Introduction à la circulation des fluides physiologiques

Christophe Letellier
Christophe.Letellier@coria.fr

Errata relevés au 26 janvier 2014

1 p. 5, paragraphe après la Fig. 1.1

Les forces de pression agissent donc perpendiculairement à la surface. La normale $\vec{n}$ oriente l'élément de surface de l'intérieur vers l'extérieur ; l'élément de force s'écrit alors

$$\mathrm{d}\vec{F} = +P\,\mathrm{d}S \cdot \vec{n} + \tau\,\mathrm{d}S \cdot \vec{\tau}\,,$$

où $\vec{\tau}$ est ici le vecteur directeur unitaire tangent à la surface S au point d'application de la force $\mathrm{d}\vec{F}$ et P la pression régnant à l'intérieur de la surface fermée.

2 p. 8, milieu de page

Il reste alors

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{g}\,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{S}_A} P \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s + \int_{\mathcal{S}_B} P \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}.$$

Puisque la pression ne dépend que de l'altitude z,

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{g}\,\mathrm{d}v = -P(z_A) \cdot S_A \cdot \hat{z} + P(z_B) \cdot S_B \cdot \hat{z}\,.$$

3 p. 12, dernière équation

$$h = \frac{P_{\mathrm{atm}}}{\rho_{\mathrm{Hg}} g} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{13\ 595,1 \times 9,8066} = 0,7598\ \mathrm{m}\,.$$

4 p. 15, après Fig. 2.7

Nous avons alors :

$$P_A + \rho g h = P_B \tag{1}$$

où P_A et P_B sont respectivement les pressions aux surfaces libres des branches de gauche et de droite. La pression au point B est égale à

$$P_B = P_{\mathrm{atm}} + \frac{4m_2 g}{\pi d^2}$$

et celle au niveau du point A de la surface libre de la branche de gauche à

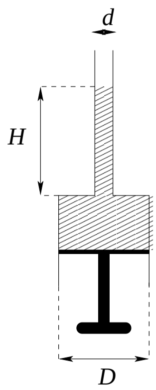
$$P_A = P_{\mathrm{atm}} + \frac{4m_1 g}{\pi D^2}\,,$$

ce qui conduit, une fois ces deux expressions injectées dans la relation (1), à

$$P_{\mathrm{atm}} + \frac{4m_1 g}{\pi D^2} + \rho g h = P_{\mathrm{atm}} + \frac{4m_2 g}{\pi d^2}\,.$$

5 Variations sur une seringue (p. 94)

Une seringue, constituée par un cylindre de diamètre $D = 3$ cm prolongée par une aiguille de longueur $l = 10$ cm et de diamètre $d = 3$ mm, a une masse $m = 65$ g. Elle contient de l'eau de masse volumique $\rho = 1000$ kg.m^{-3} et de viscosité $\mu = 10^{-3}$ Pa.s. Elle repose sur le sol par l'intermédiaire du poussoir. Les frottements piston-chemise seront négligées (sans que cela soit justifié).



1°) Après avoir déterminer la pression exercée par le poids de la seringue à la base de l'aiguille, déterminez la hauteur H d'eau dans l'aiguille.

La pression P_s exercée par la seringue sur l'eau à la base de l'aiguille est égale au poids de la seringue — mg — divisé par la surface de contact entre le corps de la seringue et l'eau, soit $\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}$. Ainsi, la pression exercée P_s est égale à

$$P_s = \frac{4mg}{\pi(D^2 - d^2)} .$$

En prenant une isobare passant par la base de l'aiguille, nous pouvons écrire l'égalité de la pression au sein de l'eau en deux points de cette isobare, c'est-à-dire, par exemple, l'égalité entre un point situé au niveau du corps de la seringue et un point situé sur l'axe de l'aiguille. Nous avons alors

$$P_{\text{atm}} + P_s = P_{\text{atm}} + \rho g H .$$

En effet, le membre de gauche correspond à la pression exercée par le corps de la seringue sur le fluide à laquelle s'ajoute la pression atmosphérique s'exerçant sur le corps de la seringue et, par conséquent, sur le fluide. Le membre de droite correspond à un point placé sur l'axe de l'aiguille : la pression est alors donnée par la pression atmosphérique à laquelle s'ajoute celle exercée par la colonne d'eau (de hauteur H) dans l'aiguille. A partir de cette relation, nous obtenons alors

$$\frac{4mg}{\pi(D^2 - d^2)} = \rho g H ,$$

soit

$$H = \frac{4m}{\rho\pi(D^2 - d^2)} = 9,29 \text{ cm}$$

Ce résultat peut se retrouver en utilisant le principe d'Archimède selon lequel la masse du volume d'eau déplacé est égale à la masse du corps flottant, c'est-à-dire

$$m = \rho H \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) .$$

Il est à noter qu'il n'est pas évident de penser que le volume d'eau déplacé est égal à ce volume.

2°) On exerce une poussée F verticale de 0.1 N sur le piston de la seringue, ce qui se traduit par une force supplémentaire sur le fluide. Négligeant les pertes de pression dues à la viscosité de l'eau, déterminez le débit de l'écoulement lorsque l'extrémité de l'aiguille est à l'air libre.

La pression supplémentaire sur le fluide est donnée par

$$P_F = \frac{4F}{\pi D^2}$$

puisque le fluide s'exerce sur l'ensemble du piston de section $\frac{\pi D^2}{4}$. La conservation de l'énergie volumique entre un point situé très légèrement en dessous de la base de l'aiguille et un point situé à l'extrémité de l'aiguille s'écrit

$$P_{\text{atm}} + P_s + P_F + + \frac{1}{2}\rho V_b^2 = P_{\text{atm}} + \rho g l + \frac{1}{2}\rho V_a^2 \tag{2}$$

où l'origine des altitudes est prise au niveau de l'isobare située très légèrement en dessous de la base de l'aiguille : le terme d'énergie potentielle volumique est donc nulle pour le point situé à la base de l'aiguille et $\rho g l$ pour le point situé à l'extrémité de l'aiguille. La conservation du débit s'écrit

$$\frac{\pi}{4}D^2 V_b = \frac{\pi}{4}d^2 V_a \quad \Leftrightarrow \quad V_b = \frac{d^2}{D^2}V_a \text{ , soit } \quad V_b = \frac{V_a}{100} \ll V_a \, .$$

Le terme $\frac{1}{2}\rho V_b^2$ est donc négligeable (10000 fois plus petit) devant le terme $\frac{1}{2}\rho V_a^2$. La pression exercée par la colonne d'eau sur le piston s'annule avec l'énergie potentielle volumique au niveau de l'extrémité de l'aiguille, et les deux termes de pression atmosphérique se compensent. La conservation de l'énergie volumique (2) se ramène donc à

$$\frac{4F}{\pi D^2} + \frac{4mg}{\pi(D^2 - d^2)} = \rho g l + \frac{1}{2}\rho V_a^2 \, ,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} V_a &= \sqrt{\frac{2}{\rho}\left[\frac{4F}{\pi D^2} + \frac{4mg}{\pi(D^2 - d^2)} - \rho g l\right]} \\ &= \sqrt{\frac{2}{1000}\left[\frac{4 \times 0,1}{\pi \times 0,03^2} + \frac{4 \times 0.065 \times 9,81}{\pi \times (9 \cdot 10^{-4} - 9 \cdot 10^{-6})} - 1000 \times 9,81 \times 0,1\right]} \\ &= 0,38 \text{ m.s}^{-1} \, . \end{aligned}$$

Le débit est donc égal à

$$Q_v = \frac{\pi}{4}d^2 V_a \, ,$$

soit

$$Q_v = \frac{\pi}{4} \times 0.003^2 \times 0,38 = 2,68 \cdot 10^{-6}\text{m}^3.\text{s}^{-1} = 2,68\text{cm}^3.\text{s}^{-1} \, .$$

3°) Refaites le calcul en tenant compte de la perte de pression ΔP au sein de l'aiguille.

La perte de pression au sein de l'aiguille est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{128\mu l}{\pi d^4}\frac{\pi d^2}{4}V_a \, , \\ &= \frac{32\mu l}{d^2}V_a \, . \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie volumique (2) se réécrit alors comme

$$P_{\text{atm}} + \frac{4F}{\pi D^2} + \frac{4mg}{\pi(D^2 - d^2)} \underbrace{+ \frac{1}{2}\rho V_b^2}_{\text{négligeable}} = P_{\text{atm}} + \rho g l + \frac{1}{2}\rho V_a^2 + \frac{32\mu l}{d^2}V_a \, ,$$

ce qui, après simplification, se réduit à

$$+\frac{4F}{\pi D^2} + \frac{4mg}{\pi(D^2 - d^2)} = +\frac{1}{2}\rho V_a^2 + \rho g l + \frac{32\mu l}{d^2}V_a \, .$$

Cette équation se ramène finalement à une équation du second degré en V_a, soit

$$\underbrace{}_{1=a} V_a^2 + \underbrace{\frac{64\mu l}{\rho d^2}}_{=b} V_a \underbrace{- \frac{2}{\rho}\left[\frac{4F}{\pi D^2} + \frac{4mg}{\pi(D^2 - d^2)} - \rho g l\right]}_{=c} = 0$$

dont les coefficients valent

- $a = 1$;
- $b = 0,7111$ et
- $c = 0,143$.

Les solutions à l'équation du second degré sont donc

$$V_a = \frac{-0,711 \pm \sqrt{0,711^2 + 4 \times 0,143}}{2} \, .$$

Seule la solution positive convient, soit $V_a = 0,164$ m.s^{-1}. Le débit est alors de $Q_v = 1,16$ cm^3.s^{-1}.

6 Sténose aortique

Question 1 (p. 100) : lire ≪ or la vitesse du sang peut s'exprimer en fonction du débit, soit

$$V = \frac{4Q}{\pi d_a^2} \text{ ≫}$$

Question 7 (p. 102) : lire $1,17 \cdot 10^{-13}$.

7 Description fractale des voies pulmonaires

Question 6 (p. 112) : lire ≪ le nombre de bronchioles est égal à $2^{16} = 65536$. ≫
Question 7 (p. 113) : lire

$$R_{\text{tot}} = n\frac{128\mu L}{\pi d_0^4}\,.$$

Nous obtenons ainsi la résistance totale

$$R_{\text{tot}} = \frac{16 \times 2 \cdot 10^{-5} \times 0,1}{\pi \times (18 \cdot 10^{-3})^4} = 12420 \text{ Pa.s.m}^{-3}.$$

8 Assistance ventilatoire non invasive

Question 3 (p. 118) : lire ≪ Puisque le régime est turbulent, il est donc nécessaire d'utiliser la loi de Blasius :

$$\Delta P = \frac{1,264}{\sqrt[4]{\text{Re}}}\frac{VL}{\pi D^3}Q_v\,.$$

Donnez maintenant la pression relative P'_S en sortie du tuyau.

La loi de Blasius conduit à

$$\begin{aligned} P'_S &= P_V - \frac{1,264}{\sqrt[4]{\text{Re}}}\frac{VL}{\pi D^3}Q_v \\ &= P_V - \frac{1,264}{\sqrt[4]{\text{Re}}}\frac{4L}{\pi^2 D^5}Q_v^2 \\ &= 20 \cdot 10^2 - \frac{1,264}{\sqrt[4]{4730}}\frac{4 \times 1,8}{\pi^2\left(1,7 \cdot 10^{-2}\right)^5}10^{-6} \\ &= 19,22 \text{ mbar} \end{aligned}$$

≫

Question 4 (p. 118) : lire ≪ La résistance du tuyau s'exprime comme $\Delta P = R_{\text{tuyau}}Q_v$, soit, d'après la loi de Blasius :

$$\begin{aligned} R_{\text{tuyau}} &= \frac{1,264}{\sqrt[4]{\text{Re}}}\frac{VL}{\pi D^3} \\ &= \frac{1,264}{\sqrt[4]{\text{Re}}}\frac{4L}{\pi^2 D^5}Q_v \\ &= \frac{1,264}{\sqrt[4]{4730}}\frac{4 \times 1,8}{\pi^2\left(1,7 \cdot 10^{-2}\right)^5}10^{-3} \\ &= 78310 \text{ Pa.m}^{-3}\text{.s} \end{aligned}$$

≫
Question 5 (p. 118) : lire ≪ $= 20 \cdot 10^2 - (78310 + 10365 + 2330)10^{-3} = 19,09$ mbar. ≫
Question 6 (p. 119) : lire ≪

$$Q_{\text{fuite}} = \frac{P_{\text{masque}}}{R_{\text{fuite}}} = \frac{1909}{2386 \cdot 10^3} = 0.8 \text{ l.s}^{-1}\,.$$

≫