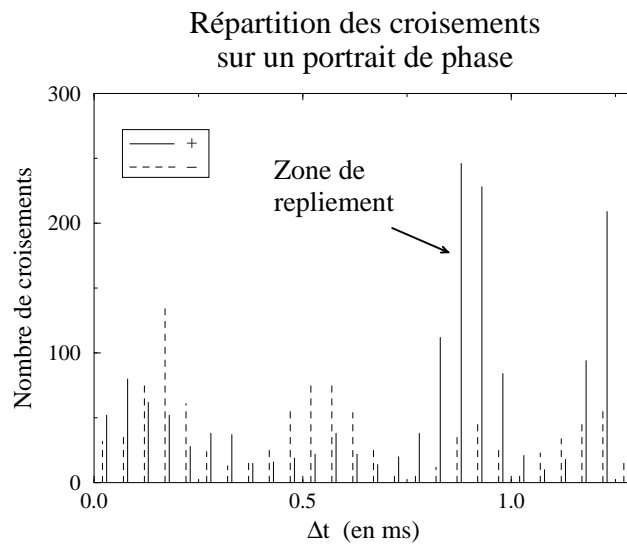


Figure 3.29: Histogramme donnant le nombre de croisements positifs et négatifs rencontrés à une position donnée par Δt sur le portrait de phase. Le deuxième pic sur les croisements positifs est dû à un artefact sur la détermination de la position du repliement et attribuable aussi à cette partie du portrait de phase.

Liquide	V ($m.s^{-1}$)	F_{Ray} (Hz)	L_{BU} (mm)	Reynolds	Weber	L_{et}/Φ
eau ($Z = 0.0048$)	1.29	476	37.2	773	14	39
	1.66	614	47.9	994	23	50
	2.15	non déf.	33.6	1288	38	64
eau-glycérine ($Z = 0.108$)	1.28	473	45.7	38	17	1.9
	1.65	610	59.3	49	29	2.5
	2.15	795	74.6	64	48	3.2

A chaque point de fonctionnement correspond une photographie typique du jet sur la figure 3.30 telle que celles qui nous ont permis de mesurer la longueur de rupture. L'eau a une viscosité égale à 1 *cp* et une tension de surface égale à $73 \cdot 10^{-3} N.m^{-1}$. Le mélange d'eau et de glycérine, à 70% en masse de glycérine, est un liquide dont la viscosité est égale à 24 *cp* environ et dont la tension de surface est égale à $68 \cdot 10^{-3} N.m^{-1}$ (valeurs non mesurées ⁶).

La valeur du rapport L/Φ , comparée à la Longueur d'établissement du profil de Poiseuille donnée par la relation de Strikler, montre que le profil n'est pas strictement établi en sortie de buse dans le cas du jet d'eau. Cependant même si son allure n'est pas un profil parabolique, des gradients de vitesses ont pu être imposés par les contraintes pariétales lors du passage du liquide dans la buse. En fait, nous pouvons même affirmer que les gradients de vitesse sont confinés dans une région plus petite que dans le cas d'un profil strictement établi, ce qui implique que la valeur de ces gradients est beaucoup plus importante dans le cas du jet d'eau que lorsque le profil est établi en sortie de buse (jet visqueux). La relaxation de ces gradients de vitesse sera d'autant plus brutale que les gradients sont élevés, ce qui ajoute un argument supplémentaire à la prépondérance de cette action sur l'initiation des perturbations en sortie de buse. En outre, il faut rappeler l'action dissipatrice de la viscosité qui amplifie cette différence de comportement entre les deux type de jets.

En fait, dans la suite, nous nous référerons plus simplement à la classification introduite par S. Leroux *et al.* [12] grâce à laquelle nous pouvons remarquer que les points de fonctionnement que nous avons choisis ⁷ permettent une comparaison des jets de zone 1 et 3 ⁸. Avec les paramètres d'injection qui ont été donnés, le jet d'eau est un jet de zone 1, le jet visqueux (mélange eau/glycérine à 70%) est un jet de zone 3.

Le jet de zone 1 a une courbe de stabilité schématisée par la courbe de la figure 3.31.a. Les vitesses débitantes choisies, $1.29 m.s^{-1}$, $1.66 m.s^{-1}$ et $2.15 m.s^{-1}$, correspondent respectivement à la partie ascendante de la courbe de stabilité, au point de vitesse critique, et à la partie descendante de cette courbe. Pour le jet de zone 3, les vitesses débitantes choisies, identiques à $0.01 m.s^{-1}$ près, aux vitesses du jet de zone 1, appartiennent à la partie ascendante de la courbe de stabilité de ce jet, correspondant uniquement au régime de Rayleigh. Rappelons que, dans le cas du jet de zone 1, l'analyse des expériences de l'équipe "atomisation et sprays" du CORIA laisse penser que la position du point critique serait pilotée par l'influence du profil des vitesses non plat en sortie de buse [1].

⁶Toutes ces valeurs sont tirées du "Handbook of Chemistry and Physics", 76^{ème} édition, 1995-1996.

⁷Ce choix a été réalisé avec C. Dumouchel.

⁸Ces zones ont été définies au chapitre I, section 1.3.4.

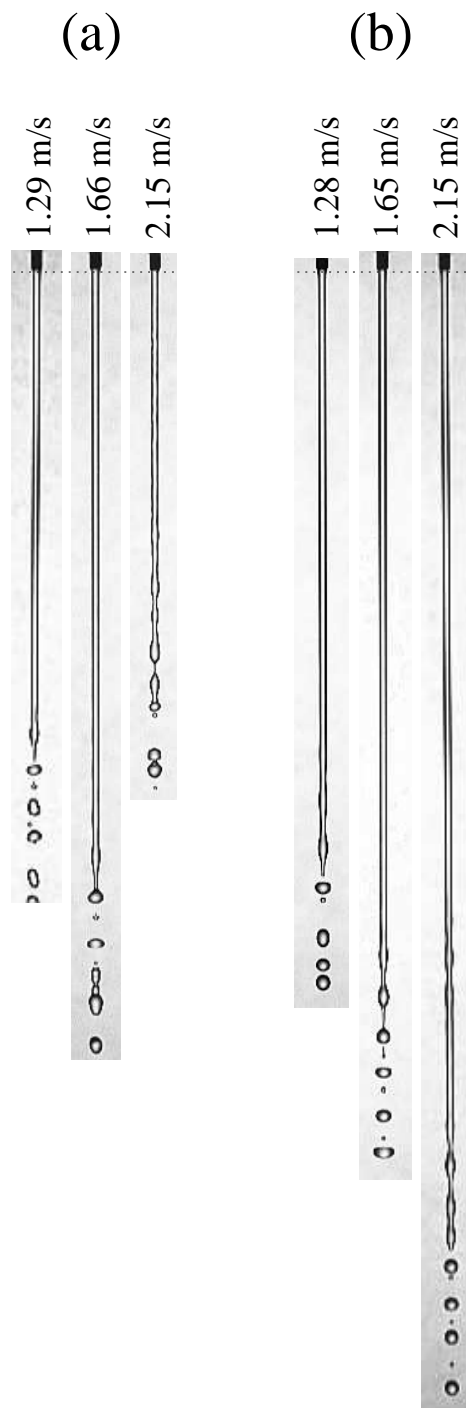


Figure 3.30: Photographies des jets libres: (a) pour l'eau; (b) pour le mélange eau/glycérine(70%). La vitesse débitante augmente de la gauche vers la droite dans les deux cas.

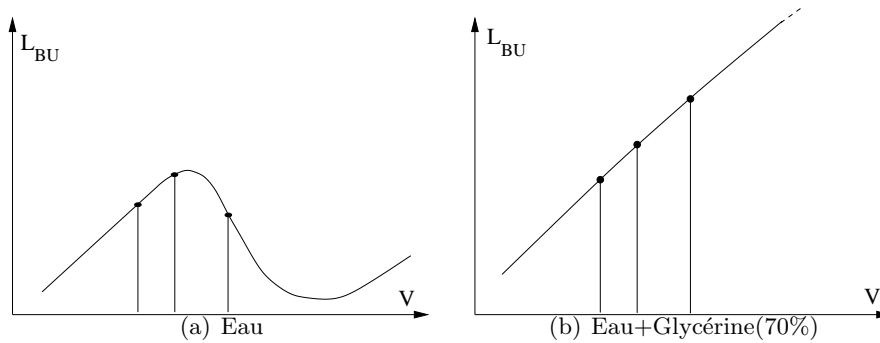


Figure 3.31: *Allure des courbes de stabilité pour (a) l'eau, (b) le mélange visqueux. Les points de fonctionnement utilisés dans ce travail y sont indiqués.*

3.4.2 Dynamique des perturbations - Comparaison avec le jet excité

Chacune des expériences permet de tracer l'évolution des portraits de phase en fonction de la distance à la sortie de buse (voir annexe D).

Si nous prenons comme exemple le cas de l'eau à 1.29 m.s^{-1} (portraits reconstruits tracés sur la figure 3.32), nous pouvons commencer par calculer systématiquement les sections de Poincaré et les applications de premier retour pour toute position le long du jet. Un exemple est donnée sur la figure 3.33. Nous pouvons noter que les mesures réalisées par ombroscopie permettent d'obtenir des portraits de phases dont la mesure du diamètre non perturbé donne la position du point fixe, situé au centre des trajectoires des portraits. L'identification de ce point fixe autour duquel "tournent" les trajectoires permet de réaliser facilement la section de Poincaré définie par:

$$P_+ = \{(X, Z) \in \mathbb{R}^2 \mid X = Y, \dot{X} > 0\} \quad (3.4)$$

Le calcul systématique des sections de Poincaré et de l'application de premier retour qui leur est associée, pour tous les jets, à toutes les positions de mesure le long du jet, ne permet pas de mettre en évidence une application sur laquelle une structure caractéristique d'une dynamique déterministe, fortement dissipative et de basse dimension, puisse être identifiée.

Pour comparer la dynamique d'un jet libre avec celle du jet excité, nous opérons à nouveau la même procédure que dans l'étude précédente afin de pouvoir calculer l'application de premier retour sur l'angle de phase φ . Parmi les points de fonctionnement que nous avons retenus pour mener la campagne de mesures sur le jet libre, nous pouvons distinguer deux cas:

- 1- Les jets ont une vitesse débitante inférieure ou égale à la vitesse critique de la courbe de stabilité qui leur correspond:

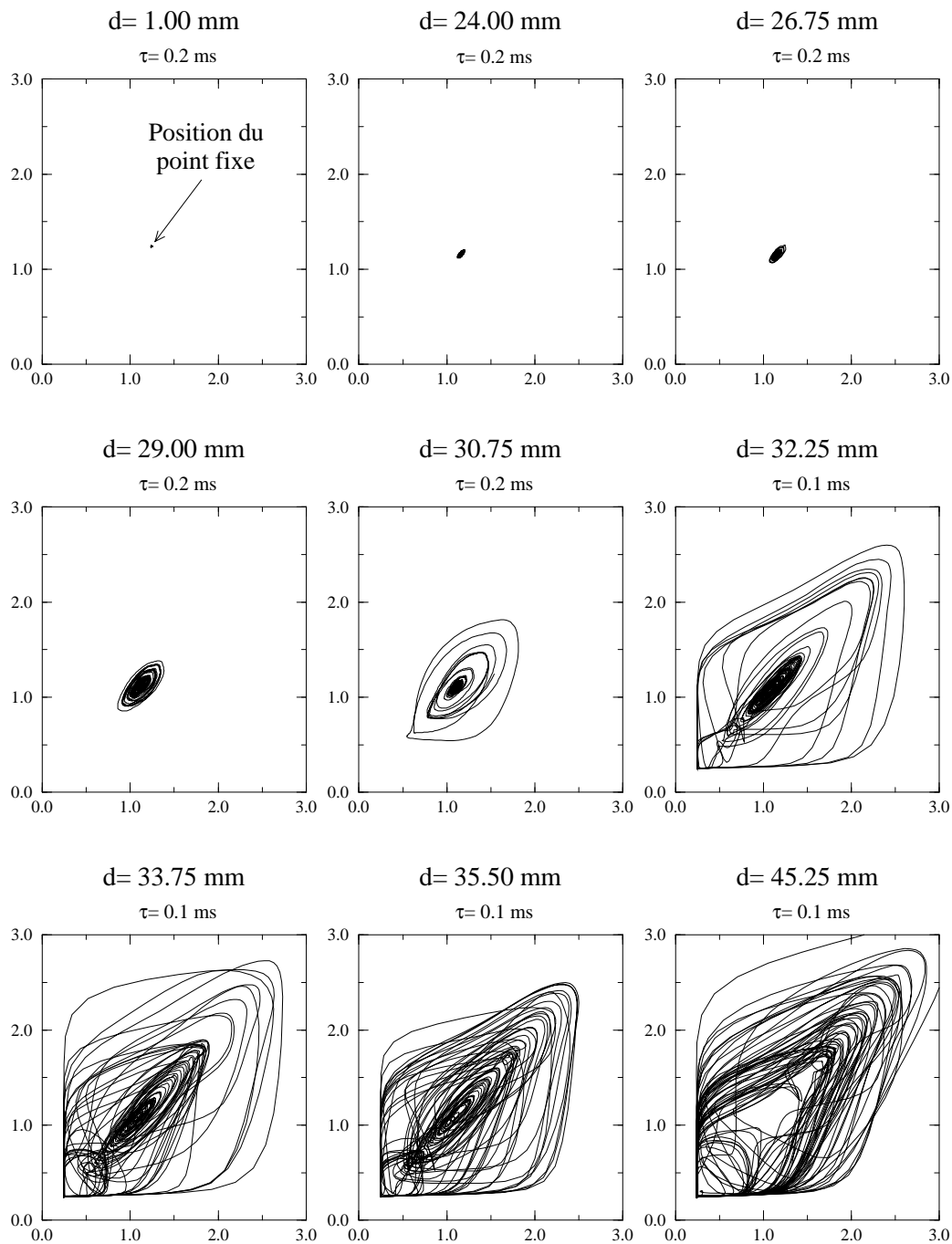


Figure 3.32: $0.1 \text{ ms} \simeq 1/(1.85 F_{\text{Rayleigh}})$ Evolution des portraits de phase en fonction de la distance à la buse pour l'eau à 1.29 m/s . Les gouttes induisent des portions de trajectoires parallèles aux axes de coordonnées. Dès que les gouttes apparaissent (ici pour $d \geq 32.25 \text{ mm}$), le décalage doit être divisé par deux pour reconstruire convenablement le portrait de phase.

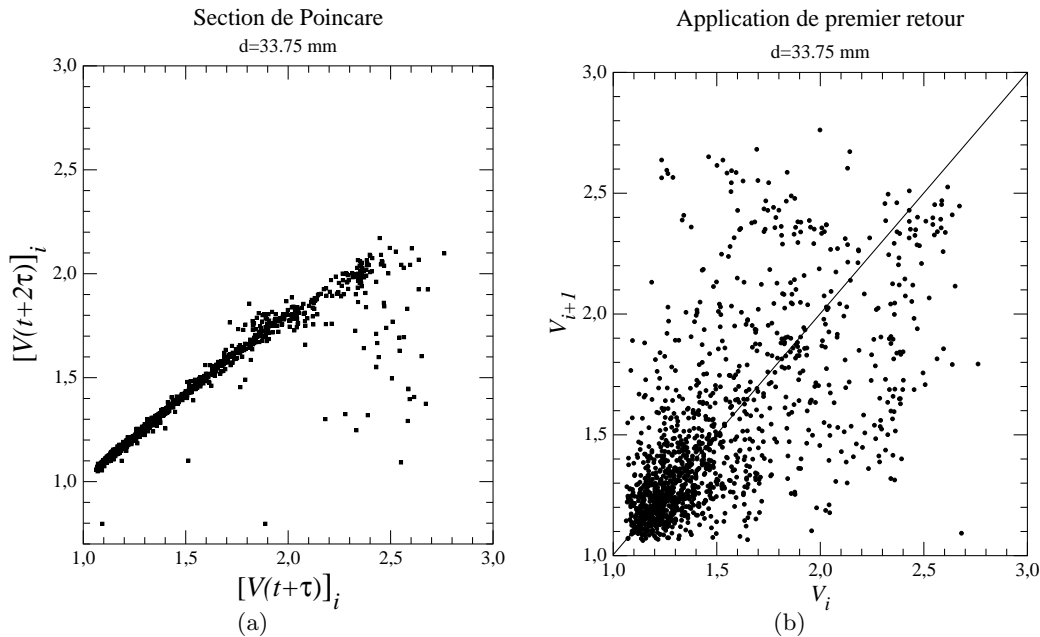


Figure 3.33: (a) Section de Poincaré et (b) application de premier retour dans le cas de l'eau à 1.29 m.s^{-1} , à $d = 33.75 \text{ mm}$ de la sortie de la buse.

Liquide	Vitesse débitante: V
eau	1.29 m.s^{-1}
	1.66 m.s^{-1}
eau-glycérine (70%)	1.28 m.s^{-1}
	1.65 m.s^{-1}
	2.15 m.s^{-1}

- 2- Le jet a une vitesse débitante supérieure à la vitesse critique. C'est le cas uniquement pour le jet d'eau à 2.15 m.s^{-1} .

A ces deux groupes de jets correspondent deux allures typiques de l'application de premier retour sur φ . Nous avons choisi de présenter comme exemple, (i) l'application dans le cas du jet d'eau à 1.29 m.s^{-1} pour une distance $d = 33.75 \text{ mm}$ et (ii) dans le cas du jet d'eau à 2.15 m.s^{-1} pour une distance $d = 27.00 \text{ mm}$ (Fig. 3.34). Dans le premier cas, correspondant aux cinq premiers régimes de fonctionnement, le graphe présente des similitudes de structure avec celui obtenu dans le cas du jet d'eau excité. Nous pouvons donc envisager que l'intermittence de phase mise en évidence auparavant soit aussi à la base de la dynamique du jet libre dans la majorité des cas rencontrés dans ce travail. Dans l'autre cas, pour le jet d'eau dont la vitesse débitante a dépassé le point critique, l'application ne montre plus une telle structure. Au contraire, la répartition des points est relativement aléatoire (voir explications ci-après) laissant penser que la dynamique est fortement affectée par un processus stochastique.

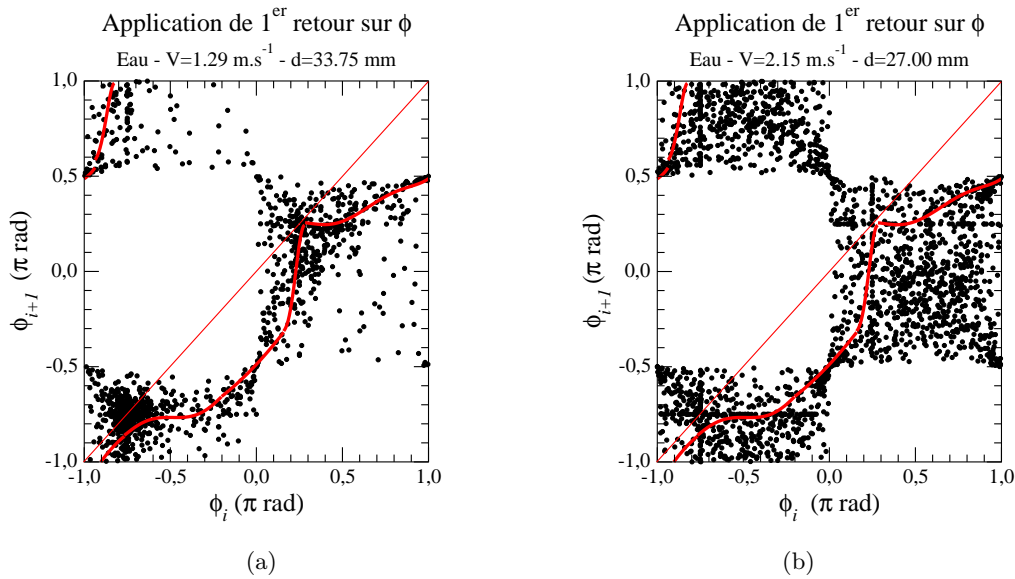


Figure 3.34: *Exemple d'applications de premier retour sur φ dans le cas du jet libre pour chacun des deux types de régimes observés: (a) avant le point critique; (b) après le point critique attribué à l'influence du profil des vitesses non plat en sortie de buse. Pour comparaison, figure en gris l'approximation par morceaux de l'application sur φ à $d = 15.50 \text{ mm}$ dans le cas du jet excité.*

Le lecteur remarquera que des zones entières ne sont pas du tout visitées par les points de l'application sur φ . Cela est dû à la propriété de l'angle de phase φ lorsqu'il est défini sur une application de premier retour, comme c'est ce que nous avons réalisé ici. En effet, si nous considérons deux points successifs de l'application de premier retour calculée sur les abscisses de la section de Poincaré, ceux-ci ont des coordonnées qui peuvent être notées (x_i, x_{i+1}) pour le premier et (x_{i+1}, x_{i+2}) pour le suivant. Ainsi, lorsque le premier point est dans le demi-espace des y positifs ($x_{i+1} > 0$), le point suivant sur l'application de premier retour est nécessairement dans le demi-espace des x positifs. En procédant au changement de coordonnées, cela se traduit par: si φ_i est compris entre 0 et π , alors φ_{i+1} est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. C'est ce que nous retrouvons effectivement sur l'application de premier retour sur φ , où lorsque φ_i est compris entre 0 et π , les régions correspondant à $\varphi_{i+1} > \pi/2$ et $\varphi_{i+1} < -\pi/2$ ne sont pas visitées.

A ce stade de l'analyse, il faut arriver à caractériser la composante déterministe de la dynamique. Nous avons donc choisi d'étudier la dynamique des jets libres par l'intermédiaire d'une dynamique symbolique probabiliste dont l'intérêt, le fonctionnement et les résultats nécessitent d'être traités dans un chapitre complet qui suit celui-ci.

3.4.3 Croissance des perturbations le long du jet

Intéressons-nous maintenant à la simple évolution de l'amplitude des perturbations sans chercher à connaître la manière dont elles s'ordonnent (ce qui sera donc traité complètement au chapitre IV). Cette étude sera basée sur le calcul et la comparaison des graphes donnant

l'évolution des modes repérables dans les spectres de puissances des séries temporelles.

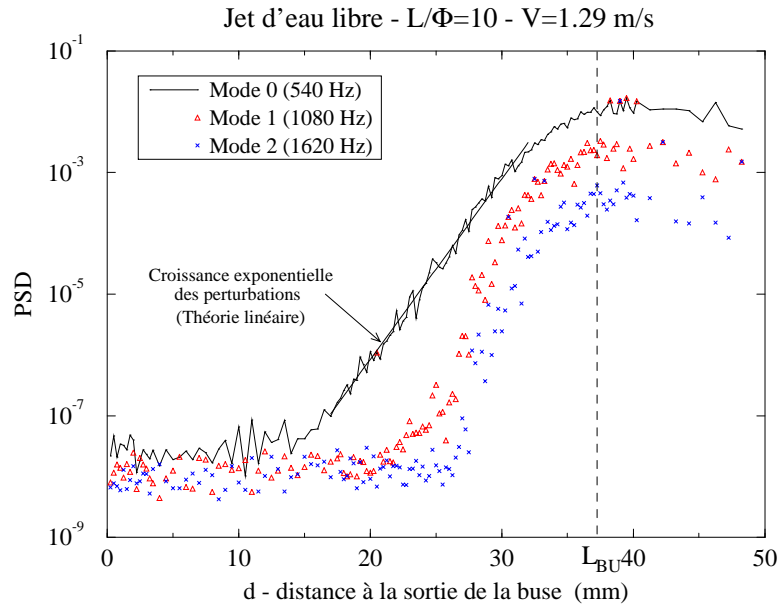


Figure 3.35: Croissance du mode fondamental (fréquence de Rayleigh dans un régime linéaire) et des deux premières harmoniques qui lui sont associées. Le régime linéaire se traduit par une croissance linéaire (échelle logarithmique) du mode fondamental sur la majeure partie du jet.

Comme exemple, nous analyserons les propriétés de cette représentation dans le cas du jet d'eau à 1.29 m.s^{-1} . Sur la figure 3.35, la puissance du mode fondamental, correspondant à la fréquence naturelle des oscillations évoluant sur le jet (ici, il s'agit donc de la fréquence de Rayleigh), et de ses deux premières harmoniques est reportée pour chaque point de mesure le long du jet. Dans ce régime linéaire, il n'est pas étonnant de constater que l'amplitude du mode fondamental (échelle logarithmique en ordonnée) évolue linéairement avec la distance à la buse sur une longueur de jet importante (de 15 mm à 32 mm environ). Cela traduit la croissance exponentielle des perturbations le long du jet. Avant 10 mm , il n'y a pas de croissance de l'amplitude des modes laissant penser que la limite mesure/bruit-expérimental est atteinte. Cependant, ce résultat peut aussi traduire simplement le fait qu'il n'y a pas amplification de l'amplitude des perturbations sur cette portion du jet.

A proximité de la rupture en gouttes (au delà de 32 mm environ), le développement des perturbations s'éloigne du régime de croissance exponentielle. En même temps, les deux premières harmoniques croissent successivement et commencent à imposer leur influence sur le mécanisme de rupture en gouttes comme les théories faiblement non linéaires le prévoient [5]. Les harmoniques croissent les unes après les autres avec des taux de croissance de plus en plus importants à mesure que l'ordre de l'harmonique considérée est élevé. Cela rappelle aussi le résultat obtenu par H.H. Taub [11] sur des jets excités.

Nous allons maintenant comparer ce type d'évolution entre les différents régimes choisis

(Fig. 3.36). En se limitant au tracé de la puissance du mode fondamental en fonction de la distance à la sortie de la buse, il est facile de constater que, globalement, les traits principaux de l'évolution ressemblent beaucoup, dans la majorité des cas, à ceux décrits précédemment. Mais, dans le cas du jet d'eau, nous pouvons remarquer que le point où débute la croissance des perturbations se rapproche fortement de la sortie de la buse à mesure que l'on s'approche de la vitesse critique, puis qu'on la dépasse.

Avant d'aller plus loin dans la comparaison entre les différents régimes, il est nécessaire de replacer les ordres de grandeurs donnant les tailles caractéristiques sur lesquelles croissent les perturbations. Dans la figure 3.36, nous avons cherché à présenter les évolutions avec des échelles permettant de placer la rupture en gouttes à la même position sur le graphe, d'un régime de fonctionnement à l'autre. Ce mode de représentation est pratique pour comparer les évolutions et relever les différences fondamentales. Cependant, il est plus intéressant de reprendre ce type de représentation en essayant de visualiser des temps caractéristiques rendant compte de la physique de la rupture en gouttes. Ainsi, nous avons choisi une échelle des distances (en abscisse) inversement proportionnelle à la vitesse débitante. Deux temps de rupture identiques⁹ pour des vitesses débitantes différentes seront donc localisés à une même position sur cette nouvelle représentation (3.37). Notons alors que la pente des droites sur lesquelles s'inscrivent les évolutions, dans leur portion linéaire, représente un taux de croissance temporel (celui utilisé dans le formalisme de la théorie linéaire, par exemple).

Plusieurs points sont à relever. D'abord, en ignorant l'évolution la plus en marge (Eau - $V = 2.15 \text{ m.s}^{-1}$), nous pouvons associer un temps de rupture à un type de liquide donné. En effet, les temps de rupture pour l'eau, puis pour le mélange eau/glycérine, sont quasiment identiques d'un régime à l'autre. Comme on peut s'y attendre, le temps de rupture pour l'eau est plus court que dans le cas du mélange eau/glycérine: les temps caractéristiques du développement de l'instabilité capillaire sont effectivement plus grands lorsque la viscosité freine ce processus. Nous pouvons aussi constater que les évolutions sont quasi-identiques à celle décrite comme exemple dans le cas de l'eau à 1.29 m.s^{-1} : un plateau où les perturbations ne se développent pas; une portion où la croissance est quasi-linéaire; et une partie où les non linéarités s'imposent à proximité de la rupture en gouttes. Le "plateau" est cependant un peu moins présent dans les quatre autres régimes (eau à 1.66 m.s^{-1} , mélange eau/glycérine à $V = 1.28 \text{ m.s}^{-1}$, 1.65 m.s^{-1} et 2.15 m.s^{-1}), correspondant par ailleurs aux quatre régimes ayant le même taux de croissance dans la partie linéaire de l'évolution. Le minimum est identique lui aussi (environ 10^{-8} sur l'échelle des puissances) ce qui laisse penser qu'il s'agit effectivement de la limite de détection des perturbations vis-à-vis du bruit de mesure.

Ce qui va nous intéresser plus particulièrement vient de la constatation suivante: le temps de rupture est remarquablement plus faible pour l'eau ayant une vitesse supérieure à la vitesse critique, impliquant une diminution sensible de la longueur de rupture. Cette diminution brutale du temps de rupture n'est pas due à une forte augmentation du taux de croissance des perturbations comme les modifications de la théorie linéaire l'envisagent souvent pour expliquer la position du point critique sur la courbe de stabilité (voir chapitre

⁹Nous rappelons que la longueur de rupture et le temps de rupture sont reliés par l'équation $L_{BU} = V t_{BU}$ où V est la vitesse débitante du jet (chap. I).

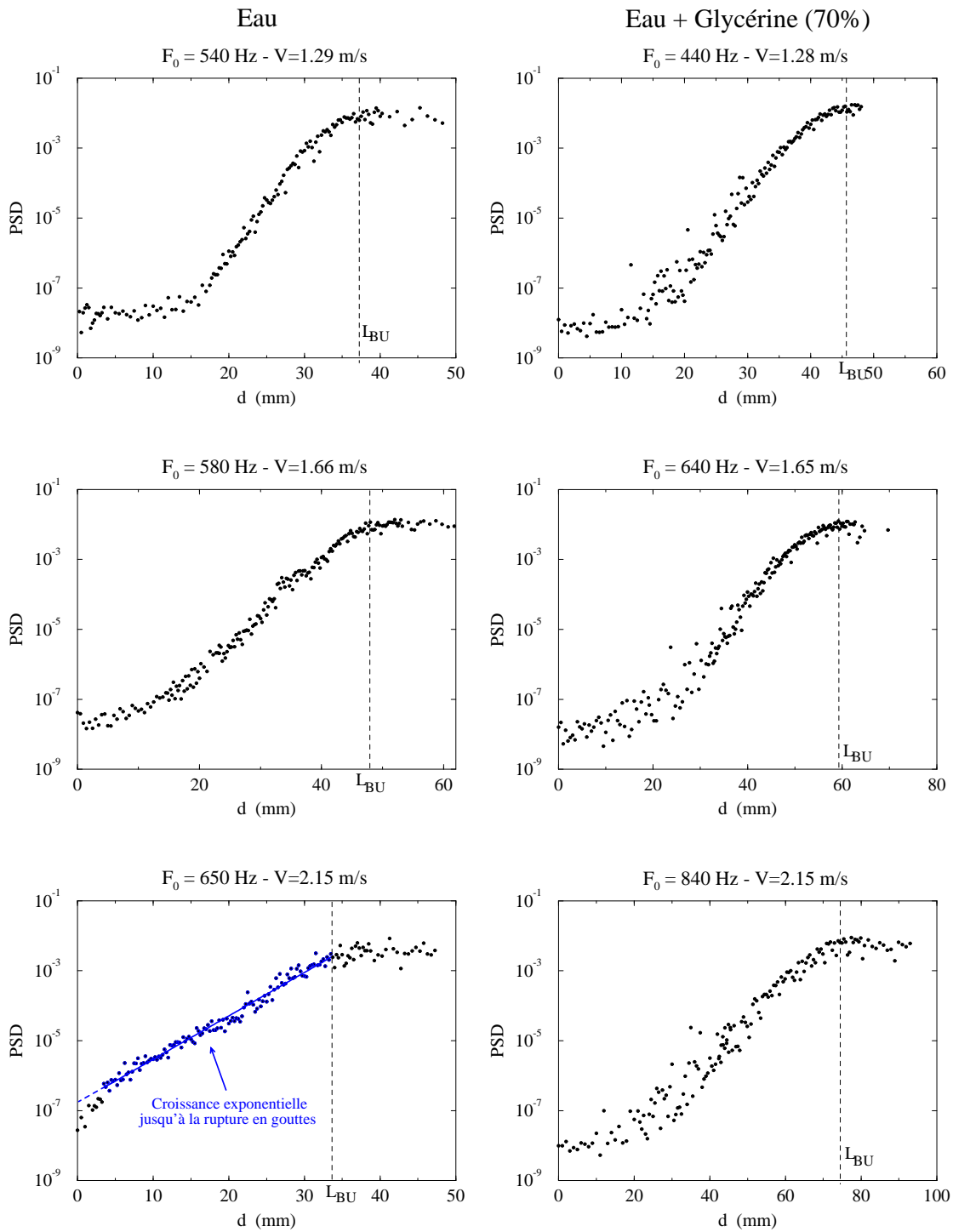


Figure 3.36: Evolution du mode fondamental en fonction de la position le long du jet donnée par d , pour les six points de fonctionnement: à gauche, pour l'eau; à droite pour le mélange eau/glycérine(70%). La vitesse débitante augmente du haut vers le bas. L'échelle est telle que la longueur de rupture (L_{BU}) est représentée par la même distance à l'origine sur l'axe des abscisses dans tous les cas. ($L/\Phi = 10$)

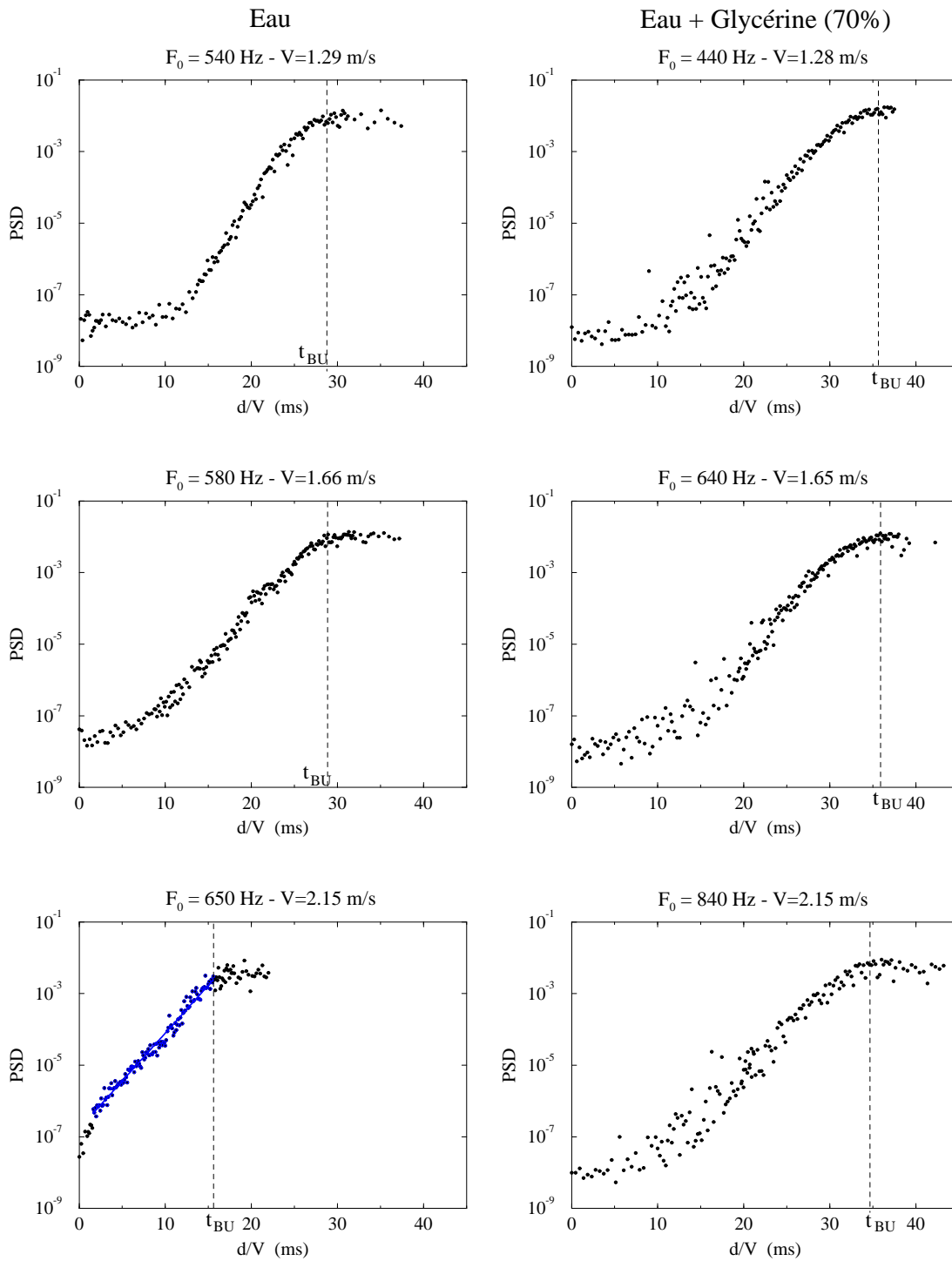


Figure 3.37: Evolution du mode fondamental en fonction de la position le long du jet donnée par d/V , pour les six points de fonctionnement: à gauche, pour l'eau; à droite pour le mélange eau/glycérine(70%). La vitesse débitante V augmente du haut vers le bas. L'échelle est telle que les distances reportées en abscisse sont inversement proportionnelles à la vitesse débitante. Deux temps de rupture identiques sont donc reportés à la même position sur l'axe des abscisses quelle que soit la vitesse débitante. ($L/\Phi = 10$)

I). Rappelons que cette explication, justifiée lorsque la position du point critique est pilotée par l'apparition des forces aérodynamiques (interaction liquide/gaz), est encore couramment utilisée lorsque la vitesse critique est due à l'influence du profil des vitesses comme c'est le cas ici. Or, le taux de croissance n'augmente pas avec la vitesse débitante. Dans le cas de l'eau, nous pouvons voir que ce taux de croissance diminue même légèrement à mesure que la vitesse débitante augmente. Par contre, nous observons clairement que le développement des perturbations prend place de plus en plus tôt sur le jet. Au delà de la vitesse critique, la tendance initiale est même inversée: les perturbations de faibles amplitudes sont très rapidement amplifiées sur une très courte portion du jet en sortie de buse et retrouvent ensuite le rythme normal de croissance décrit initialement à propos de la valeur des taux de croissance temporels.

Rappelons encore que l'idée d'une déstabilisation précoce du jet sous l'influence du profil des vitesses au delà de la vitesse critique, avait été pressentie par Christophe Dumouchel [12] (cf. chap. 1). C'est sous l'action de la relaxation du profil des vitesses que des points d'inflexion peuvent apparaître créant ainsi des zones fortement déstabilisables. Nous apportons ici une preuve directe de cette action déstabilisatrice ainsi que des renseignements complémentaires concernant la description des mécanismes d'initiation des perturbations. Sous influence du profil des vitesses, et au delà de la vitesse critique (eau - 2.15 m.s^{-1}), le jet se déstabilise fortement et rapidement à proximité de la sortie de buse ($d < 3 - 4 \text{ mm}$) pour laisser rapidement place à une croissance exponentielle plus lente, caractéristique de l'instabilité capillaire. Avant le point critique (1.29 m.s^{-1}), il existe un temps de latence à partir duquel l'instabilité capillaire peut prendre place. Au niveau du point critique (1.66 m.s^{-1}), la situation est intermédiaire: l'instabilité provoquée par le profil des vitesses initie les perturbations un peu plus tôt qu'à 1.29 m.s^{-1} , mais le taux de croissance ayant diminué, le temps de rupture reste identique.

L'expérience nous montre aussi pourquoi le taux de croissance diminue à mesure que la vitesse débitante augmente dans le cas de l'eau. En effet, l'initiation des perturbations étant différente pour le jet d'eau à 2.15 m.s^{-1} , la longueur d'onde de ces perturbations ne correspond pas à celle qui évoluent naturellement sur le jet soumis uniquement à l'instabilité capillaire. Nous pouvons nous en rendre compte en constatant que la fréquence du mode fondamental repérée sur le spectre de puissance n'évolue pas linéairement avec la vitesse d'injection dans le cas de l'eau, alors que c'est le cas pour le mélange eau/glycérine (tab. 3.1).

Lorsque cette évolution est linéaire, cela prouve que la longueur d'onde des perturbations évoluant sur le jet est indépendante de la vitesse du jet (cas du jet visqueux). Par contre, lorsque les perturbations n'ont plus la même origine (jet sous l'influence du profil des vitesses...), leur longueur d'onde ne correspond plus à la longueur d'onde des perturbations initiées par l'instabilité capillaire. Nous constatons que la longueur d'onde des perturbations a en fait tendance dans ce cas à augmenter avec la vitesse débitante et, de la même manière, la fréquence des perturbations observée dans le cas du jet d'eau est inférieure à celle du mélange eau/glycérine. Dans le cas du jet d'eau de vitesse supérieure à la vitesse critique, la longueur d'onde effective est un peu plus grande que celle de la perturbation "naturelle" vis-à-vis de l'instabilité capillaire. Le taux de croissance de cette perturbation n'est donc pas le taux de croissance maximal. Cela explique pourquoi ce taux de croissance, mesuré sur la courbe expérimentale, est un peu plus faible que celui de la

Liquide	V ($m.s^{-1}$)	F_0 (Hz)	t_{BU} (ms)	T_x ($.10^X ms^{-1}$)	t_l (ms)
eau	1.29	540	28.8	0.387	11.5
	1.66	580	28.9	0.259	8.9
	2.15	650	15.6	0.267	non déf.
eau-glycérine	1.28	440	35.7	0.297	11.5
	1.65	640	35.9	0.310	13.8
	2.15	840	34.7	0.234	10.6

Table 3.1: *Tableau récapitulatif des caractéristiques des différents jets libres. On notera la valeur de la fréquence du mode fondamental en fonction de la vitesse débitante. Pour le mélange visqueux, la relation est quasi-linéaire tandis que, pour l'eau, ce n'est pas le cas. T_x est le taux de croissance du mode fondamental dans la partie où la croissance est exponentielle. Il correspond alors à la pente de la droite sur les courbes de la figure 3.37 en tenant compte de l'échelle de représentation choisie. t_l est la durée avant le début de la croissance (temps de latence).*

perturbation "naturelle" évoluant sur les autres jets.

3.5 Conclusion

Nous avons vu que la dynamique des jets libres est souvent proche de celle de l'intermittence de phase observée en jet d'eau excité. Cette intermittence de phase nous a permis de comprendre le mécanisme de rétroaction permettant d'appréhender la dynamique uniquement à l'aide de ses caractéristiques temporelles. Les ondes capillaires générées par la rupture en gouttes mettent en place ce mécanisme de rétroaction en évoluant à la surface du jet du point de rupture en remontant vers le haut du jet. C'est la synchronisation de ce mécanisme par une excitation bien choisie qui a permis de confiner les modes non linéaires sur une dynamique d'intermittence de phase offrant la plus faible dispersion en gouttes possible.

D'autre part, l'analyse de la croissance des perturbations a permis de fournir une preuve directe de l'action du profil des vitesses sur l'initiation des perturbations. Ce résultat est primordial car il permet d'envisager une modification de la théorie linéaire sur la base de l'amplitude des perturbations initiales ou sur la modélisation de l'initiation des perturbations en sortie de buse (avant la croissance exponentielle bien décrite par la théorie linéaire). Ce résultat rend donc définitivement caduque l'hypothèse selon laquelle les modifications de la théorie linéaire pour la description des jets de zone 1 (chap. I, jets soumis à l'action de la relaxation du profil des vitesses) doivent être basées sur la réécriture de la relation de dispersion. Une amélioration de cette théorie devra tenir compte de la modélisation de l'initiation des perturbations selon le régime d'injection étudié.

La différence de nature entre l'initiation "naturelle" des perturbations et celle induite de la relaxation du profil des vitesses se retrouvera dans l'étude de la dynamique des perturbations à l'aide de la dynamique symbolique (chapitre suivant). Nous pourrons

alors préciser le mécanisme induisant les perturbations initiales et comparer l'action de la relaxation du profil des vitesses en sortie de buse avec la dynamique des autres régimes de fonctionnement du jet. Nous verrons alors clairement que ces derniers montrent chacun une dynamique proche de celle de l'intermittence de phase décrite dans le cas du jet excité.

Bibliography

- [1] S. Leroux, C. Dumouchel, and M. Ledoux. The stability curve of Newtonian liquid jets. *Atomisation and Sprays*, **6**(6), 1996.
- [2] J.H. Xing, A. Boguslawski, A. Soucemarianadin, P. Atten, and P. Attané. Experimental investigation of capillary instability: results on jet stimulated by pressure modulations. *Experiments in fluids*, **20**:302–313, 1996.
- [3] T.A. Kowalewski. On the separation of droplets from a liquid jet. *Fluid dynamics research*, **17**:121–145, 1996.
- [4] J. H. Xing, A. Soucemarianadin, and P. Attane. Experimental study of the breakup of viscoelastic fluid jets. *Proceedings de la 6^{ème} Int. Conf. on liquid Atomization and Sprays Syst. (6^{ème} ICLASS), Rouen*, 1994.
- [5] M.C. Yuen. Non-linear capillary instability of a liquid jet. *J. Fluid Mech.*, **33**:151–163, 1968.
- [6] *Le chaos*. Collection du C.E.A., Eyrolles, Paris, 1988.
- [7] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolvsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986.
- [8] E. Ringuet. *Instabilités temporelles et spatio-temporelles créées par la présence d'un fil chaud sous une surface libre*. Thèse de l'université de Rouen, Octobre 1994.
- [9] P. Bergé, I. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, Paris, 1984.
- [10] C. Letellier et O. Ménard. *Analyse de processus de combustion: vers une modélisation du cycle de combustion*. Rapport de contrat PSA, fév. 1998.
- [11] H.H. Taub. Investigation of nonlinear waves on liquid jets. *The Physics of Fluids*, **19**(8):1124–1129, 1976.
- [12] S. Leroux, C. Dumouchel, and M. Ledoux. The break-up length of laminar cylindrical liquid jets. modification of Weber's theory. *Proceedings de l' ICLASS-'97, Séoul*, **1**:353–360, 1997.

Chapter 4

Analyse des phénomènes par la dynamique symbolique

Résumé

La dynamique d'intermittence de phase mise en évidence au chapitre précédent pour différents régimes de fonctionnement du jet est caractérisée grâce à l'élaboration d'une dynamique symbolique probabiliste. Ainsi, après avoir montré l'intérêt d'une telle étude dans différents cas théoriques, cet outil nous permet de différencier les différentes situations de rupture en gouttes rencontrées dans les expériences menées au cours de cette thèse. Il permet notamment de statuer sur la nature déterministe ou, dans le cas contraire, sur le caractère stochastique de la dynamique. Des conclusions sur l'influence du profil des vitesses sur la rupture en gouttes sont finalement données sur cette base, en attribuant au jet turbulent une dynamique stochastique contrairement aux autres jets étudiés.

4.1 Introduction

Aux chapitres 2 et 3, nous avons utilisé une orbite périodique pour caractériser le régime dynamique du jet à une distance donnée de la buse. Ceci repose sur la mise en évidence par G.W. Hill [1] qu'une orbite périodique est une première approximation de la trajectoire réelle. Si G. Hill obtint ses résultats dans le cadre du problème restreint des trois corps, H. Poincaré généralise ce résultat à tout système d'équations différentielles et montre que, étant donné une solution périodique, une solution quelconque passera aussi près que l'on veut de cette solution périodique et y reviendra une infinité de fois [2]. Ces solutions périodiques sont maintenant vues comme le squelette d'un attracteur chaotique sur lequel se développe la trajectoire d'un système donné [3]. Précisons que la dynamique doit présenter un certain nombre de caractéristiques pour être qualifiée de chaotique (déterminisme, sensibilité aux conditions initiales, propriétés de récurrence...) : de ce qui précède, nous ne pouvons encore affirmer que les processus d'atomisation sont associés à une telle dynamique. Néanmoins, lorsqu'ils sont adaptés au problème étudié, les concepts de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires peuvent être utilisés avec profit pour l'analyse de processus complexes, comme nous allons le voir.

Le concept qui va se trouver au cœur de ce chapitre est celui de *dynamique symbolique*: c'est une description de l'évolution temporelle du système à l'aide de symboles associés à différentes régions de l'attracteur. Toute la difficulté résulte dans le choix de la partition de l'attracteur, partition réalisée, en théorie, sur des critères topologiques. Comme nous le verrons, lorsque la dynamique est trop complexe, la partition ne peut être réalisée sur ces critères et une partition de nature statistique est utilisée: cette description doit être introduite lorsque le volume borné de l'espace des phases visité n'est plus associé à un attracteur chaotique, mais à des portraits de phases dont la structure est perturbée par des contraintes extérieures telles que du bruit, des forçages. Les portraits de phases sont alors caractérisés par des applications de premier retour sans structure nette et offrant une apparence plus ou moins marquée de nuage de points, un peu comme ceux rencontrés lors de l'étude de processus d'atomisation. De manière à bien préciser les limites de cette dynamique symbolique construite sur des critères statistiques, nous commencerons par introduire le concept sur des cas théoriques simples. Après avoir dégagé les difficultés rencontrées lors de l'utilisation d'une telle description pour l'analyse de dynamiques plus compliquées, nous verrons quelle est la nature de l'information donnée par une dynamique symbolique construite sur une partition d'équiprobabilité. Les processus d'atomisation seront ensuite analysés à l'aide de cette méthode.

4.2 Dynamique symbolique

4.2.1 Cas unimodal

Le concept de dynamique symbolique va être introduit à partir d'un exemple très simple de dynamique chaotique généré par la *fonction logistique*, prototype de nombreuses études sur les systèmes dynamiques non linéaires. Cette fonction résulte des travaux sur la croissance des populations par un mathématicien belge, Pierre Franccois Verhulst (1804 – 1849), qui greffe sur l'idée de croissance exponentielle introduite par Thomas Malthus (1766 – 1834), la notion de facteurs inhibiteurs ¹: il obtient ainsi un modèle simple selon lequel le taux de croissance dépend de la population. Ce modèle s'écrit en langage mathématique:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) = f_\mu(x_n) \quad (4.1)$$

où x_n est la population à la $n^{\text{ème}}$ année et μ le taux de croissance de la population étudiée. Cette fonction est définie pour $x_n \in [0; 1]$ et $\mu \in [0; 4]$. Pour certaines valeurs du paramètre de contrôle μ , l'évolution de la population x_n est de nature chaotique. Par exemple, pour $\mu = 3.8$, la fonction logistique génère un comportement chaotique (fig. 4.1). Précisons que la fonction logistique peut être vue comme une application de premier retour à une section de Poincaré d'un flot. En 1976, R.M. May [4] met en évidence l'existence d'orbites périodiques au sein d'un tel régime chaotique. De manière à identifier celles-ci, il utilise une dynamique symbolique, c'est à dire qu'à une trajectoire représentée par une suite de valeurs x_n caractérisant l'évolution de la population

$$x_0, x_1, x_2, \dots x_n \dots$$

¹Cette notion est à rapprocher de celle de rétroaction dont nous avons déjà parlé dans le premier chapitre, à propos des intermittences dans un jet d'air, §1.4.2.

où x_0 représente la condition initiale, il associe une suite de symboles

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \dots$$

définis de la façon suivante:

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n < x_c \\ 1 & \text{si } x_n > x_c \end{cases} \quad (4.2)$$

où x_c est le point critique assurant la partition de l'intervalle invariant I_μ visité par la trajectoire $\{x_n\}$ en deux régions. Nous parlons d'intervalle invariant dans la mesure où I_μ correspond à l'intervalle visité par le comportement asymptotique de la trajectoire, le régime transitoire n'étant pas considéré dans le cadre de cette étude. Précisons que ce régime transitoire correspond, par exemple, à la mise en régime stationnaire d'une expérience thermique. Dans le cas de la fonction logistique, le point critique x_c est défini par le maximum de la fonction qui est ici égal à $1/2$ quelle que soit la valeur de μ . La dynamique est dite *unimodale* car elle n'est associée qu'à un unique point critique. La trajectoire chaotique est ainsi représentée par une suite de 0 et de 1. On peut montrer que cette partition distingue deux comportements dont la topologie diffère.

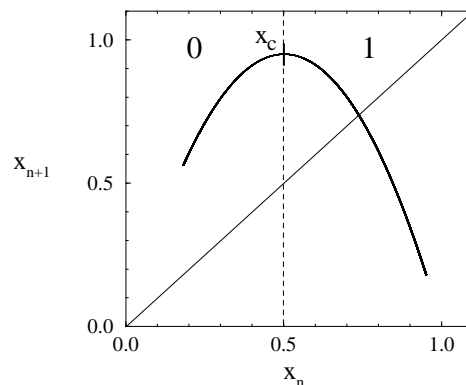


Figure 4.1: *Comportement chaotique généré par la fonction logistique pour $\mu = 3.8$.*

Pour cela, prenons deux points A et B , de l'intervalle I_μ inscrits sur la branche croissante ($x < x_c$) tels que $x_A < x_B$ (fig. 4.2.a). Sous l'action de f_μ , les points images, A' et B' , sont tels que $x_{A'} < x_{B'}$: l'ordre relatif des points de la branche croissante est préservé sous une itération de f_μ (fig. 4.2.b). Prenons maintenant deux points, C et D , localisés sur la branche décroissante tels que $x_C < x_D$ (fig. 4.2.c). Sous l'action de f_μ , les points images, C' et D' , sont tels que $x_{C'} > x_{D'}$: l'ordre relatif des points de la branche décroissante est renversé sous une itération de f_μ (fig. 4.2.d) Afin de faciliter l'utilisation de la dynamique symbolique, nous associerons un entier pair à la branche croissante (préservant l'ordre) et un entier impair à la branche décroissante (renversant l'ordre): à deux symboles, nous avons ainsi 0 pour la branche croissante et 1 pour la branche décroissante.

Toute trajectoire issue d'une condition initiale x_0 et représentée par la suite de points

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \dots$$

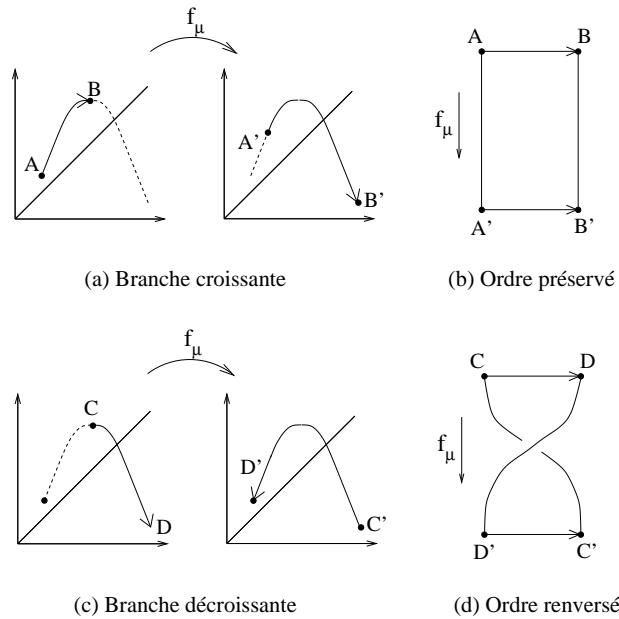


Figure 4.2: *Propriétés topologiques associées aux deux branches de la fonction logistique.*

est codée par une séquence S de symboles choisis sur l'ensemble $\Sigma_2 = \{0; 1\}$ telle que

$$S = \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \dots$$

La partition de l'ensemble invariant I_μ est dite *générique* lorsqu'à toute séquence S de symboles correspond une et une seule trajectoire sur l'ensemble invariant I_μ , et réciproquement. Les points x_n d'une trajectoire sont localisés selon un certain ordre sur l'intervalle I_μ ; celui-ci peut être déterminé directement à partir des séquences symboliques selon l'*ordre unimodal* [5, 6, 7] ou, de manière plus générale, selon l'ordre d'implication \prec_I . La relation d'ordre \prec_I sur l'ensemble de symboles Σ_2 est définie comme suit.

- Définition: Soit l'ordre naturel $0 < 1$ sur Σ_2 . Soient deux séquences symboliques

$$S_1 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \sigma_{k+1} \dots$$

et

$$S_2 = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k \tau_{k+1} \dots$$

définies sur Σ_2 .

Supposons que $\sigma_i = \tau_i$ pour tout $i < k$ et que $\sigma_k \neq \tau_k$. Alors $S^* = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-1} = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{k-1}$ est la partie commune aux deux séquences S_1 et S_2 . Les deux séquences sont ordonnées selon la parité de S^* définie comme la parité de la somme $\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_1 \prec_I S_2 & \text{si } S^* \text{ est paire et } \sigma_k < \tau_k \\ S_1 \prec_I S_2 & \text{si } S^* \text{ est impaire et } \tau_k < \sigma_k \\ S_2 \prec_I S_1 & \text{si } S^* \text{ est impaire et } \sigma_k < \tau_k \\ S_2 \prec_I S_1 & \text{si } S^* \text{ est paire et } \tau_k < \sigma_k \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Lorsque les séquences S_1 et S_2 ne présentent aucune partie commune, S^* est considérée comme étant paire. Lorsque $S_2 \prec_I S_1$, on dit que la séquence S_1 implique la séquence S_2 .

L'équivalence entre l'ordre unimodal sur l'ensemble des séquences symboliques et l'ordre naturel sur les coordonnées x_n de l'intervalle invariant I_μ impose que, quelles que soient les séquences S_1 et S_2 associées à deux points distincts x_1 et x_2 appartenant à l'intervalle I_μ ,

$$x_1 < x_2 \iff S_1 \prec_I S_2 .$$

On peut montrer qu'au sein de l'intervalle I_μ , il peut exister des orbites périodiques vérifiant

$$x_{n+p} = f_\mu^p(x_n) = x_n \quad \text{pour des } p \in \mathbb{N}.$$

La trajectoire décrite par l'ensemble des points $\{x_i\}_{i=n}^{n+p}$ est une orbite ξ de période p . Chacun des points x_i tels que $i \in [n, n+p]$ est un point périodique de l'orbite ξ . A chacun de ces points périodiques, il peut être associé une séquence de p symboles $\{\sigma_i\}_{i=n}^{n+p}$. Puisque l'orbite ξ est de période p , les p premiers symboles sont donc suffisants pour identifier les points périodiques. Ainsi, à chaque point périodique x_i de l'orbite ξ représentée par

$$x_1 x_2 \dots x_i \dots x_p$$

correspond une permutation circulaire de la séquence

$$S_1 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i \dots \sigma_p$$

qui code le point périodique x_i de l'orbite ξ . Si l'on classe les p permutations circulaires de S_1 selon l'ordre d'implication \prec_I , la séquence $S_i = \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_p \sigma_1 \dots \sigma_{i-1}$ qui implique toutes les autres, soit

$$S_j \prec_I S_i \quad \forall j \in [1, p] \mid j \neq i$$

est la séquence du point périodique dont l'existence implique celle de l'orbite. Aussi, l'orbite ξ sera désignée par cette séquence S_i qui sera désormais notée (S_ξ) et appelée *séquence orbitale*.

Une seconde relation d'ordre peut être définie: elle agit sur les séquences orbitales et est notée \prec_F : elle se construit comme la relation d'ordre d'implication \prec_I . Si deux orbites ξ et ζ sont telles que leurs séquences orbitales respectives S_ξ et S_ζ vérifient l'ordre $S_\xi \prec_F S_\zeta$, on dit que l'existence de l'orbite ζ *force l'existence* de l'orbite ξ (Table 4.1). Un régime chaotique se développant au voisinage d'un squelette d'orbites périodiques, la population d'orbites périodiques peut être caractérisée, dans le cas d'une application unimodale, par une seule orbite périodique: en effet, les applications unimodales à maximum différentiables

sont des éléments d'une classe d'équivalence selon laquelle l'évolution de leur population d'orbites périodiques au sein de l'intervalle invariant I_μ vérifie l'ordre de forçage \prec_F lorsque l'intervalle I_μ crot sous une variation du paramètre de contrôle μ . Dans ce cas, la dernière orbite périodique créée force l'existence de toutes les autres selon l'ordre \prec_F . Cette orbite périodique particulière est appelée *orbite principale* à laquelle correspond une séquence orbitale notée (\bar{S}) qui est telle que

$$S_\xi \prec_F (\bar{S})$$

où ξ décrit l'ensemble des orbites périodiques présentes au sein de l'intervalle invariant I_μ , l'orbite principale exceptée. On peut montrer que l'orbite principale correspond à une trajectoire issue du point critique x_c , c'est à dire que l'orbite principale est représentée par la suite $\{x_i\}_{i=1}^p$ telle que

$$x_i = f_\mu^i(x_c).$$

Ces propriétés permettent une analyse très fine et très rapide de la population d'orbites périodiques pour toute dynamique unimodale dotée d'un maximum différentiable. Prenons l'exemple de la population d'orbites périodiques de la fonction logistique pour $\mu = 3.7$. Tout d'abord nous devons préciser que la dernière orbite périodique à être créée est nécessairement stable [8]: de ce fait, une trajectoire quelconque visitera plus souvent cette dernière orbite périodique que l'ensemble de toutes les autres. L'orbite principale, si sa période n'est pas trop élevée, sera identifiée à l'aide d'une probabilité de visite de l'intervalle I_μ , encore appelée *densité invariante naturelle* [9], notée $\rho(x)$. Elle indique la fréquence de visite d'un intervalle élémentaire δI de l'intervalle invariant I_μ : elle se présente sous la forme d'un histogramme. Les pics de densité qui peuvent apparatre correspondent à la localisation des différents points périodiques de l'orbite principale. Dans le cas étudié ici (fig. 4.3), la séquence principale est $(\overline{1011111})$. L'ordre de forçage permet alors de définir l'ensemble de la population d'orbites périodiques (en repérant par exemple l'orbite $(\overline{1011111})$ dans la table 4.1).

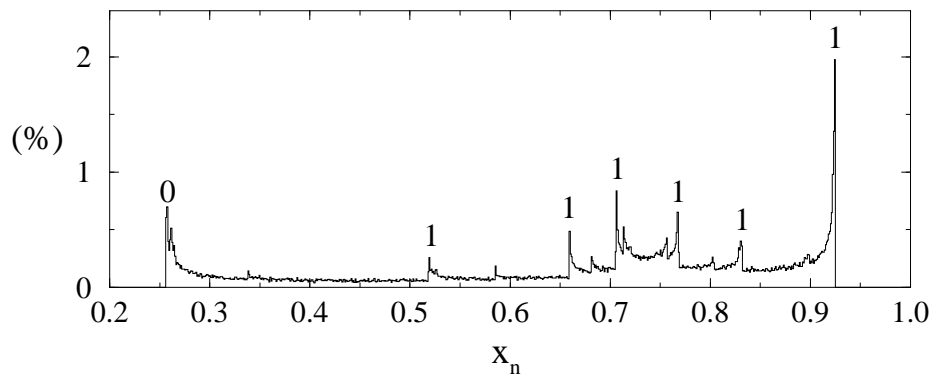


Figure 4.3: *Densité naturelle invariante de la fonction logistique pour $\mu = 3.7$. La séquence principale est $(\overline{1011111})$. Au dessus de point critique d'abscisse (0.5), les maxima sont codés 1. En dessous, ils sont codés 0 (il n'y en a qu'un ici). Les maxima permettent alors de retrouver la séquence de l'orbite principale.*

La dynamique symbolique permet ainsi une description très fine de l'évolution d'une dynamique en fonction d'un paramètre de contrôle.

(S)	(S)
1	1001 111
10	1001 11
1011	1001 10
1011 10	1001 101
1011 11	1001 100
1011 111	1001
1011 110	1000
1011 1	1000 100
1011 0	1000 101
1011 010	1000 10
1011 011	1000 11
101	1000 111
100	1000 110
1001 01	1000 1
1001 011	1000 0
1001 010	1000 01
1001 0	1000 00
1001 1	1000 001
1001 110	1000 000

Table 4.1: *Ordre de forçage des orbites périodiques de période inférieure à 6 pour une dynamique unimodale à maximum différentiable.*

4.2.2 Cas bimodal

Le concept de dynamique symbolique peut être généralisé à plusieurs symboles. Toutefois, si l'ordre d'implication \prec_I ne présente pas de difficultés à généraliser, l'ordre de forçage \prec_F n'a plus grand intérêt car il ne présente plus le caractère universel rencontré dans le cas unimodal. En effet, s'il n'y a qu'une manière pour générer un repliement "continu" (fig. 4.4.a), il existe plusieurs configurations permettant d'en générer deux (fig. 4.4.b) [10]. Nous pouvons déjà supposer au moins deux ordres naturels tels que

$$0 < 1 < 2 \quad \text{et} \quad \bar{1} < 0 < 1 .$$

Dans le premier cas, l'application de premier retour présente deux branches croissantes et une décroissante alors que dans le second, l'application est constituée de deux branches décroissantes et une croissante. Nous rappelons que de manière à identifier la parité des symboles aux propriétés topologiques des différentes branches, un symbole pair est associé à une branche croissante qui préserve l'ordre des points et un symbole impair à une branche décroissante qui le renverse. De plus, le caractère générique de l'ordre de forçage \prec_F dans le cas unimodal n'est plus opérant ici puisque deux points critiques sont impliqués dans la fonction g_μ et, par conséquent, deux séquences principales respectivement associées à chacun de ces points critiques sont nécessaires pour définir complètement la

population d'orbites périodiques [11]. A la différence du comportement de la fonction logistique, les applications multimodales peuvent générer des effets concomitants de création et d'annihilation d'orbites périodiques [12, 13, 14]; l'évolution de la dynamique n'est plus monotone en fonction du paramètre de contrôle et est, de fait, qualifiée d'*anti-monotone*. Si la dynamique symbolique perd son pouvoir prédictif, elle préserve toutefois son pouvoir descriptif comme nous allons le montrer.

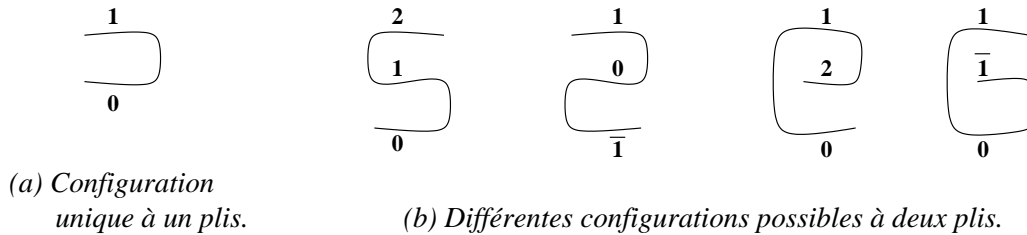


Figure 4.4: Il existe une unique configuration à un pli continu alors qu'il en existe plusieurs lorsque deux plis sont impliqués.

Nous choisissons l'application cubique antisymétrique proposée par R.M. May [15]: cette application est de la forme

$$x_{n+1} = \mu x_n^3 + (1 - \mu)x_n = g_\mu(x_n) \quad (4.4)$$

Elle est équivariante puisque $g_\mu(-x_n) = -x_{n+1}$. En d'autres termes, si un point x_n appartient à une solution périodique, $-x_n$ aussi. L'application cubique possède deux points critiques tels que

$$x_\pm = \pm \sqrt{\frac{\mu - 1}{3\mu}}$$

respectivement noté C et \bar{C} (fig. 4.5).

La dynamique symbolique sera telle que

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n < x_- \\ 1 & \text{si } x_- < x_n < x_+ \\ 2 & \text{si } x_n > x_+ \end{cases} \quad (4.5)$$

L'ordre d'implication se construit à partir de l'ordre naturel $0 < 1 < 2$ et la comparaison entre les différentes séquences symboliques se fait suivant des règles identiques à celles utilisées pour construire l'ordre d'implication \prec_I dans le cas unimodal. La différence essentielle réside dans le fait que la séquence orbitale n'est pas déterminée de la même manière suivant que l'orbite apparat par le point critique C ou \bar{C} . Lorsqu'elle est associée au point critique \bar{C} , la séquence orbitale est la permutation circulaire S_i des p permutations possibles qui vérifie:

$$S_j \prec_I S_i \quad \forall j \in [1, p] \mid j \neq i \quad (4.6)$$

A l'inverse, une orbite périodique créée par le point critique C aura une séquence orbitale qui vérifie

$$S_i \prec_I S_j \quad \forall j \in [1, p] \mid j \neq i \quad (4.7)$$

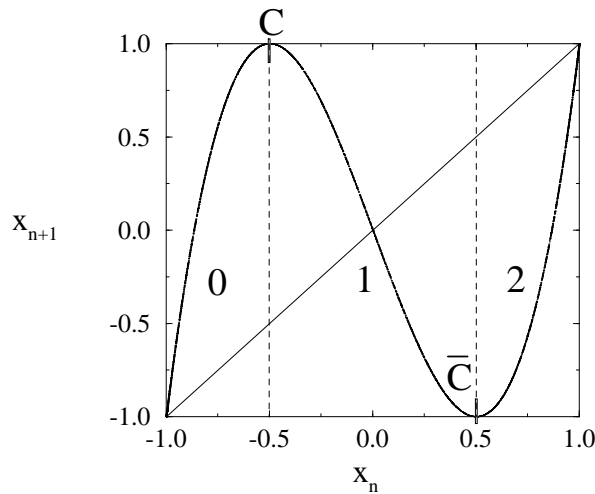


Figure 4.5: *Comportement chaotique généré par la fonction cubique pour $\mu = 3.9999$*

Il y a ainsi deux types d'orbites périodiques:

- une orbite est induite par un unique point critique et elle est nécessairement associée à une seconde orbite induite par le second point critique qui est alors la symétrique de la première. De telles orbites sont asymétriques et apparaissent par paires: les deux orbites ζ et ξ de la paire ont alors des séquences orbitales conjuguées, c'est à dire que $S_\xi = \mathcal{C}(S_\zeta)$ et $S_\zeta = \mathcal{C}(S_\xi)$ où $\mathcal{C}(S)$ désigne la relation de conjugaison suivante:

$$\begin{cases} \mathcal{C}(0) = 2 \\ \mathcal{C}(1) = 1 \\ \mathcal{C}(2) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le couple (22210) – (00012) désigne bien une paire d'orbites asymétriques puisque $\mathcal{C}(22210) = (00012)$.

- une orbite est induite par les deux points critiques, c'est à dire qu'une orbite de période $2p$ vérifie:

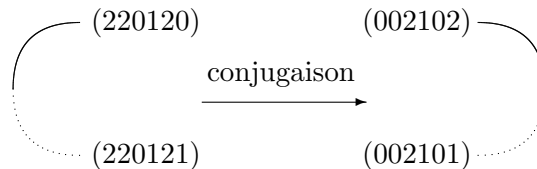
$$f_\mu^{2p}(x_{\bar{C}}) = x_{\bar{C}} = f_\mu^p(x_C)$$

pour une valeur de μ correspondant à la bifurcation générant l'orbite considérée. Une telle orbite est symétrique. Ces orbites symétriques apparaissent alors seules et ont une séquence orbitale telle que $\mathcal{C}(S) = S$. De plus, les points périodiques doivent être répartis dans l'application de manière symétrique par rapport au point invariant par la symétrie centrale. Ces orbites sont donc nécessairement de période paire et constituées de deux sous-séquences S_1 et S_2 telles que $\mathcal{C}(S_1) = S_2$. L'orbite de période 4 dont la séquence orbitale est (2101) est donc une orbite symétrique puisque $\mathcal{C}(2101) = 0121$: la conjuguée de l'orbite 2101 est elle-même (sous une permutation circulaire). Etant donné que le classement des séquences symboliques se fait de la manière suivante: $0121 \prec_I 1210 \prec_I 1012 \prec_I 2101$ la séquence $S = 2101$ est la

séquence orbitale associée au point critique C alors que la séquence $\mathcal{C}(S) = 0121$ est la séquence orbitale de cette orbite associée au point critique \bar{C} . Après leur création, ces orbites se déstabilisent par bifurcation fourche et non par une bifurcation de doublement de période comme c'est le cas pour les orbites asymétriques.

Suivant le point critique impliqué, la séquence orbitale commence par un 0 ou un 2. Dans le cas très particulier des applications antisymétriques, la relation de conjugaison entre les deux séquences orbitales associées aux points critiques C et \bar{C} permet de prédire l'ordre de forçage à partir de l'ordre d'implication \prec_I . Il suffit pour cela de considérer les orbites dont les séquences orbitales commencent par un 2, dériver l'ordre de forçage des orbites et transcrire les séquences conjuguées. L'ordre de forçage est reporté table 4.2 pour les orbites stables de période inférieure à 7; les valeurs du paramètre de contrôle pour lesquelles une fenêtre périodique apparaît sont celles calculées par Bai-Lin Hao [6].

Parmi les orbites périodiques stables reportées dans la table 4.2, seules quelques unes sont créées par un doublement de période: dans ce cas, elles proviennent de la déstabilisation des orbites de période moitié qui les précèdent dans le tableau. Elles sont repérées par un D . Celles qui sont repérées par un F sont engendrées par une bifurcation fourche. Toutes les autres sont engendrées par une bifurcation nœud-col exceptée les orbites symétriques. Lorsqu'une bifurcation nœud-col est impliquée, seule l'orbite périodique stable de la paire est reportée: l'orbite instable peut toutefois être obtenue à partir de l'orbite stable de la manière suivante. Dans le cas où la séquence orbitale de l'orbite stable commence par le symbole 2, elle est engendrée par le point critique \bar{C} séparant les branches 1 et 2. Si cette orbite stable de période p a pour dernier symbole un 1, alors l'orbite instable a pour séquence symbolique $S_I = S^*0$, où S^* désigne la partie commune des $(p - 1)$ premiers symboles entre la séquence orbitale S_S de l'orbite stable et S_I . Réciproquement, $S_I = S^*1$ si $S_S = S^*0$. Il reste alors à conjuguer les séquences pour obtenir la seconde orbite de la paire d'orbites symétriques. Par exemple, nous avons:



On vérifie bien que la séquence S_S est impaire et que la séquence S_I est paire comme cela doit être le cas pour une bifurcation nœud-col [8].

Cet exemple nous a permis de nous familiariser avec les applications symétriques et une dynamique symbolique à 3 éléments. Néanmoins, il constitue un cas d'école et il y a peu de chances de rencontrer un système d'équations différentielles ordinaires qui vérifierait de telles propriétés. Un exemple classique comme le système de Lorenz, ne répond pas à de telles propriétés; le système moins connu de Burke et Shaw [17] non plus. En effet, ce dernier, s'il se caractérise par un champ de vecteurs équivariant, c'est à dire que le système est globalement invariant sous une symétrie, ici une rotation $R_z(\pi)$ par rapport à l'axe Oz , son application de premier retour ne présente pas les propriétés d'antisymétrie observées sur l'application cubique antisymétrique (4.4). Les équations du système de Burke et Shaw

$S - \mathcal{C}(S)$	μ	$S - \mathcal{C}(S)$	μ
(20)	2.5	(221)-(001)	3.9249907
(21)-(01) ^F	3.1213203	(221220)-(001002) ^D	3.9254576
(2120)-(0102) ^D	3.2628786	(222211)-(001011)	3.9350271
(212020)-(010202)	3.3340241	(22120)-(00102)	3.9409044
(212010)	3.345315558	(221200)-(001022)	3.9464110
(211010)-(011212) ^F	3.4632834	(221101)-(001121)	3.9504721
(211021)-(011201)	3.5282272	(22111)-(00111)	3.9553274
(2110)-(0112)	3.5480858	(221110)-(001112)	3.9597015
(211120)-(011102)	3.5659880	(221121)-(001101)	3.9637898
(211111)-(011111)	3.5911819	(2210)-(0012)	3.9675403
(21110)-(01112)	3.6150319	(221020)-(001202)	3.9710914
(21121)-(01101)	3.6662070	(221011)-(001211)	3.9745198
(210)-(012)	3.7003155	(22100)-(00122)	3.9777816
(210211)-(012011) ^D	3.7029894	(221001)	3.981797395
(21020)-(01202)	3.7339407	(222001)-(000221) ^F	3.9818990
(21011)-(01211)	3.7753839	(22201)-(00021)	3.9854885
(210110)-(012112)	3.7909088	(222010)-(000212)	3.9878905
(210120)-(012102)	3.8073689	(222021)-(000201)	3.9900272
(2101)	3.830811514	(2221)-(0001)	3.9919300
(2210)-(0012) ^F	3.8398944	(222120)-(000102)	3.9936280
(220120)-(002102)	3.8610860	(222111)-(000111)	3.9951295
(220111)-(002111)	3.8734615	(22210)-(00012)	3.9964269
(22010)-(00212)	3.8835860	(222100)-(000122)	3.9975231
(220100)-(002122)	3.8933550	(222201)-(000021)	3.9984117
(220201)-(002021)	3.8982992	(22221)-(00001)	3.9991078
(22021)-(00201)	3.9069063	(222210)-(000012)	3.9996037
(220210)-(002012)	3.9144901	(222221)-(000001)	3.9999009

Table 4.2: *Ordre de forçage des orbites de période inférieure à 7 pour l'application cubique antisymétrique. La lettre D identifie les orbites apparues par doublement de période et la lettre F celles apparues par bifurcation fourche.*

sont de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -S(x+y) \\ \dot{y} &= -Sxz - y \\ \dot{z} &= Sxy + V \end{cases} \quad (4.8)$$

où (S, V) sont les paramètres de contrôle. Dans ce travail, $S = 10.0$ et le paramètre V varie dans l'intervalle $[3.0; 4.2719]$. Pour cette dernière valeur, un attracteur complètement symétrique est généré (fig. 4.6).

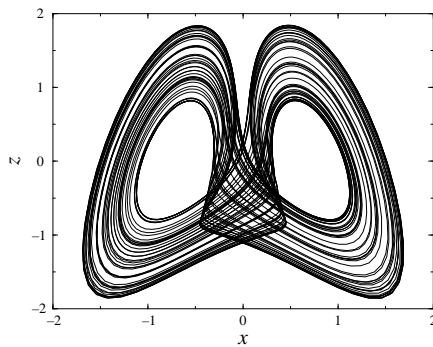


Figure 4.6: *Attracteur symétrique généré par le système de Burke et Shaw.* $(S, V) = (10, 4.2719)$.

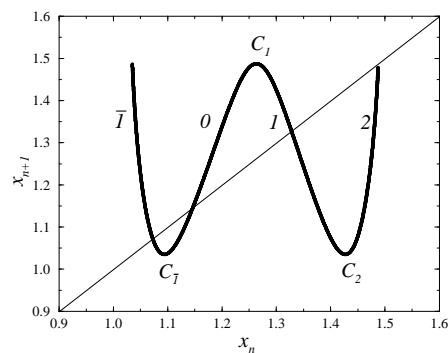


Figure 4.7: *Application de premier retour à une section de Poincaré de l'attracteur généré par le système de Burke et Shaw.*

Une application de premier retour à une section de Poincaré présente 4 branches monotones. Sur ce système, l'évolution de la population d'orbites périodiques ne peut être directement prédite à partir de l'ordre d'implication construit sur l'ensemble $\Sigma_4 = \{\bar{1}, 0, 1, 2\}$ [11]. Nous observons, pour $V \in [2.831; 3.629]$, deux cascades simultanées de doublements de périodes, l'une étant symétrique de l'autre sous la rotation $R_z(\pi)$. Ensuite deux attracteurs chaotiques, caractérisés par une application de premier retour unimodale, coexistent jusqu'à une *crise frontalière* survenant pour $V = 3.8115$; les deux attracteurs fusionnent à travers une bifurcation fourche (inverse) pour fournir un unique attracteur symétrique. P. Dutertre a montré qu'au delà de cette valeur de V , l'évolution de la population d'orbites périodiques ne peut plus être prédite par une dynamique symbolique à 4 symboles [11] et les propriétés de symétrie du flot doivent être utilisées [18]. L'évolution de la population d'orbites périodiques est reportée dans la table 4.3 où l'écart à l'antisymétrie est clairement observé.

Si la dynamique symbolique ne permet plus de prédire l'évolution de la population d'orbites périodiques, elle autorise toutefois une description fine du diagramme de bifurcations. En d'autres termes, face à un système multimodal pour lequel l'ordre de forçage ne correspond plus à l'évolution de la population d'orbites périodiques, la dynamique symbolique garde sa capacité à décrire les phénomènes mais perd son caractère prédictif.

$(W)_{c_2}$	$(W)_{c_{\bar{1}}}$	$C_j(W)_{C_i}$	$(W)_{c_1}$	$(W)_{c_2}$	$(W)_{c_{\bar{1}}}$	$C_j(W)_{C_i}$	$(W)_{c_1}$
	$\begin{smallmatrix} 0 \\ \bar{1} \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} 0 \\ \bar{1} \end{smallmatrix}$		$\bar{1}2\bar{1}\bar{1}_0^{\bar{1}}$		$2120_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}0$		10	$\bar{1}2\bar{1}\bar{1}_2^{\bar{1}}$			$212\bar{1}_1^0$
	$\bar{1}0\bar{1}\bar{1}$		1011	$\bar{1}2\bar{1}0_1^{\bar{2}}$			$211\bar{1}_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}0\bar{1}\bar{1}_0^{\bar{1}}$		$1011_0^{\bar{1}}$		$\bar{1}2\bar{1}0_1^0$		2110_1^0
	$\bar{1}0_0^{\bar{1}}$		$10_0^{\bar{1}}$		$\bar{1}2\bar{1}_1^0$		211_1^0
	$\bar{1}00\bar{1}_1^0$		1001_1^0		$\bar{1}2\bar{1}\bar{1}_0^{\bar{1}}$		$2111_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}00_0^{\bar{1}}$		$100_0^{\bar{1}}$	$\bar{1}2\bar{1}\bar{1}_2^{\bar{1}}$			2112_1^0
	$\bar{1}000_0^{\bar{1}}$		$1000_0^{\bar{1}}$		$\bar{1}2_0^{\bar{1}}$		$21_0^{\bar{1}}$
		$C_{\bar{1}}(\bar{1}0_1^0 1_1^0)_{C_1}$		$\bar{1}20\bar{1}_1^{\bar{2}}$			$2102_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}0110$		$1\bar{1}\bar{1}00$		$\bar{1}20\bar{1}_1^0$		2101_1^0
	$\bar{1}010_1^0$		$1\bar{1}00_1^0$		$\bar{1}20_0^{\bar{1}}$		$210_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}01_1^0$		$1\bar{1}0_1^0$		$\bar{1}200_0^{\bar{1}}$		$2100_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}01\bar{1}_0^{\bar{1}}$		$1\bar{1}01_0^{\bar{1}}$	$\bar{1}200_2^{\bar{1}}$			$210\bar{1}_1^0$
		$C_1(\bar{1}0_2^1)_{C_2}$		$\bar{1}201_1^{\bar{2}}$			$21\bar{1}\bar{1}_0^{\bar{1}}$
$\bar{1}11$			$2\bar{1}0$		$\bar{1}201_1^0$		$21\bar{1}0_1^0$
	$\bar{1}11\bar{1}_1^0$		$2\bar{1}01_1^0$	$\bar{1}20_2^{\bar{1}}$			$21\bar{1}_1^0$
	$\bar{1}11_0^{\bar{1}}$		$2\bar{1}0_0^{\bar{1}}$		$\bar{1}202_0^{\bar{1}}$		$21\bar{1}1_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}110_0^{\bar{1}}$		$2\bar{1}00_0^{\bar{1}}$			$C_1(\bar{1}2_1^0 2_2^{\bar{1}})_{C_2}$	
$\bar{1}110_2^{\bar{1}}$			$2\bar{1}0\bar{1}_1^0$	$\bar{1}2121$			$22\bar{1}20$
$\bar{1}111_1^{\bar{2}}$			$2\bar{1}\bar{1}\bar{1}_0^{\bar{1}}$		$\bar{1}212_1^0$		$22\bar{1}1_1^0$
	$\bar{1}111_1^0$		$2\bar{1}\bar{1}0_1^0$	$\bar{1}21_1^{\bar{2}}$			$22\bar{1}_0^{\bar{1}}$
$\bar{1}11_2^{\bar{1}}$			$2\bar{1}\bar{1}_1^0$		$\bar{1}211_0^{\bar{1}}$		$22\bar{1}0_0^{\bar{1}}$
		$C_{\bar{1}}(\bar{1}1_0^1 2_0^{\bar{1}})_{C_1}$		$\bar{1}211_2^{\bar{1}}$			$22\bar{1}\bar{1}_1^0$
	$\bar{1}1021$		$20\bar{1}\bar{1}1$	$\bar{1}210_1^{\bar{2}}$			$220\bar{1}_0^{\bar{1}}$
$\bar{1}10_1^{\bar{2}}$			$20\bar{1}_0^{\bar{1}}$		$\bar{1}210_1^0$		2200_1^0
	$\bar{1}101_0^{\bar{1}}$		$20\bar{1}0_0^{\bar{1}}$		$\bar{1}21_1^0$		220_1^0
$\bar{1}101_2^{\bar{1}}$			$20\bar{1}\bar{1}_1^0$		$\bar{1}211_0^{\bar{1}}$		$2201_0^{\bar{1}}$
$\bar{1}100_1^{\bar{2}}$			$200\bar{1}_0^{\bar{1}}$	$\bar{1}21\bar{1}_2^{\bar{1}}$			2202_1^0
	$\bar{1}100_1^0$		2000_1^0	$\bar{1}2_2^{\bar{1}}$			22_1^0
	$\bar{1}10_1^0$		200_1^0	$\bar{1}22\bar{1}_1^{\bar{2}}$			$2212_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}10\bar{1}_0^{\bar{1}}$		$2001_0^{\bar{1}}$		$\bar{1}22\bar{1}_1^0$		2211_1^0
	$\bar{1}1_1^0$		20_1^0		$\bar{1}22_0^{\bar{1}}$		$221_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}1\bar{1}\bar{1}_1^0$		2011_1^0		$\bar{1}220_0^{\bar{1}}$		$2210_0^{\bar{1}}$
	$\bar{1}1\bar{1}_0^{\bar{1}}$		$201_0^{\bar{1}}$	$\bar{1}220_2^{\bar{1}}$			$221\bar{1}_1^0$
	$\bar{1}1\bar{1}0_0^{\bar{1}}$		$2010_0^{\bar{1}}$	$\bar{1}221_1^{\bar{2}}$			$222\bar{1}_0^{\bar{1}}$
$\bar{1}1\bar{1}0_2^{\bar{1}}$			$201\bar{1}_1^0$		$\bar{1}221_1^0$		2220_1^0
$\bar{1}1\bar{1}1_1^{\bar{2}}$			$202\bar{1}_0^{\bar{1}}$	$\bar{1}22_2^{\bar{1}}$			222_1^0
	$\bar{1}1\bar{1}1_1^0$		2020_1^0		$\bar{1}222_0^{\bar{1}}$		$2221_0^{\bar{1}}$
$\bar{1}_2^{\bar{1}}$			2_1^0	$\bar{1}222_2^{\bar{1}}$			$2222_0^{\bar{1}}$
$\bar{1}2\bar{1}1$			2120				

Table 4.3: *Evolution de la population d'orbites périodiques (période inférieure à 6) du système de Burke et Shaw pour $V \in [3; 4.2719]$. Ici, les paires d'orbites périodiques engendrées par une bifurcation nœud-col sont notées à l'aide d'exposant et d'indice: par exemple, le couple $10_0^{\bar{1}}$ correspond à la paire $(101) - (100)$ où (101) est l'orbite stable et l'orbite (100) est instable.*

4.2.3 Cas faiblement dissipatif et $2D$

Les trois cas étudiés précédemment se présentent comme des applications discrètes associées à des dynamiques très dissipatives et unidimensionnelles. Comme rien ne nous permet d'affirmer que les processus d'atomisation vérifient ces propriétés, nous devons envisager le cas de dynamiques plus complexes, c'est à dire moyennement dissipatives et de plus grande dimension. Nous présenterons la nature des problèmes qui peuvent être rencontrés lors de l'étude de telles dynamiques dans le cas d'applications discrètes bidimensionnelles et moyennement dissipatives.

Le premier cas choisi correspond au système de Hénon initialement proposé par M. Hénon et Y. Pomeau [19] qui s'écrit:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= by_n \\ y_{n+1} &= 1 + x_n - ay_n^2 \end{cases} \quad (4.9)$$

où a et b sont deux paramètres de contrôle. Le paramètre b correspond au taux de dissipation du système: il est choisi inférieur à 1 pour assurer une contraction du volume dans l'espace des phases sous une itération. Pour $(a, b) = (1.4, 0.3)$, le système de Hénon génère un comportement chaotique (fig. 4.8.a). Lorsque le paramètre b est choisi très petit, le système est très dissipatif et se ramène à un système équivalent à la fonction logistique.

Dans la situation faiblement dissipative, nous constatons aisément que l'application ne présente pas un unique maximum différentiable: la première difficulté se rencontre donc lors de la définition de la partition génératrice nécessaire à la construction d'une dynamique symbolique. P. Grassberger, H. Kantz et U. Moenig [20] ont montré qu'une telle partition doit passer par tous les points de tangence entre les variétés stable et instable. L'obtention de cette partition peut nécessiter la connaissance des équations de l'application afin de les inverser pour le calcul des variétés stables: face à une situation expérimentale, nous concevons que ceci est hors d'atteinte, d'autant plus que la présence inévitable de bruit aura tendance à diffuser les structures et à rendre incertaine la partition. Néanmoins, M. Lefranc *et al.* ont récemment proposé une technique itérative par approximations successives qui permet la définition de la partition génératrice à partir de données expérimentales générées par un système laser faiblement dissipatif [21, 22]. De plus, comme lors d'une étude pratique seules les orbites de faible période sont prises en compte, une certaine erreur sur la partition génératrice n'affecte pas l'analyse [23].

Une seconde difficulté survient face à des données expérimentales: le portrait de phase est parfaitement décrit dans l'espace des phases de dimension m , défini par l'ensemble des variables dynamiques nécessaire à la description de l'état du système. Pratiquement, la connaissance des m variables dynamiques est inaccessible à la mesure. A titre d'exemple, il n'est pas évident de fournir une estimation de la dimension m du système gouvernant les processus d'atomisation... De toutes facons, dans le cadre du montage expérimental ici étudié, seul l'enregistrement de l'évolution temporelle d'une seule variable, le diamètre du jet, peut être effectuée. Aussi, nous devons faire appel à une technique de reconstruction de l'espace des états afin de bénéficier d'une représentation de l'espace des phases. Si, dans le cas du système de Hénon, l'application peut être facilement reconstruite à partir d'une seule de ces variables (fig. 4.8), il n'en est pas de même pour toute application faiblement

dissipative à l'exemple de l'application Ikeda [24] dont les équations s'écrivent:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1 + 0.7 (x_n \cos \tau_n - y_n \sin \tau_n) \\ y_{n+1} &= 0.7 (x_n \sin \tau_n + y_n \cos \tau_n) \end{cases} \quad (4.10)$$

où $\tau_n = 0.4 - \frac{6.0}{1 + x_n^2 + y_n^2}$

En utilisant les coordonnées décalées (x_n, x_{n+1}) , l'application reconstruite présente clairement des auto-intersections; un même état présent est associé à deux états futurs distincts: en ce point, le principe du déterminisme n'est pas préservé lors de la procédure de reconstruction. La procédure de reconstruction peut être perçue comme agissant en deux étapes: partant de l'espace des phases original \mathbb{R}^m , une mesure de la variable $\{x_n\}$ est réalisée impliquant une projection sur \mathbb{R}^1 ; c'est la première étape au cours de laquelle l'identification de deux points distincts peut survenir. La seconde étape est associée au processus de reconstruction en lui-même qui transforme l'espace de mesure \mathbb{R}^1 en un espace \mathbb{R}^d à partir des coordonnées décalées ou dérivées (ou en utilisant la méthode de SVD ²). Si un théorème dû à F. Takens [26] nous assure d'une équivalence (difféomorphique) entre les portraits de phase original (dans \mathbb{R}^m) et reconstruit (dans \mathbb{R}^d) pour une dimension d suffisamment grande, nous ne devons pas oublier que la validité de ce théorème repose sur la fonction de mesure s qui doit préserver toutes les propriétés dynamiques du système. D'un point de vue géométrique, la projection de \mathbb{R}^m sur \mathbb{R}^1 doit être telle que deux voisinages distincts du portrait de phase ne soient pas identifiés.

Il apparaît évident que dans le cas de l'application de Ikeda, une partition correcte ne pourra être obtenue, la dynamique n'étant pas observée sans altération. Une approche plus générale de la dynamique symbolique doit alors être effectuée afin de contourner ces difficultés. Malheureusement, les informations apportées seront moins fines.

4.2.4 Dynamique symbolique probabiliste

Nous le voyons, la dynamique symbolique est un concept puissant pour décrire les systèmes dynamiques, mais elle nécessite certaines conditions qui ne sont pas toujours respectées par les systèmes complexes du monde réel. Ainsi, il ne peut être question de proposer une partition sur des "critères topologiques" dans le cas de l'étude des processus d'atomisation. Deux raisons essentielles peuvent être avancées. La première est la présence de bruit, inévitable dans le contexte expérimental, qui diffuse les structures du portrait de phases et rend peu lisible l'architecture de la dynamique. La seconde, plus spécifique au système étudié, résulte ici du fait que la dynamique est très probablement identifiée à une intermitte- nce de phase pour laquelle les comportements sont plutôt complexes et peu étudiés en termes de dynamique symbolique. Aussi, nous aurons recours à une approche reprenant l'esprit de la dynamique symbolique - étudier des séquences de symboles pour mettre en évidence des structures dynamiques - mais liée à une vision plus statistique, conséquence inéluctable de notre incapacité à appréhender finement l'organisation dynamique des processus d'atomisation. La méthode utilisée a été introduite par Tang *et al.* [27, 28] et

²"Singular Value Decomposition": voir le numerical recipies [25].

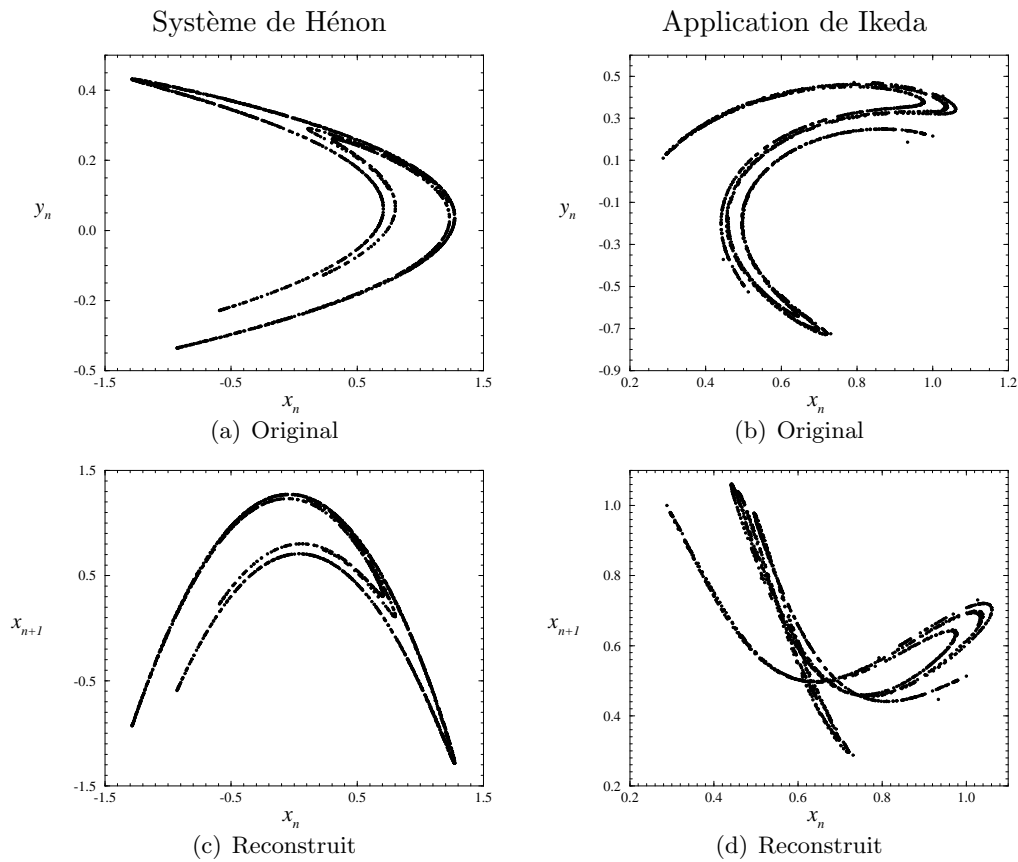


Figure 4.8: *Reconstruction d'applications discrètes à partir d'une de leurs variables dynamiques: nous ne sommes pas assurés de préserver les propriétés dynamiques du système. Si le système de Hénon est correctement reconstruit, l'application de Ikeda présente des intersections avec elle-même, détruisant localement la nature déterministe du système.*

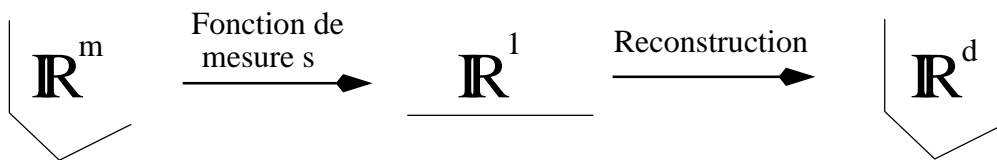


Figure 4.9: *Les deux étapes de la reconstruction: la mesure assimilée à une projection de \mathbb{R}^m sur \mathbb{R} et la reconstruction à proprement parler qui "déplie" \mathbb{R} sur \mathbb{R}^d .*

utilisée par Daw *et al.* pour valider un modèle de combustion dans les moteurs à allumage commandé [29].

Puisqu'il est impossible de définir une partition topologique des portraits de phases reconstruits à partir de l'évolution du diamètre du jet, la partition est réalisée sur des considérations statistiques: si n symboles sont requis pour décrire la dynamique, on requiert que la trajectoire visite de manière équiprobable les n régions de l'espace des phases. Par souci de simplicité, les n symboles seront choisis dans l'ensemble $\Sigma_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Au sein d'une application de premier retour, les points "critiques" sont donc localisés par une recherche numérique des seuils sur les abscisses de l'application de premier retour, définissant les zones équiprobables. Une fois la partition choisie, la trajectoire représentative de l'évolution du système peut être codée par une chaîne de symboles comme dans le cas d'une dynamique symbolique rigoureuse.

Bien évidemment, l'analyse ne peut plus être réalisée en termes d'ordres d'implication ou de forçage des orbites périodiques, mais seulement par une étude de la probabilité de rencontrer une séquence symbolique donnée. Afin de construire un histogramme, les séquences symboliques de longueur p sur l'ensemble Σ_n sont ordonnées selon l'ordre naturel. Puisque n^p séquences sont ainsi considérées, chaque séquence est associée à une "coordonnée symbolique" égale à sa position parmi les n^p séquences possibles. Ainsi, pour une dynamique unimodale ($n = 2$) et des séquences de 6 symboles ($p = 6$), les 64 séquences sont placées selon l'ordre reporté dans la table 4.4.

séquence S_i	coordonnée i
000 000	0
000 001	1
000 010	2
000 011	3
000 100	4
⋮	⋮
111 011	59
111 100	60
111 101	61
111 110	62
111 111	63

Table 4.4: *Coordonnées symboliques des 2^6 séquences de 6 symboles sur Σ_2 . La coordonnée est donnée par la valeur en base 10 du code symbolique (ici binaire) de l'orbite. Ainsi, toute séquence S_i ($i \leq 32$) est égale à $\mathcal{C}(S_{63-i})$ où $\mathcal{C}(1) = 0$ et $\mathcal{C}(0) = 1$.*

Afin de bien comprendre quelle information nous apporte une telle dynamique symbolique, nous choisissons d'étudier la fonction logistique pour quatre valeurs du paramètre de

contrôle μ , respectivement associées aux séquences principales suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu = 3.7 & (\overline{10111110}) \\ \mu = 3.90 & (\overline{1001010}) \\ \mu = 3.98 & (\overline{100011}) \\ \mu = 3.9999 & (\overline{1000001}) \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Pour $\mu = 3.7$, nous constatons à l'aide de la table 4.1, qu'au sein des séquences symboliques, une suite (00) ne peut être décrite par la trajectoire (fig. 4.10.a). De plus, un simple examen des orbites périodiques forcées par la séquence principale révèle que les suites (101010...) ne sont pas les plus probables.

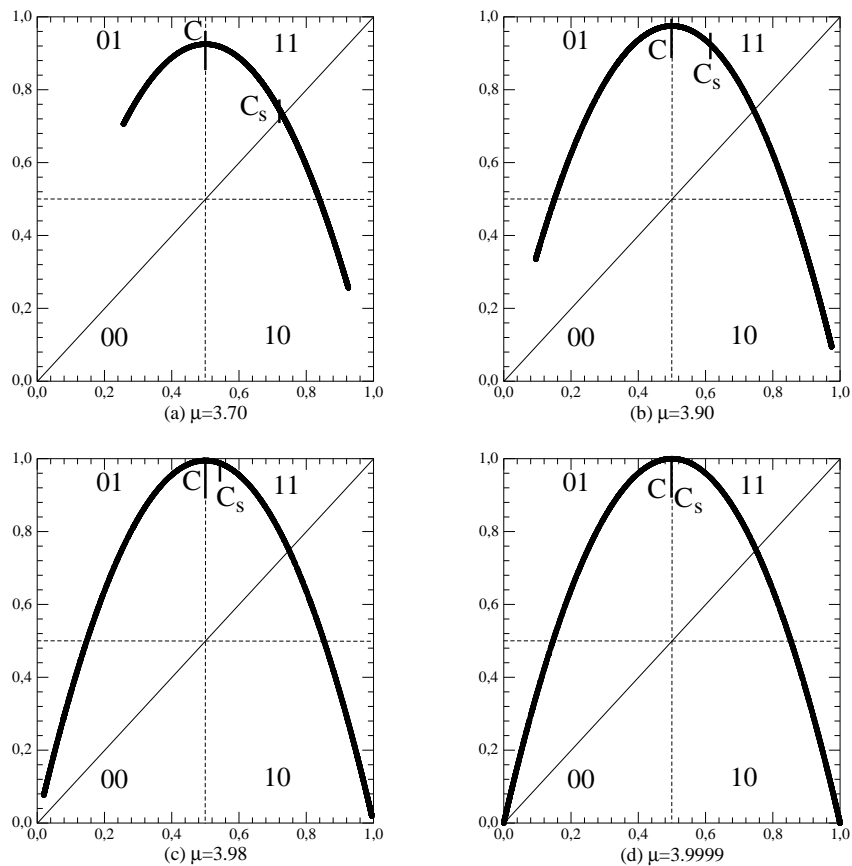


Figure 4.10: Configuration de la fonction logistique pour les différentes valeurs de μ choisies. C est le point critique topologique et C_s est le point critique d'équiprobabilité (binaire).

Utilisons maintenant une partition binaire équiprobable: en raison de la structure particulière de la fonction logistique pour cette valeur de $\mu = 3.7$ (fig. 4.10.a), le point critique C_s est localisé près du point d'intersection entre la courbe décrite par $f_\mu(x)$ et la bissectrice. Ainsi, en description statistique, un 0 est presque nécessairement suivi d'un 1 et

réciproquement. Les séquences 101010 et 010101 seront donc largement privilégiées comme on peut le constater sur la figure 4.11, la majeure partie des autres étant de probabilité nulle. Lorsque le paramètre μ est augmenté, le point critique C_S se déplace au fur et à mesure que la dynamique se développe: de nouvelles combinaisons de symboles sont utilisées. L'histogramme s'enrichit aussi peu à peu.

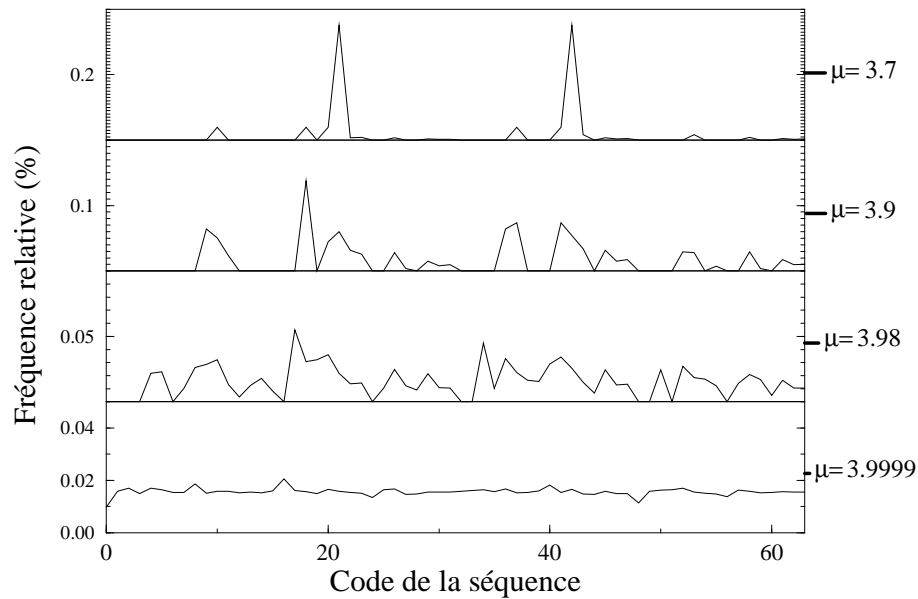


Figure 4.11: *Histogramme de probabilité de présence des séquences à 6 symboles selon la partition d'équiprobabilité. (100000 itérations sont considérées)*

Ce résultat est conforme à ce qui était attendu: nous pouvons déjà constater que la représentation de la dynamique symbolique probabiliste ne permet pas une description très fine de la structure dynamique et que seules les grandes tendances peuvent être détectées. En aucun cas, une bifurcation particulière ne peut être identifiée contrairement à ce qui est annoncé par Daw *et al.* [29]. Au fur et à mesure que le paramètre μ est augmenté, les histogrammes se développent au profit d'autres séquences possibles jusqu'à devenir pratiquement plats pour $\mu = 3.9999$.

Remarquons que pour cette valeur de μ , la dynamique symbolique "topologique" est quasiment *complète* (presque toutes les séquences sur Σ_2 sont autorisées) et que le point critique "topologique" et celui d'équiprobabilité sont pratiquement confondus. Puisque toutes les séquences sont autorisées et équiprobables, la dynamique symbolique probabiliste n'est pas capable de distinguer un comportement stochastique d'un comportement chaotique unimodal! Néanmoins, cette situation ambiguë n'intervient que pour une faible plage du paramètre de contrôle μ puisque pour $\mu = 3.98$ la distinction est encore réalisée.

Toutefois cette incapacité résulte directement de l'adéquation entre la partition topologique et la partition statistique ainsi que l'équiprobabilité des symboles dans les deux approches.

Aussi, si une dynamique probabiliste à trois symboles est utilisée, la partition statistique n'est plus confondue avec la partition topologique et le pouvoir discriminant de la dynamique symbolique est restauré (fig. 4.12). Ce comportement est aisément vérifié sur l'application cubique antisymétrique mais pas pour l'application de premier retour à une section de Poincaré de l'attracteur généré par le système de Burke et Shaw. Dans le cas de l'application cubique antisymétrique, la dynamique symbolique à trois symboles est complète pour $\mu = 3.9999$. Si une partition statistique ternaire est utilisée, l'histogramme est plat (fig. 4.13.a) alors qu'avec une partition à quatre symboles (ou éventuellement deux, mais le résultat est moins net), la distinction est évidente. Nous ne pouvons pas en dire autant pour la dynamique à quatre symboles de l'application de premier retour du système de Burke et Shaw (fig. 4.13.b), pourtant proche de la complétude pour $V = 4.2719$. En effet, la dynamique presque complète n'assure pas que l'application soit visitée symétriquement pour chaque symbole. Nous pouvons nous en assurer en regardant la densité naturelle sur cette application (fig. 4.14). Sur cette figure, la densité de probabilité de visite n'est pas symétrique. En fait, le cas du système de Burke et Shaw est particulier car la complétude de la dynamique à quatre symboles côtoie une crise de frontière pour $V = 4.272$, au niveau de laquelle d'autres branches apparaissent sur l'application de premier retour. Ainsi, notre analyse ne peut tenir face à ce genre de comportement extrême vis-à-vis de l'un des paramètres de contrôle. Par contre, si nous prenons une application de premier retour à quatre symboles, similaire à celle considérée pour trois symboles, nous obtenons un comportement identique à ce que prévoit notre analyse. Pour cela, nous utilisons donc l'application quadratique dont l'équation est [6]:

$$x_{n+1} = -\mu x_n^4 + \mu x_n^2 - 1 = g_\mu(x_n) \quad (4.12)$$

La symétrie se traduit ici par: $g_\mu(-x_n) = x_{n+1}$. Elle est tracée sur la figure 4.15 et le comportement en fonction du nombre de symboles par séquence devient à nouveau ambiguë lorsque la dynamique est complète ($\mu = 8.00$). Sur la figure 4.16, nous constatons que l'ambiguïté est encore levée pour un nombre de symboles (5) d'une unité supérieur au nombre de symboles de la dynamique symbolique topologique (ici 4). Lorsque cela est possible, nous prendrons donc la précaution d'utiliser une dynamique symbolique statistique dont le nombre de symboles est supérieur au nombre de symboles imposés par la partition topologique.

4.3 Analyse de la dynamique des jets

Nous allons maintenant construire une dynamique symbolique statistique directement à partir des mesures réalisées sur les jets. Comme dans le chapitre précédent, les six points de fonctionnement ici étudiés sont caractérisés par:

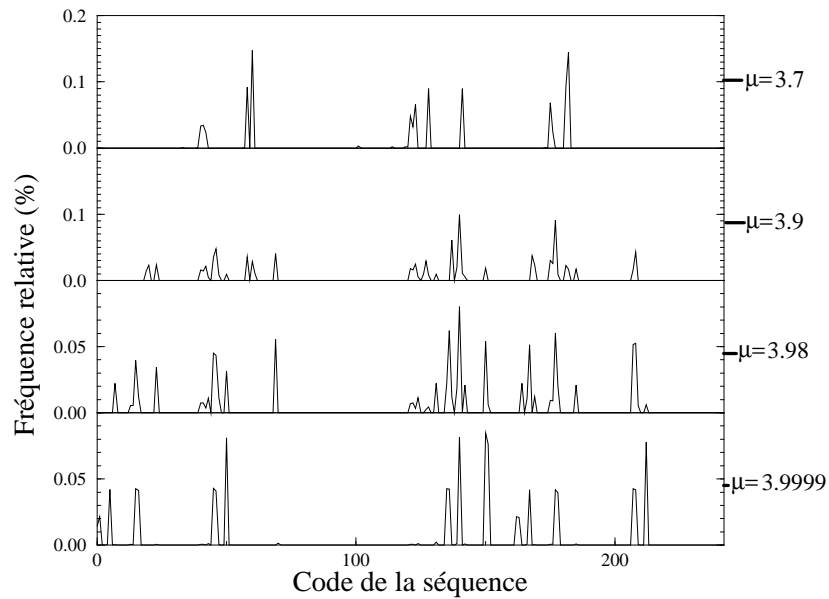


Figure 4.12: *Histogramme de probabilité de présence des séquences à 5 symboles selon la partition d'équiprobabilité ternaire ($n = 3$). Bien que la dynamique symbolique soit complète pour $\mu = 3.9999$, seules quelques séquences sont identifiées: **la dynamique déterministe est bien distinguée d'un processus stochastique.***

Liquide	Vitesse débitante: V
eau	1.29 m.s^{-1}
	1.66 m.s^{-1}
	2.15 m.s^{-1}
eau-glycérine (70%)	1.28 m.s^{-1}
	1.65 m.s^{-1}
	2.15 m.s^{-1}

Les portraits de phase reconstruits ont déjà été présentés au chapitre précédent. La construction de la dynamique symbolique se fait de la même manière en cherchant une partition équiprobable sur les abscisses d'une application de premier retour, ou sur les abscisses d'une section de Poincaré, ce qui revient au même. Puisque nous avons montré qu'il pouvait être nécessaire d'utiliser plusieurs symboles, nous avons systématiquement calculé les répartitions des séquences symboliques pour 2, 3 et 4 symboles, ceci afin de lever éventuellement un doute quant à la présence d'une dynamique symbolique complète.

Parmi les six régimes étudiés, un se dégage nettement des cinq autres: il s'agit du cas de l'eau pour une vitesse débitante de 2.15 m.s^{-1} . Nous avons déjà distingué ce régime au chapitre précédent comme ne présentant pas une intermittence de phase. Ce régime est associé à des histogrammes quasiment plats jusqu'à la rupture en gouttes, et ce, quel que soit le nombre de symboles retenus: les processus de croissance sont donc

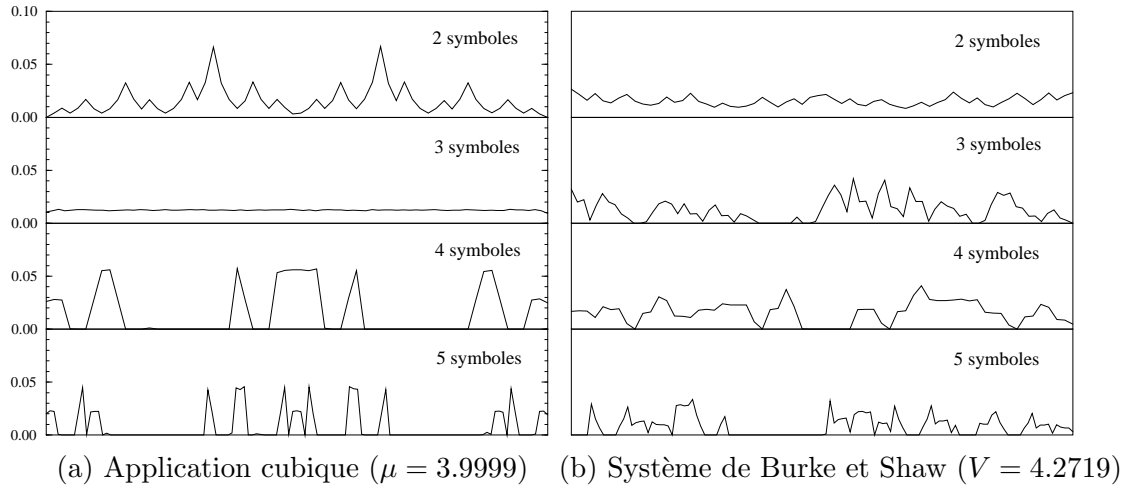


Figure 4.13: *Histogramme de probabilités de présence pour l'application cubique anti-symétrique et l'application de premier retour du système de Burke et Shaw. En présence d'une dynamique symbolique complète, le caractère déterministe ne peut pas être mis en évidence avec une dynamique symbolique statistique dont la partition concide avec la partition topologique. Ce problème n'existe pas pour le système de Burke et Shaw puisque la complétude côtoie une crise de frontière pour $V = 4.271$.*

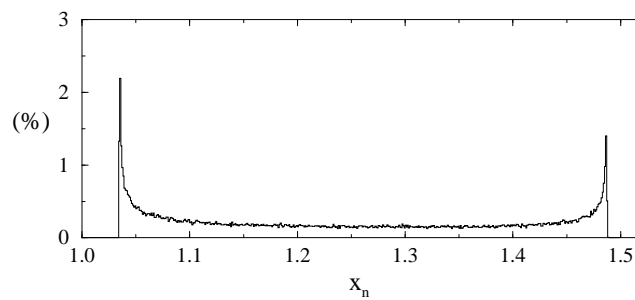


Figure 4.14: *Densité naturelle invariante pour l'application de Burke et Shaw pour $V = 4.2719$. Elle n'est pas symétrique malgré la proximité de la complétude de la dynamique pour cette valeur du paramètre de contrôle.*

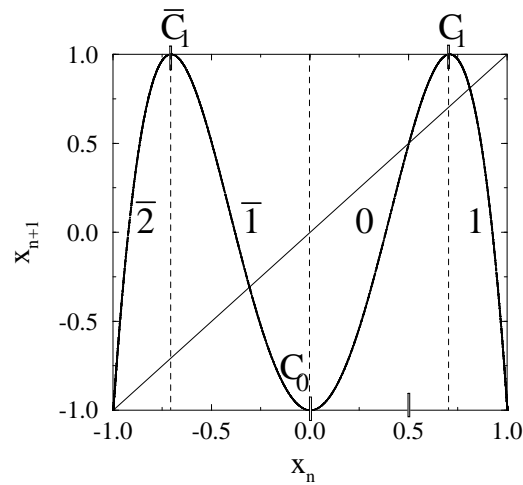


Figure 4.15: *Comportement de la fonction quadratique pour $\mu = 8.00$.*

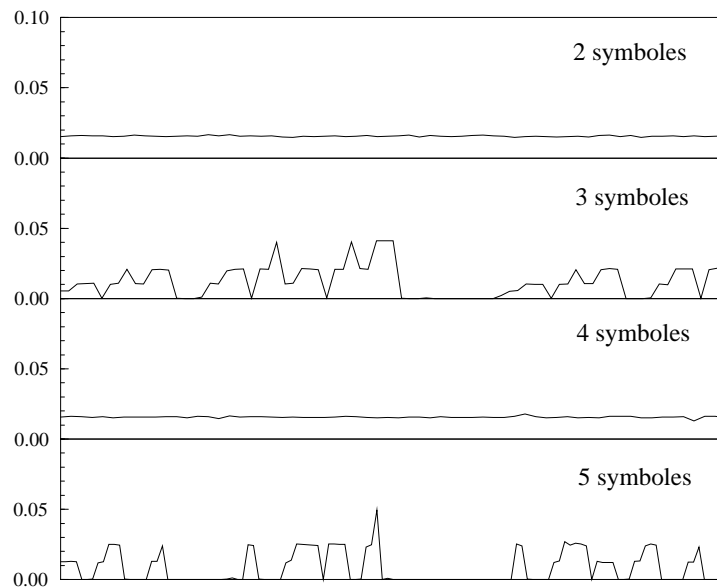


Figure 4.16: *Histogramme de probabilités de présence pour l'application quadratique symétrique. Le comportement vis-à-vis du nombre de symboles dans la dynamique symbolique statistique est encore une fois similaire à celui de l'application cubique et de la fonction logistique: lorsque la dynamique symbolique topologique est complète, le caractère déterministe ne peut pas être mis en évidence avec une dynamique symbolique statistique dont la partition concide avec la partition topologique.*

de nature stochastique (fig. 4.17). A la rupture, c'est à dire au delà d'une distance à la buse d'environ 32 mm, une légère prépondérance des séquences 010101 et 101010 se développe: cette alternance marquée de 1 et de 0 est une signature d'une succession de gouttes et de satellites comme nous le montrerons clairement plus tard. La présence de pics dans l'histogramme s'atténue fortement lorsque quatre symboles sont considérés, ce qui pourrait indiquer qu'une dynamique complète à quatre symboles serait effective... Ce qui ressort clairement pour ce régime, c'est que la croissance des perturbations n'est pas ordonnée par des séquences caractéristiques: nous ne pouvons pas faire l'hypothèse d'une évolution déterministe dans ce cas. En outre, le jet d'eau à 2.15 m.s^{-1} est celui qui a le plus grand nombre de Reynolds (environ 1300). C'est pourquoi la dynamique d'un tel jet fait penser à un comportement *turbulent*. En fait, même si le nombre de Reynolds n'est pas suffisant pour conclure directement à un écoulement se déstabilisant spontanément vers la turbulence, une des caractéristiques de cet écoulement peut expliquer pourquoi il peut néanmoins transiter vers ce type de comportement. En effet, dans le cas d'un écoulement dans un tube, le Reynolds critique se situe approximativement à 2000 – 2200, mais ici, même si la géométrie reste cylindrique et si les tailles caractéristiques restent identiques, les contraintes pariétales subies par le liquide dans l'aiguille d'injection disparaissent dès la sortie de l'injecteur. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, ces contraintes enlevées laissent place à la relaxation du profil des vitesses vers un profil plat (profil hors contraintes). Durant cette relaxation, le profil se déforme et présente un point d'inflexion. C'est en ce point de l'écoulement qu'apparaissent donc des zones de vortacité, bien connues pour leur caractère déstabilisant. Les points d'inflexion et les zones de vortacité ainsi créées peuvent donc introduire des régions de turbulence dans l'écoulement ³. Dans la suite, nous distinguerons ce jet des cinq autres régimes de fonctionnement en le nommant "jet turbulent", même s'il ne s'agit que de turbulence "très" faiblement développée.

Notons ici que la turbulence est, en toute rigueur, un comportement déterministe puisque pouvant être dérivé des équations de Navier-Stokes. Toutefois, ces équations mettent en jeu des dérivées partielles, ce qui implique un nombre de degrés de libertés pouvant être très grand, voire diverger à l'infini dans le cas de la turbulence pleinement développée. En ce sens, la levée des contraintes pariétales dès la sortie de la buse d'injection impose une augmentation du nombre de degrés de libertés possibles. De ce point de vue, l'arrivée de la turbulence peut alors être comprise comme étant une complexification du comportement sous une augmentation du nombre de degrés de liberté. En tout état de cause, la description complète de l'état d'un système turbulent nécessite un grand nombre N de variables dynamiques. Puisque nous avons accès à l'espace des phases \mathbb{R}^N par une seule observable, la projection $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est drastique et implique nécessairement un plissage intempestif des structures: lorsque la dynamique est reconstruite dans un espace \mathbb{R}^{d_E} où la dimension de plongement d_E est relativement petite, ces plis fallacieux ne peuvent être réduits, entraînant une rupture de la chaîne causale. Nous qualifierons alors le processus de stochastique par ignorance, suivant en cela Pierre Simon de Laplace:

Le hasard n'a de réalité en lui-même: ce n'est qu'un terme propre à désigner

³Il pourrait s'agir d'un état de transition métastable vers la turbulence (déclenché par la relaxation du profil des vitesses) de même nature que celui mis en évidence par Dauchot *et al* dans leur expérience sur un écoulement de Couette plan pour des valeurs assez basses du nombre de Reynolds [30].

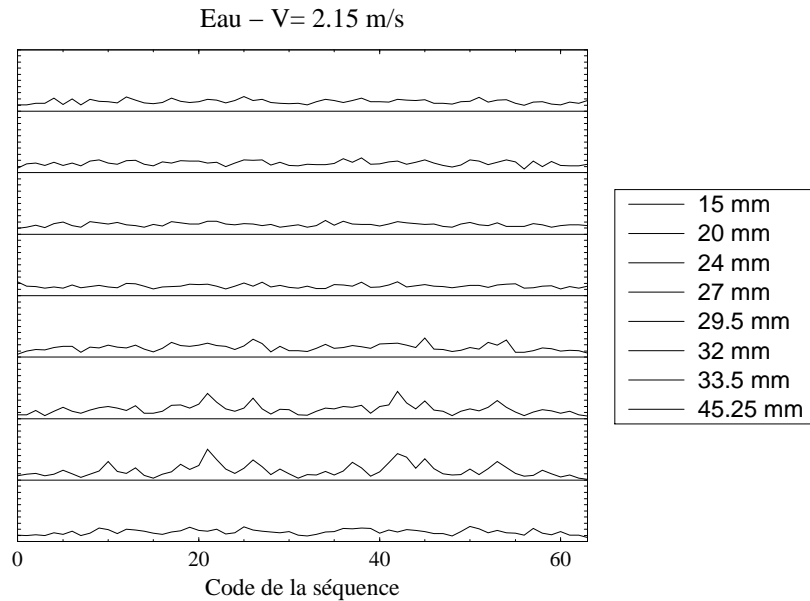


Figure 4.17: *Histogramme de probabilités de présence des séquences symboliques. Deux symboles sont ici utilisés. Nous remarquons l'absence de séquences prépondérantes avant la rupture en gouttes.*

notre ignorance [sur la manière dont les différentes parties d'un phénomène se coordonnent entre elles et avec le reste de la nature].

La notion de probabilité tient à cette ignorance... ⁴

Les cinq autres régimes ne se distinguent pas les uns des autres par leur comportement dynamique. Prenons l'exemple de l'eau avec une vitesse débitante de 1.66 m.s^{-1} . Dès que les perturbations sont suffisamment importantes pour être détectées ($d \simeq 20 \text{ mm}$), une dizaine de séquences symboliques se détache des autres (fig. 4.18, de $d = 31.25 \text{ mm}$ à $d \lesssim 41 \text{ mm}$). Elles s'écrivent:

```

000 000  100 000
000 011  110 000
000 111  111 000
001 111  111 100
011 111  111 111

```

Ces séquences révèlent une dynamique de bouffées puisque les "0" arrivent par paquet au milieu des "1" et réciproquement. Ceci se retrouve bien sur une reconstitution du jet (fig. 4.19). Ces alternances de bouffées sont typiques d'une intermittence de phase lorsque la bifurcation tangente est très proche.

⁴P.S. de Laplace, cité par Dahan Dalmédico, Le déterminisme de Pierre Simon de Laplace et le déterminisme aujourd'hui, in *Chaos et déterminisme*, Points Seuil, 1992.

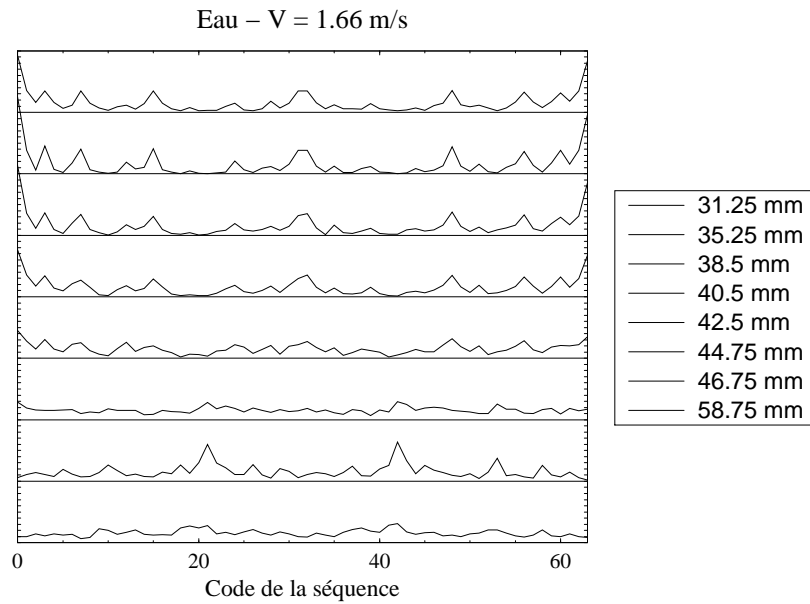


Figure 4.18: *Histogramme de probabilités de présence des séquences symboliques. Deux symboles sont ici utilisés. Nous remarquons une disparition progressive des séquences prépondérantes. D'autres réapparaissent juste à la rupture en gouttes pour laisser la place à un histogramme quasiment plat après.*

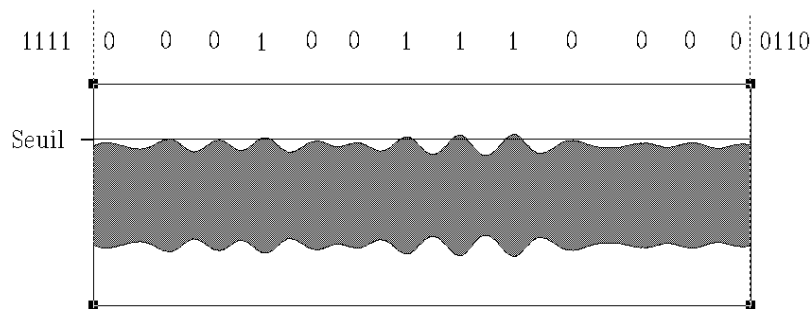


Figure 4.19: *Reconstitution du jet pour $d = 42.50 \text{ mm}$ (avant la rupture en gouttes). Le rapport d'aspect n'est pas respecté: de manière à mieux visualiser les perturbations, les distances sont dilatées dans la direction perpendiculaire à l'axe du jet. Les bouffées sont nettement présentes. La dynamique symbolique nous permet d'affirmer qu'elles sont régies par une dynamique déterministe.*

La prépondérance de ces séquences s'atténue continement au fur et à mesure que la distance à la buse augmente: celles-ci disparaissent progressivement au profit d'un histogramme pratiquement plat pour $d = 44.75 \text{ mm}$, soit juste avant la rupture en gouttes. Afin de vérifier si cet histogramme est associé à des processus stochastiques ou à une dynamique déterministe complète, le comportement dynamique à la rupture est analysé avec une dynamique symbolique statistique impliquant 3 ou 4 symboles (fig. 4.20). Nous remarquons alors qu'augmenter le nombre de symboles utilisés permet de retrouver un histogramme marqué par des séquences prépondérantes. Ainsi, nous pouvons en conclure que la dynamique n'est certainement pas stochastique au niveau de la rupture en gouttes mais plutôt associée à un comportement qui pourrait être décrit à l'aide d'une dynamique symbolique **complète à deux symboles**.

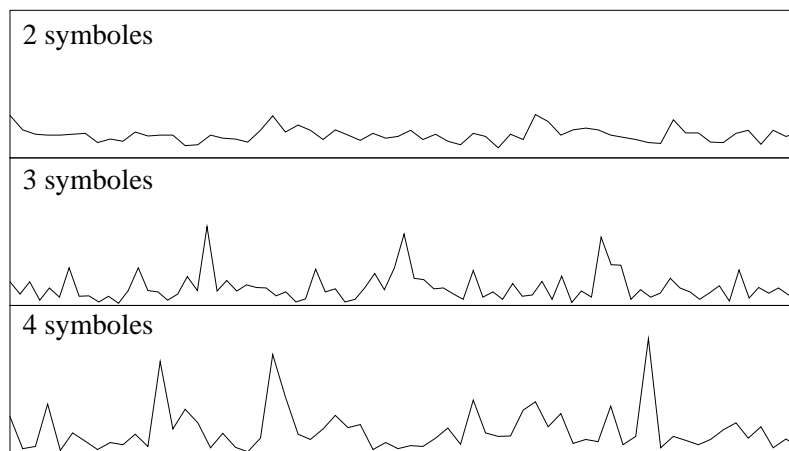


Figure 4.20: *Histogrammes de probabilités de présence des séquences symboliques juste avant la rupture en gouttes ($d = 44.75 \text{ mm}$), dans le cas de l'eau animée d'une vitesse débitante de 1.66 m.s^{-1} . Des séquences prépondérantes apparaissent lorsque le nombre de symboles est augmenté; la dynamique est donc déterministe.*

A la rupture en gouttes, une "résonance" est observée. Par résonance, nous entendons ici l'apparition de deux séquences fortement prépondérantes qui structurent le comportement dynamique (fig. 4.18). Ces deux séquences sont codées 010101 et 101010: elles sont la signature d'un comportement fortement périodique traduisant une alternance de "0" et de "1" très nettement marquée. Une alternance goutte/satellite est donc clairement associée aux phénomènes de rupture comme l'ont montré les études précédentes. Cette alternance peut être vue sur une reconstitution du jet à une vitesse $V = 1.29 \text{ m.s}^{-1}$ pour une position d proche de la longueur de rupture en gouttes L_{BU} (4.21).

Ensuite, cette résonance se relaxe pour laisser place à un histogramme pratiquement plat. Notons toutefois qu'ici l'absence de séquences prépondérantes apparaît plutôt comme la signature d'une dynamique stochastique puisque, lorsqu'une analyse est réalisée avec un nombre supérieur de symboles, l'histogramme ne se révèle pas être marqué par des pics (fig. 4.22). La dynamique des fluctuations est par conséquent de nature essentiellement

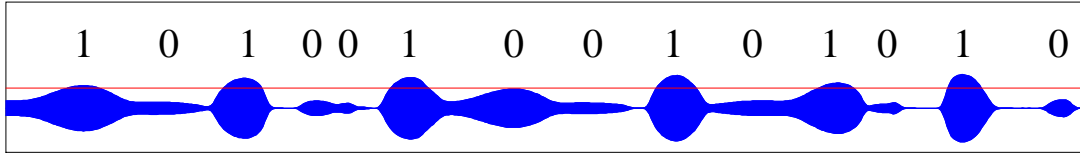


Figure 4.21: *Reconstitution du jet pour $d = 35.50 \text{ mm}$ ($V = 1.29 \text{ m.s}^{-1}$). Le rapport d'aspect n'est pas respecté: de manière à mieux visualiser les perturbations, les distances sont dilatées dans la direction perpendiculaire à l'axe du jet. Le seuil permettant d'associer un 0 aux ligaments et satellites et un 1 aux gouttes principales, est très schématiquement représenté par la droite horizontale en gris. Nous constatons effectivement une prépondérance de l'alternance gouttes/satellites.*

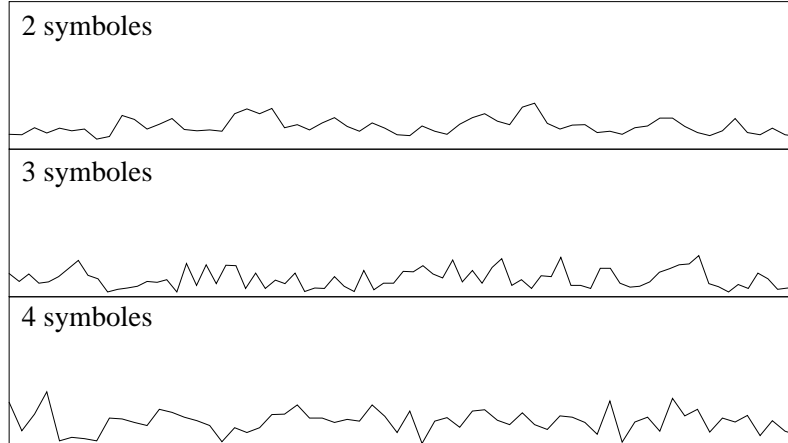


Figure 4.22: *Histogramme de probabilités de présence des séquences symboliques après la relaxation de la résonance dans le cas de l'eau animée d'une vitesse débitante de 1.66 m.s^{-1} et à une distance $d = 58.75 \text{ mm}$ de la buse (après la rupture en gouttes). Il n'y a pas une apparition très nette de séquences prépondérantes: les fluctuations analysées sont donc gouvernées par une dynamique essentiellement stochastique.*

stochastique: il est tout à fait probable que les fluctuations ici testées portent sur la dispersion en taille des gouttes. Puisque ces dernières sont, en première approximation, de même taille, la dynamique symbolique traque alors les fluctuations autour de la taille moyenne, fluctuations de faibles amplitudes et principalement gouvernées par le bruit inhérent à toute expérience ⁵.

L'ensemble de ces résultats demeure vrai pour les cinq régimes étudiés pour lesquels la longueur de rupture est uniquement gouvernée par les forces de tension superficielle (c'est à dire tous les six régimes, sauf pour l'eau à $V = 2.15 \text{ m.s}^{-1}$). Les séquences prépondérantes avant la rupture en gouttes sont identiques dans les cinq cas. Elles évoluent de manière tout à fait analogue: leur prépondérance s'atténue progressivement jusqu'à une dynamique complète juste avant la rupture. Ensuite, la résonance caractéristique de l'alternance goutte/satellite est observée à la distance $d = L_{BU}$, juste au niveau de la rupture. La distinction entre différentes portions de la courbe de stabilité, pour le cas qui nous occupe, est donc associée à des processus dynamiques de natures très différentes.

De manière plus précise, il faut remarquer que le régime d'atomisation, pour lequel la dynamique est globalement de nature stochastique, correspond au cas où la rupture en gouttes du jet est soumise à l'influence du profil des vitesses (Eau - $V = 2.15 \text{ m.s}^{-1}$). Rappelons que cette influence peut se comprendre comme étant une manière de développer la turbulence au sein de l'écoulement. La nature stochastique de la dynamique, relevée dans l'étude qui précède, peut donc être vue comme ayant pour origine l'apparition de zones de turbulence dans le jet (même faiblement développée).

Il reste que lorsque la viscosité est augmentée, la complétude (au sens d'une dynamique complète) est moins nette: ceci peut s'interpréter comme une résistance aux développements des instabilités. De ce fait, la complétude au niveau de la rupture en gouttes est moins marquée. Toutefois, la résonance sur l'alternance goutte/satellite est plus nette et sa relaxation moins rapide comme si cette structuration de la dynamique autour d'une alternance gouttes/satellites était mieux établie. Augmenter la vitesse débitante revient au contraire à développer la dynamique, ce qui a pour effet de mieux approcher la complétude et d'accélérer la relaxation de la résonance.

4.4 Conclusion

L'utilisation d'une dynamique symbolique statistique nous a permis de mettre en évidence des comportements différents pour les différents régimes étudiés. Une dynamique déterministe est associée aux jets pour lesquels les perturbations initiales sont très faibles puis naturellement sélectionnées par l'instabilité capillaire. Au contraire, une dynamique stochastique est associée au jet caractérisé par sa sensibilité à la relaxation du profil des vitesses et pour lequel nous avons montré que les perturbations initiales étaient d'amplitudes plus importantes que pour les autres cas. Notamment il semble que, lorsque la longueur d'onde des perturbations initiales n'est plus celle associée au taux de croissance maximum, la dynamique du jet ne peut plus se structurer autant, et que l'aspect déterministe ne peut plus

⁵Une remarque doit être faite sur le comportement périodique de période 1. En effet, dans ce cas très particulier, une dynamique symbolique statistique testera nécessairement les fluctuations dues au bruit inhérent à l'expérimentation et détectera, de fait, une dynamique stochastique.

être mis en évidence.

Bibliography

- [1] G.W. Hill. *On the part of the motion of the lunar perigée which is a function of the mean motion of the sun and moon*, Acta Mathematica, **8**:1-36, 1877.
- [2] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome III, Gauthier-Villard, Paris, 1892.
- [3] P. Cvitanović. Periodic Orbits as the Skeleton of Classical and Quantum Chaos, *Physica D*, **51**, 138-151, 1991.
- [4] R.M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261, 459.
- [5] P. Collet, J. P. Eckmann. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Progress in Physics, Ed. A. Jaffe et D. Ruelle, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [6] Hao Bai Lin. *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific Publishing, Singapore, 1989.
- [7] T. Hall. The creation of Horseshoes, *Nonlinearity*, **7** (3), 861-924, 1994.
- [8] C. Letellier. *Cours de matrise*, Université de Rouen, 1998.
- [9] E. Ott. *Chaos in dynamical system*, Cambridge University Press, 1993.
- [10] R. Gilmore. *Communication privée*.
- [11] P. Dutertre. *Caractérisation des attracteurs étranges par la population d'orbites périodiques*, Thèse de doctorat, Université de Rouen, France, 1995.
- [12] S. P. Dawson, C. Grebogi, I. Kan, H. Koçak. Antimonotonicity : inevitable reversals of period-doubling cascades, *Physics Letters A*, 162, 249-254, 1992.
- [13] J. A. C. Gallas. The role of codimension in dynamical systems, *International Journal of Modern Physics C*, 3 (6), 1295-1321, 1992.
- [14] C. Letellier, P. Dutertre, B. Maheu. Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282, 1995.
- [15] R. M. May. Bifurcations and dynamic complexity in ecological systems, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **316**, 517, 1979.

-
- [16] E. N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, 1963.
- [17] R. Shaw. Strange Attractor, Chaotic Behavior and Information Flow, *Zeitschrift für Naturforschung*, **36** (a), 80-112, 1981.
- [18] C. Letellier, P. Dutertre, J. Reizner, G. Gouesbet. Evolution of multimodal map induced by an equivariant vector field, *Journal of Physics A*, **29**:5359-5373, 1996.
- [19] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.*, **50**, 69-77, 1976.
- [20] P. Grassberger, H. Kantz and U. Moening. On the symbolic dynamics of the Hénon map, *Journal of Physics A : Math. Gen.*, **22**, 5217-5230, 1989.
- [21] Jérôme Plumecoq et Marc Lefranc. *Constructing approximate generating partitions from topological analysis* Preprint soumis à Elsevier Preprint, Mars 99.
- [22] J. Plumecoq, C. Szwaj, D. Derozier, M. Lefranc et S. Bielawski. Chaos spatiotemporel induit par non-uniformités dans un laser. *2^{ème} colloque sur la chaos temporel et le chaos spatio-temporel*, Rouen, Décembre 1998.
- [23] H.-P. Fang. Universal bifurcation property of two- or higher-dimensional dissipative systems in parameter space : why does 1D symbolic dynamics work so well ?, *Journal of Physics A*, **28**, 3901-3910, 1995.
- [24] K. Ikeda. Multiple-valued stationary state and its stability of the transmitted light by a ring cavity system, *Optics Communications*, **30** (2), 257-261, 1979.
- [25] . H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling. Numerical Recipes, *Cambridge University Press*, 1986.
- [26] F. Takens. Detecting Strange Attractors in Turbulence, in : *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, eds. D. A. Rand and L. S. Young, pub. Springer-Verlag, New York, 366-381, 1981.
- [27] X.Z. Tang, E.R. Tracy and R. Brown. *Physica D*, **102**:253, 1997.
- [28] X.Z. Tang, E.R. Tracy, A.D. Boozer, A. de Brauw and R. Brown. *Physics Letters A*, **190**:393, 1994.
- [29] C.S. Daw, M.B. Kennel, C.E.A. Finney and F.T. Connelly. *Physical Review E*, **57**:2811, 1998.
- [30] O. Dauchot. Transition to turbulence in shear flows: from a nonlinear dynamical system to a phase transition description. *Proc. of STOCHAOS*, Ambleside, Août 1999

Conclusion générale

Toute une partie du mémoire est consacrée à la mise au point de la technique de mesure. Les simulations numériques ont pu clairement montrer l'inadaptation de la technique de mesure par diffusion de la lumière au problème posé. La méthode retenue, une technique de mesure par ombroscopie, permet donc la mesure d'une grandeur proportionnelle à un diamètre transverse du jet liquide cylindrique.

Grâce à ce dispositif de mesure, des séries temporelles donnant l'évolution du diamètre du jet à différentes positions le long du jet ont pu être analysées. La théorie de la dynamique des systèmes non linéaires nous a alors permis d'appréhender différemment la physique des processus d'atomisation. Dans le cas particulier des jets liquides cylindriques basses vitesses, nous avons pu montrer quel est l'intérêt de ce type de démarche pour la compréhension de la déstabilisation et de la rupture en gouttes d'un jet. Sur le long terme, ce type de travail devrait se dérouler en deux temps:

- il faut d'abord réussir à caractériser la dynamique d'une des variables du système, ici le diamètre local, de manière à obtenir le maximum d'informations sur la composante déterministe du phénomène étudié;
- ensuite, cette information doit être utilisée pour améliorer la compréhension du problème physique de la rupture d'un jet en gouttes; le cas échéant, elle devrait aussi permettre de préciser les paramètres sur lesquels une future modélisation doit s'appuyer pour prétendre mieux décrire l'atomisation que les précédentes.

Il faut donc voir la première étape de ce type d'étude comme un préalable à l'amélioration de la compréhension du phénomène physique. Dans notre cas, notre action s'est focalisée sur la première partie de l'étude. Elle a débutée avec l'analyse de la croissance des perturbations en fonction de la distance à la buse. Ici, le lien avec la physique et la modélisation a pu être trouvé assez facilement car, en fait, il a été clairement prouvé que la relaxation du profil des vitesses agit non pas sur le taux de croissance des perturbations, mais essentiellement par une augmentation importante de la valeur de l'amplitude des perturbations initiales. Cette influence permet à elle seule de rendre compte du raccourcissement de la longueur de rupture pour ce type de jet et suffit à expliquer l'apparition précoce d'un point de vitesse critique sur la courbe de stabilité. Une modélisation complète de l'atomisation des jets liquides cylindriques doit donc tenir compte de l'effet de la relaxation du profil des vitesses sur l'amplitude des perturbations initiant la déstabilisation du jet.

Nous avons aussi mis en évidence une intermittence de phase dans le cas d'un jet excité transversalement. Ce type de comportement semble se généraliser pour le cas des jets libres à partir du moment où ils ne sont pas turbulents. Ce résultat est le fruit d'une étude des propriétés de récurrence de la dynamique (application de premier retour sur l'angle de phase) mais a été clairement confirmé par l'intermédiaire de la dynamique symbolique statistique. Cette dernière méthode d'analyse nous a permis de dresser quelques traits caractéristiques de la dynamique des perturbations en fonction de la distance à la sortie de la buse. Nous avons notamment constaté que la dynamique des perturbations avant la rupture semble nécessairement passer par une dynamique symbolique binaire complète avant de permettre la rupture en gouttes proprement dite. D'autre part, le jet soumis à la relaxation du profil des vitesses a pu être qualifié de turbulent notamment à cause de notre incapacité à mettre en évidence un comportement déterministe à l'aide de la dynamique symbolique. Ainsi deux régimes de fonctionnement ont pu être mis en évidence. Dans la majorité des cas, la dynamique suit globalement un comportement d'intermittence de phase, donc déterministe. En revanche, lorsque le jet est soumis à l'action de la relaxation du profil des vitesses, nous n'avons pas pu attribuer un caractère déterministe à la dynamique: le jet a finalement été considéré comme turbulent (au sens d'une turbulence faiblement développée).

Deux faits sont essentiels pour permettre une future connexion de ces résultats avec les caractéristiques physiques de l'atomisation. D'une part les jets montrant une dynamique déterministe doivent présenter des comportements de rétroaction comme celui que nous avons évoqué comme étant probablement à l'origine de l'intermittence de phase: la remontée d'une onde capillaire à la surface du jet qui apparaît au moment du détachement d'une goutte. Encore une fois, c'est une technique d'analyse des systèmes dynamiques non linéaires qui nous a permis d'identifier ce processus: il s'agit de la localisation des croisements sur un portrait de phase. D'autre part, il sera nécessaire de mieux modéliser le champ de vitesse à l'intérieur du jet pour tenter de savoir si des régions de turbulence apparaissent et quelles interactions ont-elles avec les mécanismes d'instabilités capillaires gouvernant finalement le jet dans tous les cas présentés dans cette thèse (pas d'actions aérodynamiques avec le gaz extérieur pour de si faibles vitesses). Finalement, la marque d'un déterminisme sous-jacent à la majorité des régimes d'atomisation montre que la rupture en gouttes d'un jet liquide cylindrique est, dans la majeure partie des cas, un phénomène contrôlable.

A la lumière de ces conclusions, deux interrogations principales apparaissent. Peut-on différencier la dynamique d'un jet de Zone 1 et de Zone 3 pour des vitesses supérieures à la vitesse critique? En fait cette question revient à savoir si la dynamique engendrée par la relaxation du profil des vitesses (jet de Zone 1) est semblable ou non à celle que présente un jet soumis à l'action des forces aérodynamiques (jet visqueux, de Zone 3, pour une vitesse supérieure à la vitesse critique). Autrement dit, les interactions aérodynamiques engendrent soit une dynamique déterministe dont la nature nous est encore inconnue, soit une dynamique stochastique.

La nature de la dynamique juste avant la rupture en gouttes, binaire et complète, est

aussi un indice permettant d'introduire un des points clefs des futures études à réaliser sur les jets liquides cylindriques. Ces écoulements sont convectifs et ils présentent donc par essence un comportement spatio-temporel plutôt qu'une simple addition de comportements temporels comme nous en avons fait l'hypothèse dans tout ce travail. C'est pourquoi une analyse basée sur l'acquisition simultanée de deux diamètres locaux permettrait au moins d'accéder à une partie de la dynamique spatio-temporelle du jet. Plus concrètement, cette technique aurait pour avantage de donner directement une information sur la croissance des perturbations entre ces deux points de mesure tout en s'affranchissant de la dynamique d'initiation des perturbations (possibilité de corrélations, modélisations de type "entrées/sorties", *etc.*).

La théorie des systèmes dynamiques non linéaires confirme la potentialité de ses concepts en arrivant, ici, à expliquer des comportements apparemment complexes que ne peuvent appréhender d'autres théories, quitte à choisir un point de vue qui dérouté parfois l'expérimentateur ou le physicien construisant des modèles. J'espère que cette thèse aura au moins montré qu'en adoptant ce point de vue, elle peut apporter de nouveaux éclairages et quelques réponses à un domaine si proche des réalités industrielles...

Appendix A

Caractéristiques générales d'un spray

A.1 Grandeurs caractéristiques d'un spray

De manière à optimiser le choix d'un spray pour une utilisation donnée, et donc celui d'un atomiseur, il faut à définir ses caractéristiques.

Tout d'abord, les distributions en tailles et en vitesses, qui sont des fonctions du type "densité de probabilité", permettent de connaître la répartition en tailles ou en vitesses des gouttes d'un spray. Mais ces distributions peuvent aussi renseigner sur la répartition en volume (ou en masse), c'est à dire donner le pourcentage de gouttes ayant un volume donné.

Nous pouvons aussi distinguer les distributions numériques, des distributions volumiques. Les premières donnent la proportion du nombre de gouttes ayant une de leurs caractéristiques (taille, masse, vitesse) dans une classe de valeurs donnée. Les secondes sont définies pour donner la proportion du volume du spray dans laquelle se trouve les gouttes ayant telle caractéristique (taille, masse, vitesse) dans une classe de valeurs donnée. Bien entendu, pour un même spray et dans des conditions particulières sur la forme des gouttes, ces deux représentations se déduisent l'une de l'autre. En effet, pour un ensemble de gouttes sphériques, nous pouvons montrer que les distributions numérique (f_n) et volumique (f_V) sont liées par la relation:

$$f_V = \frac{D^3}{D_{30}^3} f_n(D) \quad (\text{A.1})$$

où D est la variable désignant le diamètre des gouttes, et D_{30} , le diamètre de la goutte dont le volume, multiplié par le nombre de gouttes du spray, est égal au volume total du spray ¹.

De manière à avoir un modèle de ces fonctions, les classiques distributions normale ou Log-normale peuvent être utiles [1].

¹Dans la suite, nous définissons précisément les diamètres D_{ab} , où a et b sont des constantes entières (ici 3 et 0 respectivement pour D_{30}).

La distribution normale est donnée par:

$$\frac{dN}{dD} = f(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_n} e^{-\frac{1}{2s_n^2}(D - \bar{D})^2} \quad (\text{A.2})$$

où s_n est une mesure de la déviation de la valeur de D par rapport à la valeur moyenne \bar{D} . En règle général, s_n est la déviation standard, et s_n^2 est la variance.

Souvent, la distribution en taille suit mieux cette distribution gaussienne si la valeur prise en compte pour D est la valeur du logarithme du diamètre de la particule. Alors, nous obtenons une distribution Log-normale dérivant de la distribution précédente. La distribution Log-normale est aussi valable pour les distributions en surface ou en volume.

Cependant, des représentations empiriques plus adéquates ont été proposées. La distribution de Nukiyama et Tanasawa [2] et ses dérivées sont les plus courantes:

$$\frac{dN}{dD} = aD^p \exp[-(bD)^q] \quad (\text{A.3})$$

où a , b , p , et q sont des constantes arbitraires indépendantes généralisant la distribution proposée par les auteurs.

Celle de Rosin et Rammler [3] a autorité en ce qui concerne la distribution en tailles des gouttes; elle s'énonce:

$$1 - Q = e^{-(D/X)^q} \quad (\text{A.4})$$

où Q est une fraction du volume total, somme des volumes de chaque goutte dont le diamètre est inférieur à D . X et q sont des constantes arbitraires.

Il existe une distribution de Rosin-Rammler modifiée [4], spécifique au cas d'un injecteur à swirl, et une fonction à limite supérieure de Mugele et Evans [5] fonctionnant avec des valeurs finies pour le minimum et le maximum des tailles de gouttes (distribution bornée), donc plus réaliste.

A l'aide des distributions précédentes, il est facile de définir un autre type de paramètres très pratiques pour la caractérisation de l'état d'un spray. Il s'agit des diamètres moyens. L'expression générale d'un diamètre moyen D_{ab} , défini par les constantes entières a et b , est donnée par

$$D_{ab} = \left[\frac{\int_{D_0}^{D_m} D^a (dN/dD) dD}{\int_{D_0}^{D_m} D^b (dN/dD) dD} \right] \left(\frac{1}{a-b} \right) \quad (\text{A.5})$$

sachant que dN est le nombre de gouttes du spray dont le diamètre est dans l'intervalle dD . La somme $(a + b)$ s'appelle l'ordre du diamètre moyen. Par exemple, D_{10} est le diamètre moyen au sens commun du terme; il s'agit de la moyenne arithmétique sur la distribution des diamètres du spray. Son expression est

$$D_{10} = \left[\frac{\int_{D_0}^{D_m} D (dN/dD) dD}{\int_{D_0}^{D_m} (dN/dD) dD} \right] \quad (\text{A.6})$$

D_{30} est le diamètre d'une goutte dont le volume, multiplié par le nombre total de gouttes, est égal au volume liquide total qu'occupe le spray. D_{32} , le diamètre de Sauter, est le diamètre d'une goutte dont le rapport volume sur surface est égal à celui du spray entier.

Le tableau A.1 récapitule quelques diamètres moyens les plus courants et leur domaine d'application (voir [1], p. 91).

a	b	$a + b$	Symbole	Nom du diamètre moyen	Application
1	0	1	D_{10}	Longueur	Comparaisons entre sprays
2	0	2	D_{20}	Surface	Contrôle de la surface
3	0	3	D_{30}	Volume	Contrôle du volume
2	1	3	D_{21}	Surface sur longueur	Absorption
3	1	4	D_{31}	Volume sur longueur	Evaporation, diffusion moléculaire
3	2	5	D_{32}	Sauter	Transfert de masse, réaction
4	3	7	D_{43}	De Brouckere et Herdan	Equilibre de combustion

Table A.1: *Diamètres moyens et leurs applications.*

D'autres diamètres permettent de connaître certaines caractéristiques de la distribution en tailles des gouttes. Par exemple, les diamètres D_X , sont égaux aux diamètres de gouttes pour lesquels $X\%$ du volume total de liquide est contenu dans les gouttes ayant un diamètre inférieur à cette valeur. Ou bien encore, D_{max} , correspondant à la valeur du diamètre au maximum de la courbe de distribution. Mais ils existent encore d'autres paramètres associés à l'utilisation de tel ou tel modèle de courbe de distribution.

Enfin, des informations sur la dispersion en tailles des gouttes peuvent être connues à l'aide de coefficients dont la liste qui suit donne quelques exemples.

- Un index permet de mesurer le degré d'uniformité des gouttes:

$$\text{Index d'uniformité des gouttes} = \frac{\sum_i V_i (D_{0.5} - D_i)}{D_{0.5}} \quad (\text{A.7})$$

où D_i est la valeur du diamètre à l'intérieur d'une classe ² i , pour laquelle $i\%$ du volume total de liquide est contenu dans les gouttes ayant un diamètre inférieur à cette valeur.

Cette expression indique l'importance de la dispersion relative autour du diamètre médian $D_{0.5}$.

- Le facteur Δ défini par:

$$\Delta = \frac{D_{0.9} - D_{0.1}}{D_{0.5}} \quad (\text{A.8})$$

De la même manière, ce facteur détermine le domaine sur lequel les diamètres des gouttes du spray se répartissent autour du diamètre médian $D_{0.5}$. De plus, il est directement calculable à partir de la distribution de Rosin-Rammler qui donne alors: $\Delta = (3.322)^{1/q} - (0.152)^{1/q}$.

- L'index de dispersion est un autre paramètre utilisé pour connaître le domaine de dispersion en taille, qui, défini pour la distribution de Rosin-Rammler, s'écrit:

$$\delta = \int_{D_0}^{D_m} D \frac{dQ}{dD} dD = \int_{D_0}^{D_m} q \left(\frac{D}{X} \right)^q \exp \left[- \left(\frac{D}{X} \right)^q \right] dD \quad (\text{A.9})$$

Sa forme relativement compliquée fait préférer l'utilisation de l'expression précédente: (Δ) .

- Enfin, pour accéder à une indication de la taille maximale possible pour une goutte, un autre facteur est efficace. Son expression a une forme très proche de celle de Δ :

$$\Delta_B = \frac{D_{0.999} - D_{0.5}}{D_{0.5}} \quad (\text{A.10})$$

En considérant une distribution de Rosin-Rammler, nous avons

$$\frac{D_{0.999}}{X} = (6.90775)^{1/q},$$

et par conséquent, $\Delta_B = (9.9665)^{1/q} - 1$.

A.2 Modélisation de l'atomisation

Parmi les caractéristiques présentées dans la section précédente, la *fonction densité de probabilité*, caractérisant la distribution des tailles ou des vitesses des gouttes d'un spray, va nous intéresser plus particulièrement dans la mesure où elle peut être prédite grâce au formalisme de l'entropie maximum.

Les premiers modèles décrivant un processus d'atomisation sont dus à Plateau et Rayleigh [6, 7, 8]. La **théorie linéaire** de Rayleigh permet de décrire simplement, grâce à

²Notons ici que les équations sont discrétisées comme leur utilisation le nécessite. Cette notation est équivalente à la notation "continue" utilisée pour présenter les diamètres moyens dans le paragraphe précédent.

un formalisme mathématique très accessible, les mécanismes fondamentaux de déstabilisation de l'interface liquide/gaz. En outre, cette description donne accès à la connaissance des longueurs d'onde des perturbations dominantes s'installant à la surface du jet, de leur taux de croissances (diagramme de dispersion), et d'une bonne approximation de la longueur de rupture. Connaissant la longueur d'onde associée à la perturbation dominante, un schéma simple de rupture en gouttes permet de calculer une valeur de la taille des gouttes obtenues avec un bon accord expérimental. Ce modèle est présenté dans la section suivante pour le cas particulier de l'instabilité d'un jet liquide cylindrique.

Ce modèle est aussi à la base des développements successifs de la théorie linéaire dont nous parlerons aussi dans le cadre du jet liquide cylindrique. Ces théories plus récentes ont été mises au point dans le but de tenir compte de comportements plus fins mis en évidence par des études expérimentales basées essentiellement sur l'étude statistique de mesures de longueurs de rupture.

La théorie linéaire est construite sur la linéarisation des équations du mouvement du jet. Au delà de cette linéarisation, en tenant compte des termes d'ordre supérieurs, naissent les **théories faiblement non linéaires**. Leur limite actuelle est fixée par la complexité de l'étude analytique, actuellement située à l'ordre 3. Ces méthodes ont l'avantage de fournir des schémas du processus d'atomisation incluant l'apparition de satellites, par exemple. Les satellites sont des gouttes de petites tailles accompagnant la formation d'une goutte correspondant à la perturbation dominante dans un processus classique comme celui décrit par la théorie de Rayleigh. Ces modèles permettent aussi de retrouver l'évolution de la puissance des modes fondamental et harmoniques associés à la longueur d'onde naturelle déstabilisant le jet. Nous retrouverons plus précisément cet aspect dans l'étude de nos propres résultats expérimentaux (cf. Chap. 2). Globalement, nous pouvons dire que ces méthodes permettent de tenir compte de plusieurs échelles sur le processus de rupture capillaire, contrairement à la théorie linéaire limitée à l'échelle caractéristique de la perturbation principale.

Grâce à l'augmentation continue des performances de calculs, les méthodes numériques se développent en permanence et font apparaître des méthodes plus sophistiquées basées sur le principe des nappes tourbillonnaires, ou sur celui des volumes de fluide (*abréviation: V.O.F.*), par exemple. Ces méthodes, **fortement non linéaires**, ont l'avantage de ne pas limiter leur domaine de validité aux petites amplitudes de perturbations comme c'est le cas, en toute rigueur, pour les théories linéaire et faiblement non linéaires, même si les résultats de ces dernières sont malgré tout systématiquement extrapolés jusqu'à la rupture en gouttes.

Encore difficilement exploitables à cause des temps de calculs qu'elles demandent et de leur sensibilité aux paramètres d'entrée, ces méthodes sont néanmoins très représentatives des observations. Par exemple, comme nous pouvons le constater sur un exemple particulier présenté sur la figure A.1, l'utilisation des "volumes de fluides" donne de très bonnes simulations de l'atomisation secondaire. Par ailleurs, nous pouvons noter que du point de vue de la dynamique des systèmes non linéaires, la sensibilité aux paramètres d'entrée que ces méthodes accusent ressemble fortement à une des caractéristiques classiques permettant d'identifier un phénomène non linéaire: la sensibilité aux conditions initiales. Il n'est donc pas étonnant de constater un tel type de comportement sur des méthodes construites

à partir de systèmes d'équations non linéaires.

La grande faiblesse de ces méthodes numériques est qu'elles ne permettent généralement pas la détermination des caractéristiques des perturbations qui vont conduire le système liquide à la rupture. Elles calculent l'évolution de la ou des déformations interfaciales, introduites au temps initial par l'utilisateur, et souvent déduites des résultats de la théorie linéaire. De la même manière, les méthodes numériques permettant d'accéder à l'évolution globale d'un spray (ruptures secondaires, évaporation, recombinaisons entre gouttes, et collisions entre particules et sur des parois), nécessite souvent l'introduction un peu artificielle d'une fonction de distribution initiale des tailles de gouttes.

Enfin, notons que ces méthodes fortement non linéaires sont limitées à des sauts de masse volumique relativement faible. Elles sont notamment très utilisées pour la modélisation des jets de gaz dans un gaz ³.

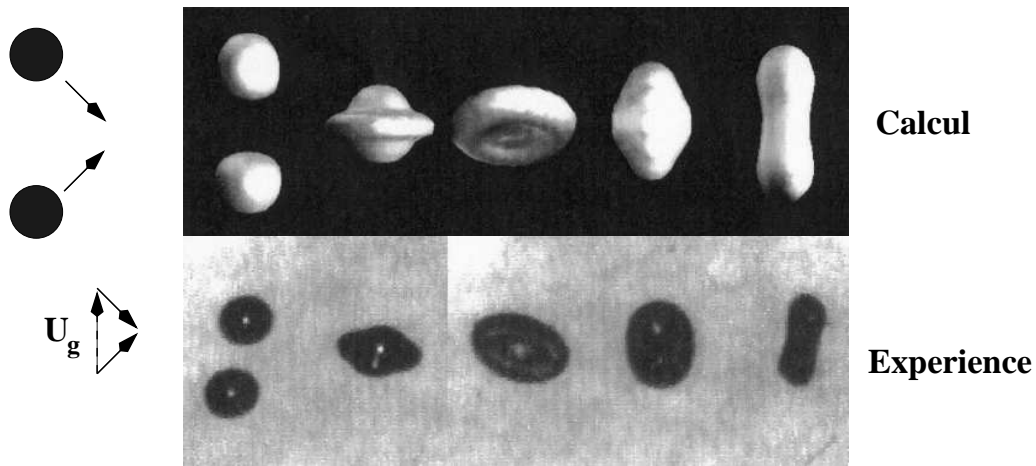


Figure A.1: Exemple d'une collision avec coalescence entre deux gouttelettes d'un point de vue expérimental (Visualisation ONERA/CERT/DERMES) et d'un point de vue numérique à l'aide de la méthode des "volumes de fluides" (V.O.F., code SURFER). Les paramètres physiques sont: $We = \frac{\rho_l d_g U_g^2}{\sigma_l} = 52$; $Re = \frac{\rho_l d_g U_g}{\mu_l} = 420$; où $d_g = 200\mu m$ est le diamètre des gouttelettes.

Enfin, en marge de ces formalismes basés sur les équations du mouvement, nous trouvons le **formalisme de l'entropie maximum**. Il offre la possibilité de prédire la fonction densité de probabilité caractérisant la distribution des tailles ou des vitesses des gouttes d'un spray. Cette théorie permet de calculer la fonction densité de probabilité d'une variable aléatoire dont le comportement est contraint par certaines propriétés. Par exemple, ces contraintes peuvent s'exprimer par la connaissance de la valeur moyenne ou des moments

³Même si ce problème est plus complexe encore car il doit tenir compte du mélange possible entre les deux phases gazeuses: celle du jet, et celle du gaz environnant.

de différents ordres de la variable aléatoire. En outre, une contrainte supplémentaire est imposée par la condition de normalisation que toute fonction densité de probabilité doit satisfaire. Par conséquent, chacune de ces contraintes doit pouvoir s'exprimer sous une forme analogue à:

$$\int_{D_{min}}^{D_{max}} f(D) g_i(D) dD = \langle g_i \rangle \quad (\text{A.11})$$

Le formalisme de l'entropie maximum ajoute alors une condition supplémentaire pour aboutir à un système d'équations ayant une solution unique: la fonction densité de probabilité solution est celle dont l'entropie est maximum. La définition de l'entropie d'une fonction densité de probabilité est due à Shannon [9]. Et dans le cas d'une distribution de probabilité continue, elle s'écrit:

$$S = -k \int_0^{\infty} f(D) \ln(f(D)) dD \quad (\text{A.12})$$

où k est une constante positive, et f la fonction densité de probabilité.

S s'appelle donc l'*entropie de Shannon* de la fonction f . Elle caractérise l'incertitude sur le comportement de la variable aléatoire décrit par la fonction densité de probabilité. Pour une fonction densité de probabilité équivalente à un pic de Dirac, l'entropie de Shannon est nulle, car le choix de la variable aléatoire est unique, et sa probabilité d'être tirée égale à 1. Pour une fonction dont tous les états sont équiprobables, l'entropie est au contraire maximum, et ne dépend que de la largeur de l'intervalle de variation de la variable aléatoire.

Dans l'ensemble des fonctions densité de probabilité solutions du système des contraintes initiales, le formalisme de l'entropie maximum suggère alors de choisir celle dont l'entropie est maximum, et de la considérer comme étant la plus adaptée au problème posé. Il en résulte un système de contraintes mathématiques que la fonction densité de probabilité recherchée doit respecter.

Il est intéressant de voir que ce formalisme ne nécessite pas l'introduction de contraintes physiques pour son élaboration. En fait, les contraintes physiques sont imposées par le chercheur, qui élabore l'écriture des contraintes mathématiques à partir de lois physiques. Ces lois peuvent être des lois de conservations de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie cinétique, ou de l'énergie de surface. Mais elles peuvent aussi traduire des contraintes *ad-hoc* telles que la contrainte de partition proposée par Sellens [10], dont la fonction est d'imposer à la fonction densité de probabilité de décroître vers zéro quand le diamètre tend vers zéro. Il est démontré que ces contraintes sont équivalentes aux diamètres moyens qui leur sont associés, respectivement D_{30} , D_{20} , D_{-10} pour la conservation de la masse, la conservation de l'énergie de surface, et la contrainte de partition.

Cependant, le formalisme montre une très grande sensibilité dans ses résultats à la forme de l'écriture mathématique utilisée pour exprimer ces contraintes. La forme mathématique de la solution obtenue par le formalisme de l'entropie maximum est dictée par la forme mathématique des contraintes.

Il faut savoir que la maximalisation de l'entropie de Shannon, liée à une contrainte associée à un diamètre moyen, aboutie à une distribution numérique dont le maximum est situé au diamètre nul. Ce qui est *a priori* physiquement absurde. Mais en s'éloignant du diamètre strictement nul, ce résultat signifie aussi que les plus petites gouttes sont aussi

les plus nombreuses. Et aucune étude expérimentale ne permet vraiment de confirmer ou d'infirmer cette surprenante affirmation du formalisme. C'est à cause de ce résultat que Sellens a introduit la contrainte de partition vue précédemment.

De manière à disposer d'une méthode purement calculatoire permettant la prédiction de distributions en tailles, Cousin *et al.* [11, 12, 13] ont proposé une méthode basée sur la théorie linéaire et le formalisme de l'entropie maximum. Cette procédure a été développée avec succès dans le cas d'injecteurs à composante rotative. Cette étude a permis aussi de montrer que si l'entropie de Shannon semble adaptée pour la détermination de distributions numériques, il est plus approprié d'utiliser l'entropie de Bayes pour l'estimation de distributions volumiques. Enfin, la nature de l'information disponible impose le choix de la distribution à calculer. En effet, si un diamètre moyen connu (théorique ou mesuré) est représentatif des populations de petites gouttes, il est probable que la prédiction de la distribution numérique soit de meilleure qualité. En revanche, quand l'information connue est relative aux grosses particules, c'est la distribution volumique qu'il est préférable de chercher à déterminer puisque la représentativité des petites gouttes pour le volume de liquide est nécessairement faible.

Bibliography

- [1] A. H. Lefebvre. *Atomization and Sprays*. Hemisphere Publishing Corporation, 1989.
- [2] S. Nukiyama and Y. Tanasawa. *Experiments on the atomization of liquids in air stream, Report 3*, volume **5**, chapter On the droplet size distribution in an atomized jet, pages 62–67. 1939.
- [3] P. Rosin and E. Rammler. The laws governing the fineness of powdered coal. *J. Inst. Fuel*, **7**(31):29–36, 1933.
- [4] N. K. Rizk and A. H. Lefebvre. Drop-size distribution characteristics of spill-return atomizers. *AIAA J. Propul. Power*, **1**(3):16–22, 1985.
- [5] R. Mugele and H. D. Evans. Droplet size distribution in sprays. *Ind. Eng. Chem.*, **43**(6):1317–1324, 1951.
- [6] Lord Rayleigh. On the instability of jets. *Proc. London Math. Soc.*, **10**:4–13, 1878.
- [7] J. Plateau. Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. *Cité par Lord Rayleigh, Theory of sound*, **2**:363, 1945.
- [8] Lord Rayleigh. *Theory of sound*, volume **2**. Dover, New York (1945), 1896.
- [9] C.E. Shannon and W. Weaver. *The mathematical theory of communication*. University of Illinois, Press. Urbana, 1949.
- [10] R. W. Sellens. Prediction of the drop size and velocity distributions in a spray based on the maximum entropy principle. *Part. Part. Syst. Charact.*, **9**:195, 1989.
- [11] M. Ledoux, C. Dumouchel, and J. Cousin. Prediction of drops sizes in a spray produced by an injector. *3rd Report - Contrat JOU2/CORIA*, Décembre 1994.
- [12] J. Cousin, S. J. Yoon, C. Dumouchel, and M. Ledoux. Theoretical determination of the characteristics of sprays produced by swirl atomizers. *ILASS-Europe Nürnberg*, 1995.
- [13] J. Cousin, S. J. Yoon, and C. Dumouchel. Coupling of classical linear theory and maximum entropy formalism for prediction of drop size in sprays. application to pressure swirl atomizer. *Atomization and Sprays*, **6**(5), 1996.

Appendix B

Simulations optiques: liste des instructions MAPLE

Pour effectuer les calculs en détails, le moyen le plus simple est de suivre le déroulement des instructions suivantes lors de leur exécution sous le logiciel de calcul symbolique MAPLE.

B.1 Première réfraction

Les calculs pour la première réfraction sont les premiers calculs effectués ainsi. Les grandes lignes décrites section 2.3.2 sont facilement reconnaissables.

Les vecteurs \mathbf{Norm}_1 , \mathbf{Inc} , et \mathbf{P} sont définis:

```
Norm1:=vector([X1,Y1,Z1]);  
Inc:=vector([x,y,z]);  
P:=vector([Px,Py,Pz]);  
x:=-1; y:=0; z:=0;
```

L'angle de la rotation et la matrice rotation sont définis:

```
A:=arctan(Z1/Y1);  
M1:=matrix(3,3,[1,0,0,0,cos(A),sin(A),0,-sin(A),cos(A)]);
```

Les vecteurs \mathbf{Norm}_1 , \mathbf{Inc} , et \mathbf{P} subissent la rotation. Ces vecteurs sont transformés par multiplication avec la matrice rotation:

```
Norm1:=multiply(M1,Norm1);  
Inc:=multiply(M1,Inc);  
P:=multiply(M1,P);
```

Les angles d'incidence et de réfraction, respectivement i et i' ¹, sont calculés. i est donné par le calcul du produit scalaire entre \mathbf{Inc} et \mathbf{Norm}_1 . Comme seule la composante en x de \mathbf{Inc} est non nulle après rotation, le produit scalaire se résume au produit des composantes en x . i' est déduit de i .

¹Le symbol $[\]$ n'est pas utilisable sous MAPLE. Il est remplacé par un $[p]$. Par exemple, i' devient ip .

```
i:=arccos(Inc[1]*Norm1[1]);
ip:=arcsin((sin(i))/m);
Di:= i-ip;
```

Les coordonnées cartésiennes du vecteur $\mathbf{R}_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$ donnant la direction de réfraction sont calculées. Et le vecteur \mathbf{R}_1 défini.

```
zp1:=0;xp1:=-cos(Di);yp1:=sin(Di);
R1:=vector([xp1,yp1,zp1]);
```

Les coefficients de réflexion sont calculés:

```
r1:=(sin(ip-i))/(sin(i+ip));
r2:=(tan(i-ip))/(tan(i+ip));
```

Les coefficients de réfraction s'en déduisent immédiatement. Les coordonnées des vecteurs polarisation \mathbf{Pn} et \mathbf{Pp} sont écrites à partir de celle du vecteur polarisation original \mathbf{P} . Les coefficients de réfraction y sont directement appliqués.

```
Pnz:=P[3]*(1-r1);Pnx:=0;Pny:=0;
PN:=vector([Pnx,Pny,Pnz]);
Ppx:=P[1]*(1-r2);Ppy:=P[2]*(1-r2);Ppz:=0;
PP:=vector([Ppx,Ppy,Ppz]);
```

La matrice de rotation est inversée pour effectuer la rotation inverse d'angle $(-A)$:

```
M1inv:=inverse(M1);
```

Les vecteurs sont tournés par cette rotation inverse pour revenir dans le repère initial:

```
Inc:=multiply(M1inv,Inc);
Norm1:=multiply(M1inv,Norm1);
PN:=multiply(M1inv,PN);
PP:=multiply(M1inv,PP);
R1:=multiply(M1inv,R1);
```

Nous vérifions que les vecteurs \mathbf{Norm}_1 et \mathbf{Inc} retrouvent leurs coordonnées initiales.

Les commandes suivantes permettent de générer directement les expressions en langage C.

```
readlib(C);
C(R1,optimized);
C(PN,optimized);
C(PP,optimized);
```

B.2 Seconde réfraction

Les grandes lignes de calcul sont données section 2.3.2. Le détail, exécuté sous MAPLE, est donné ci-dessous.

Nous reprenons les calculs après la première réfraction. La deuxième intersection a été trouvée (cd. Module 6, section 2.3.2), et la normale en ce point donnée par le Module 7 (cf. 2.3.2).

Les vecteurs \mathbf{R}_1 , \mathbf{Norm}_2 , \mathbf{Pn} et \mathbf{Pp} sont définis:

```
with(linalg);
R1:=vector([xp1,yp1,zp1]);
Norm2:=vector([X2,Y2,Z2]);
Rho:=sqrt(X2^2+Y2^2+Z2^2);
PN:=vector([Pnx,Pny,Pnz]);
PP:=vector([Ppx,Ppy,Ppz]);
```

où `with(linalg);` sert à charger la bibliothèque MAPLE d'algèbre linéaire; les objets de types vecteurs et matrice sont alors définissables.

Le vecteurs \mathbf{Norm}_2 est défini en coordonnées sphériques:

```
Norm2sph:=( [1,arctan(Y2/X2), arccos(Z2/Rho)] );
```

Les angles de rotations sont définis:

```
theta:=Norm2sph[2];
phi:=Norm2sph[3];
```

Les matrices rotation sont écrites:

```
Mr1:=matrix(3,3,[-cos(theta),-sin(theta),0,sin(theta),-cos(theta),0,0,0,1]);
Mr2:=matrix(3,3,[sin(phi),0,-cos(phi),0,1,0,cos(phi),0,sin(phi)]);
Mr:=multiply(Mr2,Mr1);
```

La matrice \mathbf{Mr} compose les deux premières rotations \mathbf{Mr}_1 , et \mathbf{Mr}_2 .

Les produits vecteurs-matrice sont effectués: les vecteurs sont tournés.

```
Norm2:=multiply(Mr, Norm2);
R1:=multiply(Mr, R1);
PN:=multiply(Mr, PN);
PP:=multiply(Mr, PP);
```

L'angle de la troisième rotation est défini:

```
alpha:=arctan(R1[3]/R1[2]);
```

Elle est écrite:

```
Mr3:=matrix(3,3,[1,0,0,0,cos(alpha),sin(alpha),0,-sin(alpha),cos(alpha)]);
```

Nous appliquons cette rotation au vecteur \mathbf{R}_1 , et comme l'expression de la composante en y de ce vecteur devient lourde, nous la simplifions ².

```
R1:=multiply(Mr3, R1);
R1[2]:=simplify(R1[2]);
```

La rotation est appliquée aux autres vecteurs:

```
Norm2:=multiply(Mr3, Norm2);
PN:=multiply(Mr3, PN);
PP:=multiply(Mr3, PP);
```

Les simplifications sont faites:

```
Norm2[1]:=simplify(Norm2[1]);
Norm2[2]:=simplify(Norm2[2]);
Norm2[3]:=simplify(Norm2[3]);
PN[1]:=simplify(PN[1]);
PN[2]:=simplify(PN[2]);
PN[3]:=simplify(PN[3]);
PP[1]:=simplify(PP[1]);
PP[2]:=simplify(PP[2]);
PP[3]:=simplify(PP[3]);
```

Le calcul de l'angle d'incidence est effectué en calculant l'angle que font entre eux les vecteurs \mathbf{R}_1 et $\mathbf{InvNorm}_2$, l'opposé du vecteur \mathbf{Norm}_2 . Nous utilisons pour cela le produit scalaire de ces deux vecteurs qui se ramènent dans ce cas au produit des composantes en x . En effet, comme les rotations amènent \mathbf{Norm}_2 sur l'axe des (x) , les composantes en y et z de \mathbf{Norm}_2 , et par suite, celle de $\mathbf{InvNorm}_2$, sont nulles.

```
InvNorm2:=vector([-Norm2[1], -Norm2[2], -Norm2[3]]);
Ii:=arccos(InvNorm2[1]*R1[1]);
```

L'angle de réfraction est calculé. La direction de réfraction, donnée par \mathbf{R}_2 est déduite.

```
Iip:=arcsin(m*sin(Ii));
R1_2:=R1[2];
R2:=vector([cos(Iip), -SIGN*sin(Iip), 0]);
```

\mathbf{SIGN} est une variable supplémentaire. Elle ne donne qu'un signe, et permet de lever l'indétermination sur le demi-espace de réfraction. Le calcul du \mathbf{SIGN} est réalisé dans la programmation de la simulation. C'est le signe de la deuxième composante de \mathbf{R}_1 dans ce repère où la normale \mathbf{Norm}_2 est sur l'axe (x) , et \mathbf{R}_1 dans le plan (x, y) . Il est facile de voir dans ce repère que la réfraction est effectuée dans le demi-espace des y opposé à celui occupé par \mathbf{R}_1 (cf. schéma B.2). L'expression de la composante en y de \mathbf{R}_1 est donc gardée dans la variable $R1_2$.

Les coefficients de réflexion sont calculés:

²Il est à noter que les simplifications ont été menées globalement afin d'obtenir la combinaison de calculs-simplification la meilleure. Les expressions obtenues sont donc les plus simples.

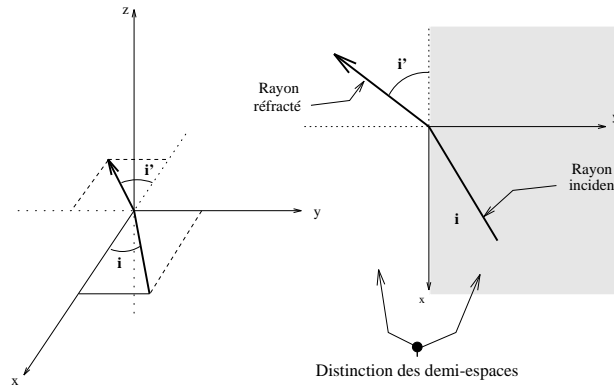


Figure B.1: Schéma de la réfraction après rotations.

```
Ir1:=(sin(Iip-Ii))/(sin(Ii+Iip));
Ir2:=(tan(Ii-Iip))/(tan(Ii+Iip));
```

Comme lors de la première réfraction, les vecteurs \mathbf{Pnn} , \mathbf{Pnp} , \mathbf{Ppn} et \mathbf{Ppp} sont déduits:

```
PNN:=vector([0,0, PN[3]*(1-Ir1)])
PNP:=vector([PN[1]*(1-Ir2), PN[2]*(1-Ir2), 0]);
PPN:=vector([0,0, PP[3]*(1-Ir1)];
PPP:=vector([PP[1]*(1-Ir2), PP[2]*(1-Ir2), 0]);
```

MMM est la matrice rotation composant les trois rotations effectuées précédemment. L'inverse est calculée.

```
MMM:=multiply(Mr3,Mr);
MMMinv:=inverse(MMM);
```

Cette rotation ramène les vecteurs dans le repère initial:

```
Norm2:=multiply(MMMinv, Norm2);
R2:=multiply(MMMinv, R2);
```

Il est inutile d'opérer la rotation des vecteurs \mathbf{Pnn} , \mathbf{Pnp} , \mathbf{Ppn} et \mathbf{Ppp} qui compliquerait inutilement les expressions de ceux-ci. En effet seul leur amplitude nous intéresse pour le calcul de l'intensité diffusée. \mathbf{R}_2 , donnant la direction de diffusion est rétabli dans le repère initial. Le calcul de la rotation de \mathbf{Norm}_2 nous permet de vérifier nos calculs en obtenant les coordonnées initiales dans le repère de départ. Nous obtenons effectivement

```
> Norm2:=multiply(MMMinv, Norm2);
      Norm2 := [ X2, Y2, Z2 ]
```

Les coordonnées du vecteur \mathbf{R}_2 sont simplifiées:

```
R2[1]:=simplify(R2[1]);
R2[2]:=simplify(R2[2]);
R2[3]:=simplify(R2[3]);
```

La bibliothèque permettant à MAPLE de générer des calculs sous forme de langage C est chargée. Les calculs en langage C sont générés.

```
readlib(C);  
C(R2,optimized);
```

L'intensité diffusée est calculée:

```
int1:=PNP[1]^2;int2:=PNP[2]^2;int3:=PNP[3]^2;  
int4:=PPP[1]^2;int5:=PPP[2]^2;int6:=PPP[3]^2;  
int7:=PNN[1]^2;int8:=PNN[2]^2;int9:=PNN[3]^2;  
int10:=PPN[1]^2;int11:=PPN[2]^2;int12:=PPN[3]^2;  
Intensite:=int1+int2+int3+int4+int5+int6+int7+int8+int9+int10+int11+int12;
```

L'expression de l'intensité est transcrite en langage C:

```
C(Intensite,optimized);
```

L'expression permettant le calcul du SIGN est transcrite au langage C:

```
C(R1_2,optimized);
```

Après plusieurs essais de combinaisons de calculs et simplifications, nous pouvons dire que les expressions obtenues ici sont les plus simples. Ces résultats sont directement implémentés dans le code de simulation.

Appendix C

Séries temporelles du jet excité: mesures par diffusion et ombroscopie

Séries temporelles jet excité – DIFFUSION

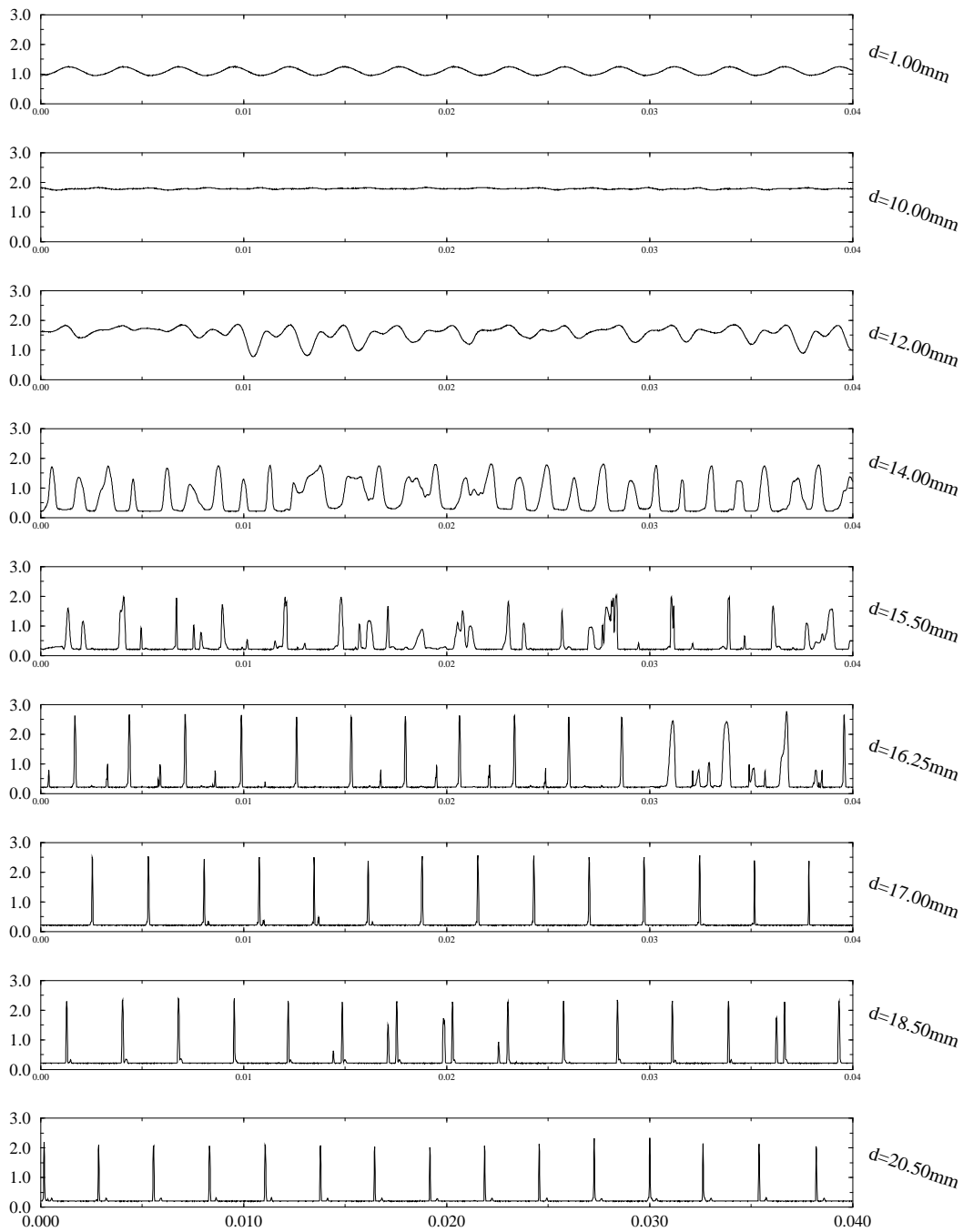


Figure C.1: Séries temporelles enregistrées dans le cas d'un jet excité pour quelques positions le long de l'axe du jet: mesures par diffusion.

Séries temporelles jet excité – OMBROSCOPIE

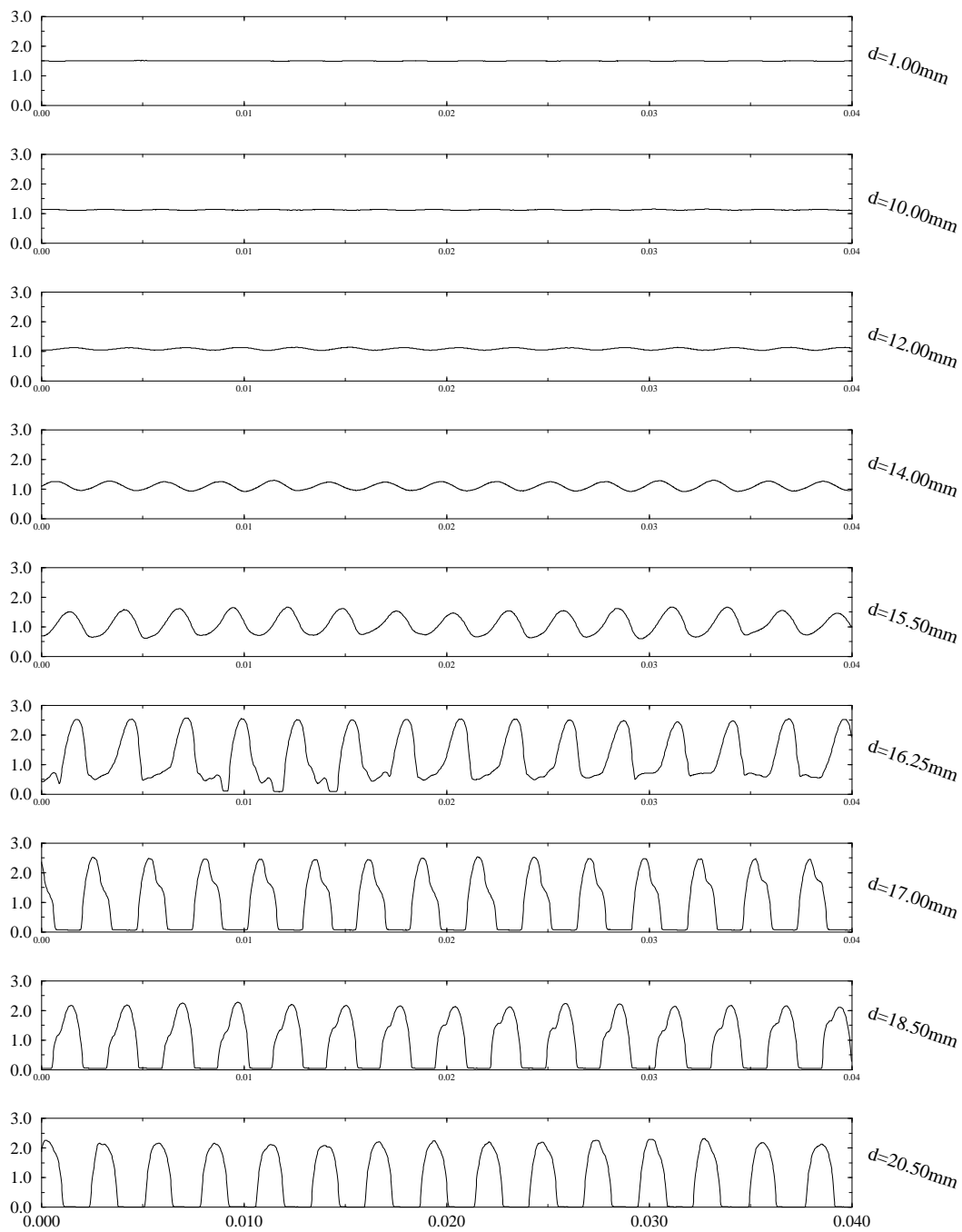
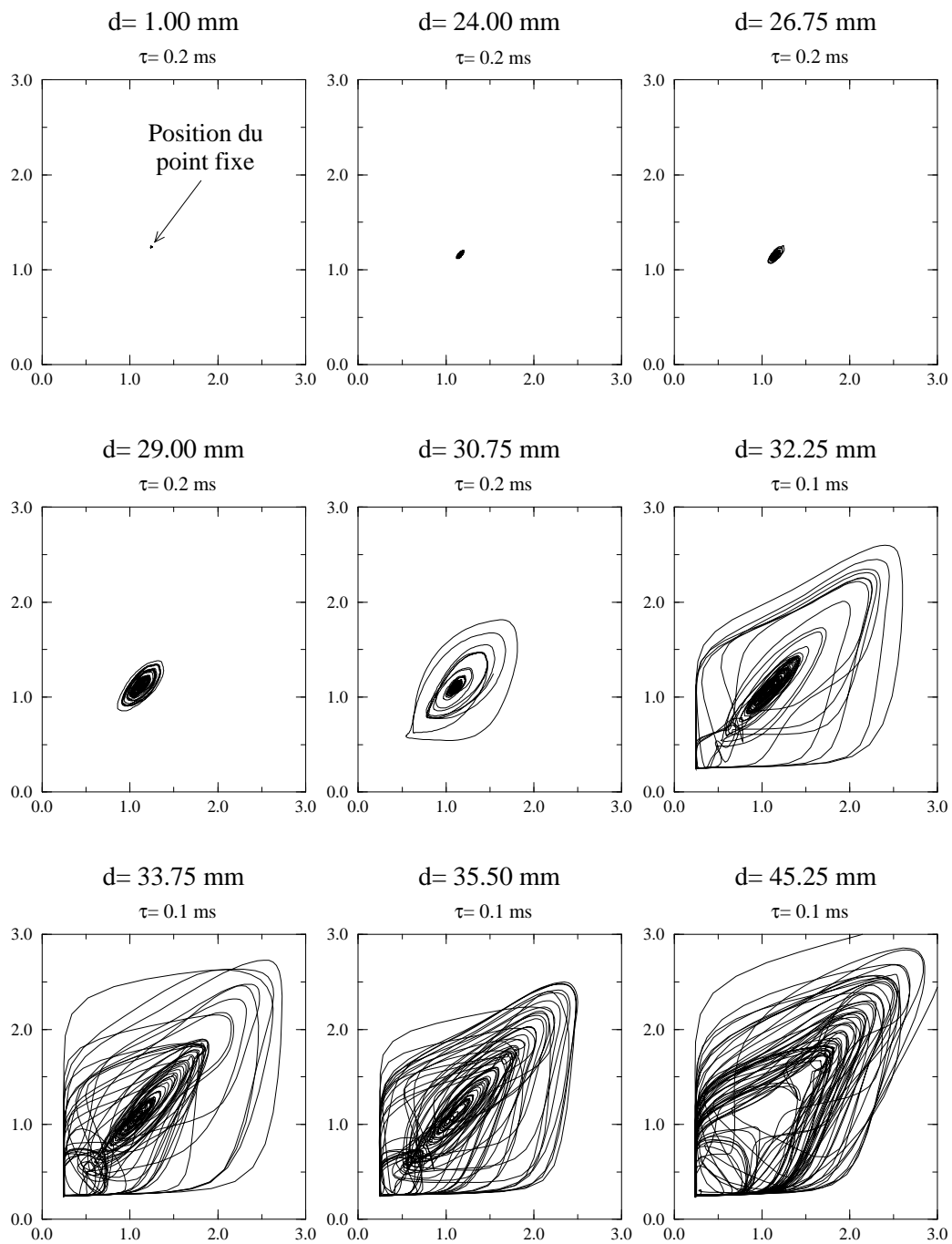
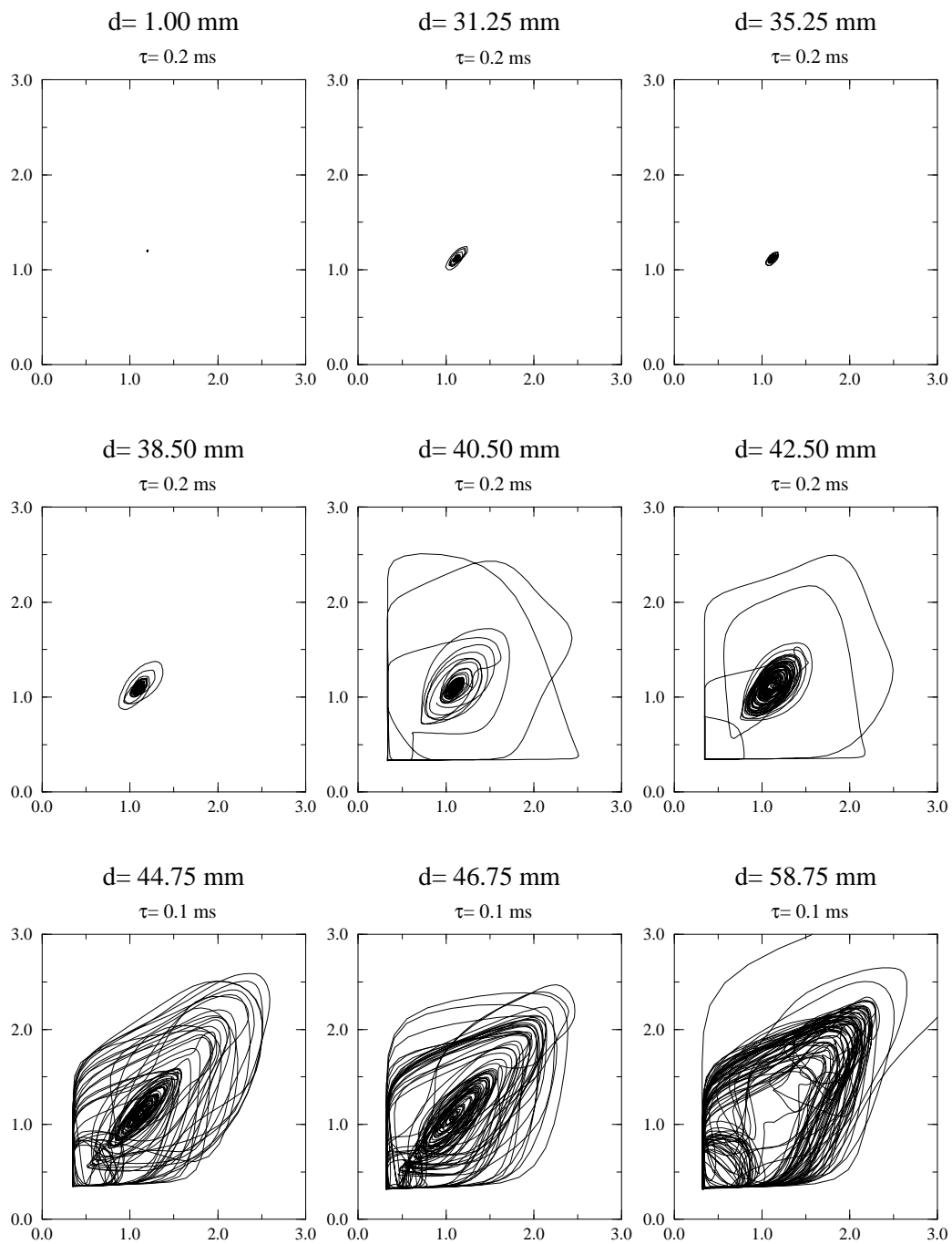


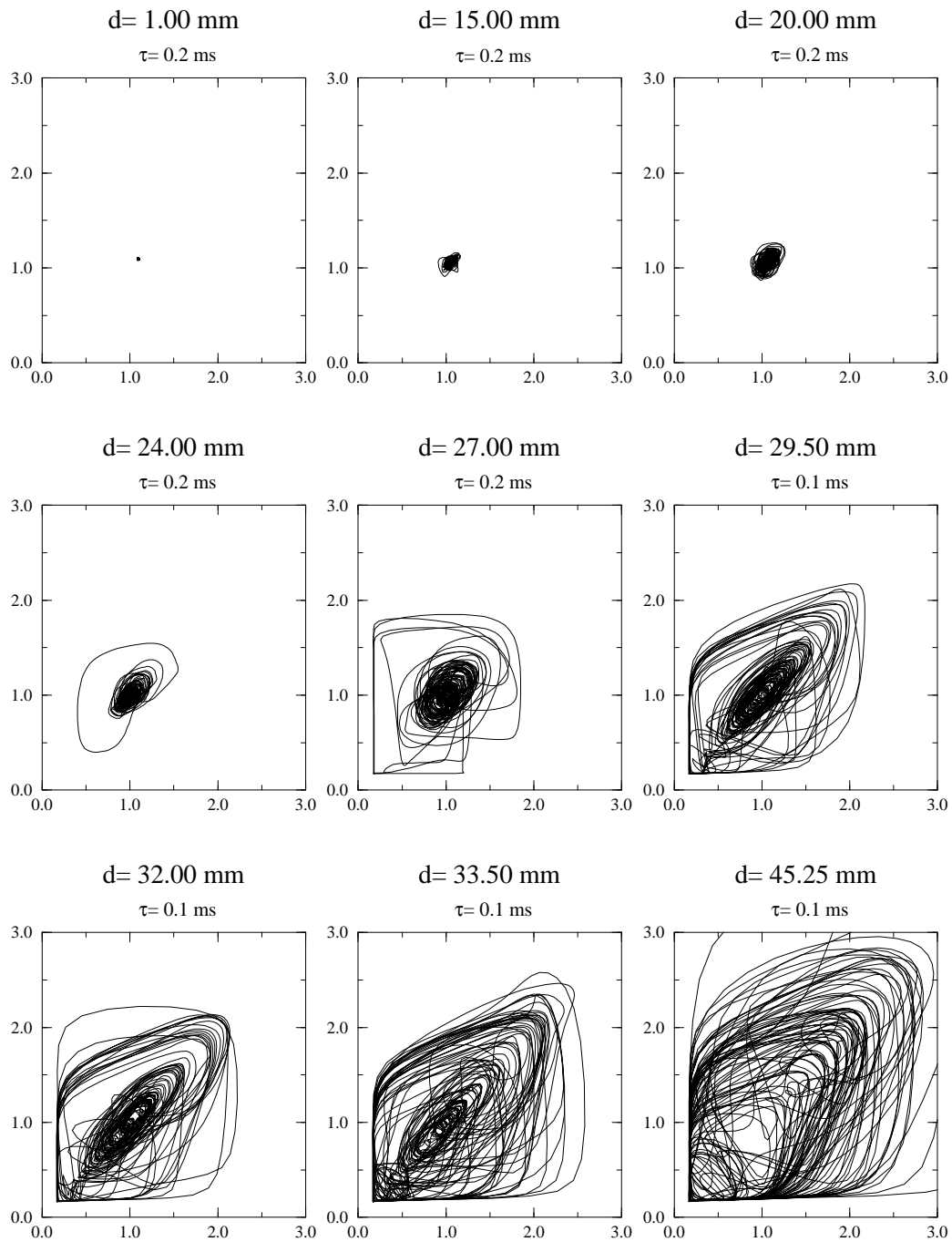
Figure C.2: Séries temporelles enregistrées dans le cas d'un jet excité pour quelques positions le long de l'axe du jet: mesures par ombroscopie.

Appendix D

Evolution des portraits de phase pour les jets libres

Figure D.1: $E_{au} - V = 1.29m/s$

Figure D.2: $E_{au} - V = 1.66m/s$

Figure D.3: $E_{au} - V = 2.15m/s$

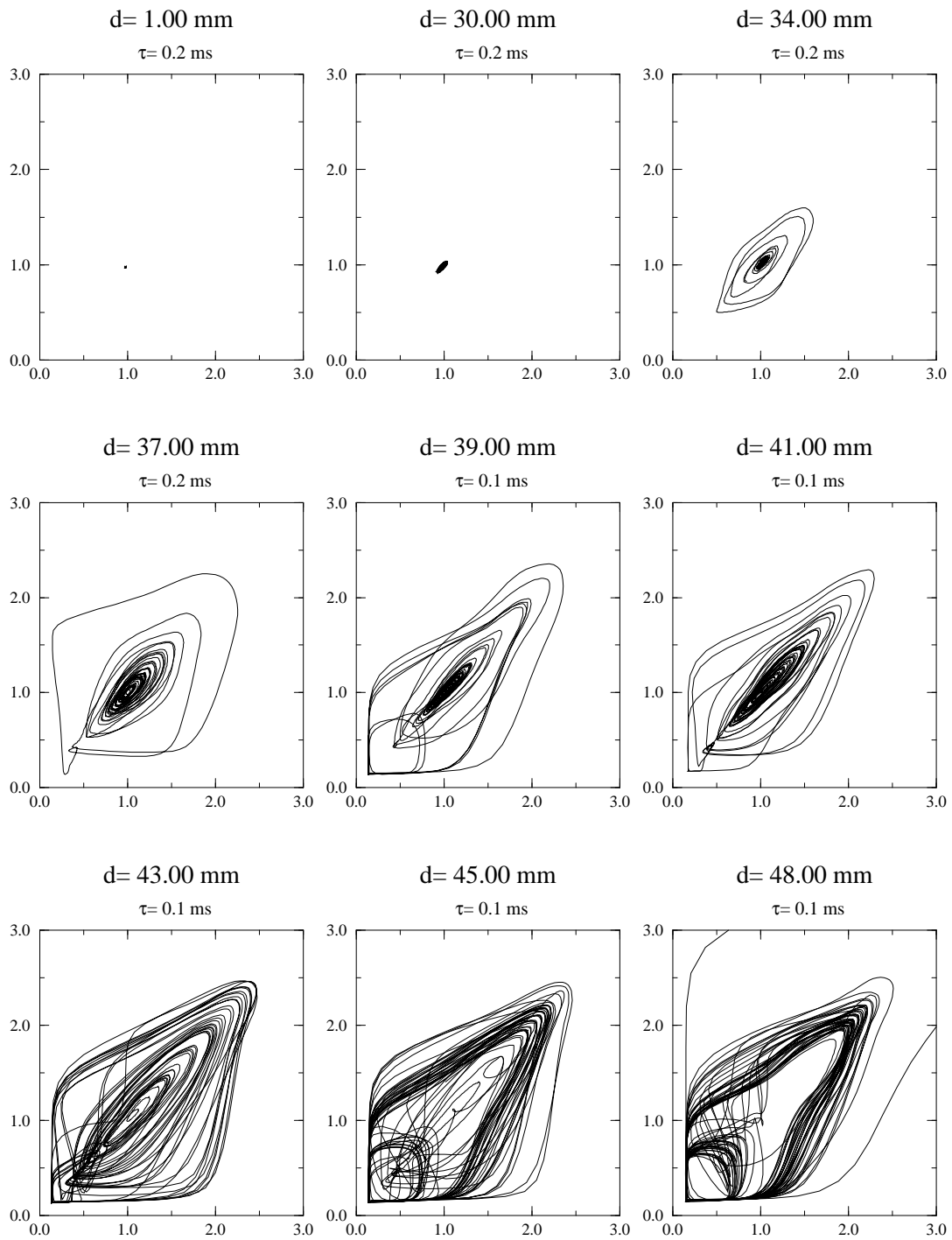
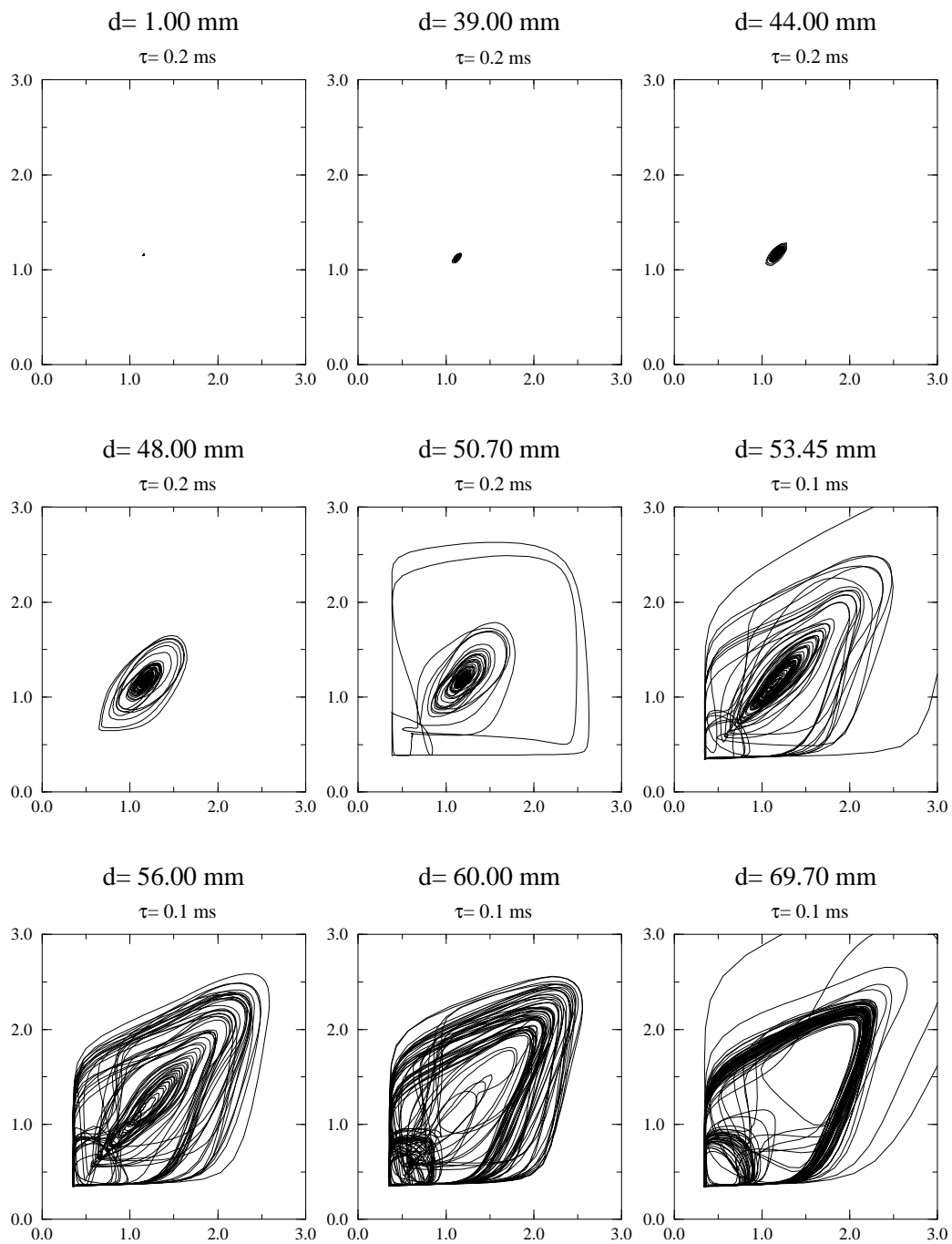
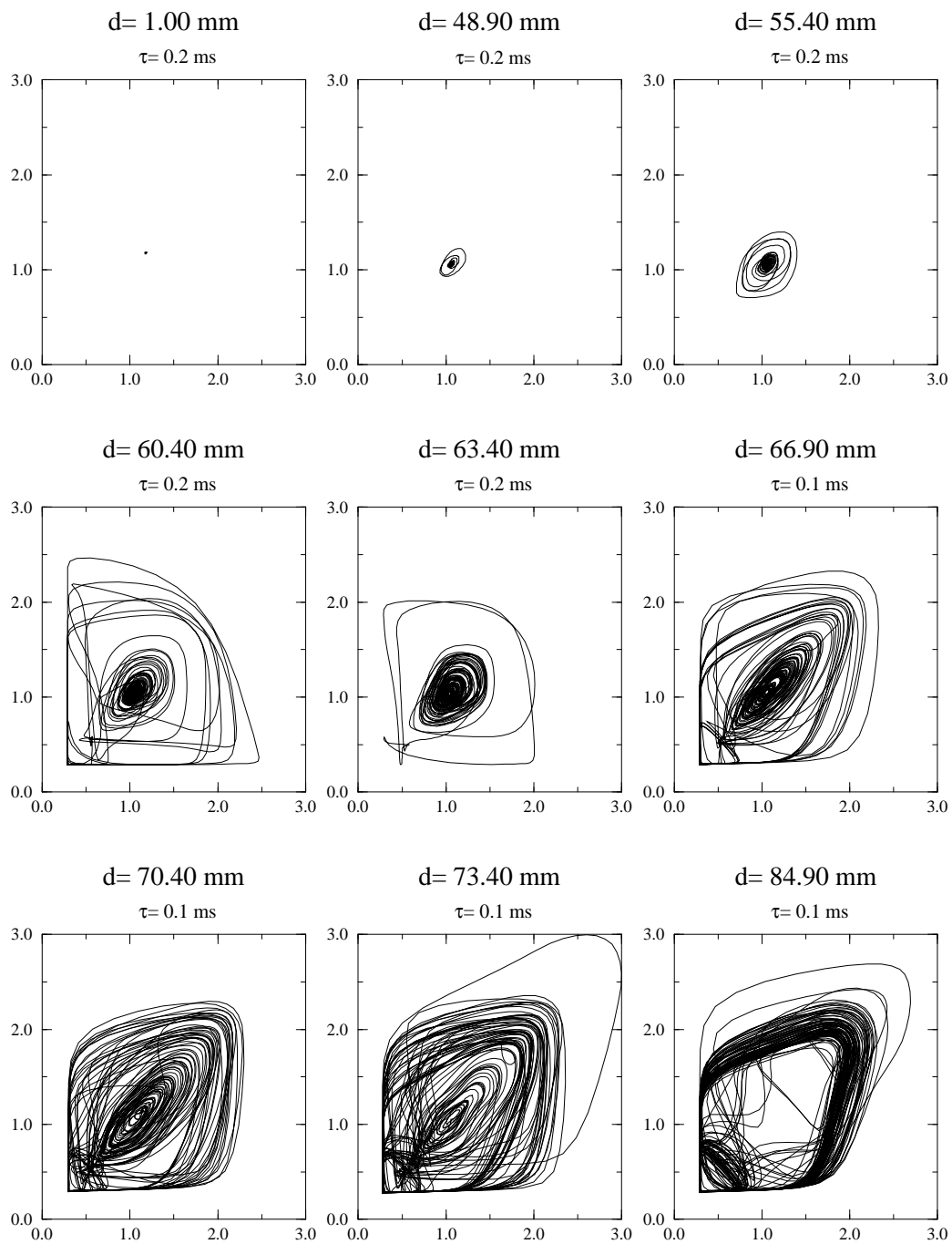


Figure D.4: *Eau/Glycérine* - $V = 1.28\text{m/s}$

Figure D.5: *Eau/Glycérine* - $V = 1.65 \text{ m/s}$

Figure D.6: *Eau/Glycérine* - $V = 2.15\text{m/s}$