

ETUDE DE LA FRONTIERE DE STABILITE D'UN POINT DOUBLE STABLE D'UNE RECURRENCE
NON LINEAIRE AUTONOME DU DEUXIEME ORDRE

G. MIRA

Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales - Complexe Aérospatial
31 TOULOUSE - FRANCE

1 - INTRODUCTION

Le problème que nous nous proposons d'aborder dans cette communication est celui de la détermination de la frontière F du domaine de stabilité D d'un point double point d'équilibre stable, ou d'un ensemble limite attractif, relatif à une récurrence autonome du deuxième ordre à variables réelles de la forme:

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \quad n = \text{entier}$$

La relation (1) définit, encore, une transformation ponctuelle T qui fait passer, dans le plan (x_n, y_n) , un point $M_n(x_n, y_n)$ en $M_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$. Les itérés successifs de M_n par application de T , T^2 (T est appliquée deux fois) T^3 (T est appliquée trois fois)...etc, forment une suite de points dans le plan (x_n, y_n) . On cherche donc à déterminer le domaine des points initiaux $M_0(x_0, y_0)$ tel que tout point de (D) donne une suite de points qui converge vers un ensemble limite. Nous supposons pour l'étude présentée que T n'est pas dégénérée, que le jacobien de (1) ne s'annule pas identiquement. Nous nous limiterons, en outre, pour les exemples, aux cas où les fonctions réelles $f(x_n, y_n)$, $g(x_n, y_n)$ sont soit des polynômes en x_n, y_n , soit linéaires par morceaux mais continues.

Il faut noter qu'une équation telle que (1) peut décrire le comportement d'un système à Données Échantillonnées de type autonome (la variable discrète indépendante n n'intervenant pas explicitement en tant qu'argument de f et g). Le problème mathématique, défini ci-dessus, correspond alors au problème physique de la détermination du domaine des perturba-

tion (autour d'un état stationnaire fixé), sous forme de changement des conditions initiales, que peut encaisser le système à Données Échantillonnées, sans modification de son comportement qualitatif. On se trouve donc en présence d'un problème tout à fait semblable à celui que l'on rencontre à propos des systèmes dont le comportement est décrit par des équations différentielles. Remarquons, en outre, que l'équation (1) peut être considérée comme le résultat de la discrétisation, par la méthode d'Euler, d'une équation différentielle d'ordre deux.

Une résolution très partielle du problème posé consiste à utiliser des fonctions V de la deuxième méthode de Ljapunov, étendues à des équations du type (1)[1], qui, donnant une condition suffisante de stabilité, ne permettent d'obtenir qu'une partie de D . Nous avons une méthode indirecte ou, en général, la portion D , à l'intérieur de laquelle il est possible de conclure à la stabilité, n'augmente qu'avec la complexité de la fonction choisie.

Cependant une méthode directe, basée sur l'étude des propriétés de l'ensemble des points qui constituent (F) , et des autres singularités de l'équation (1), à distance finie ou infinie, permet bien souvent de résoudre le problème que nous avons énoncé. Ainsi vers 1920, Julia et Fatou [2][3] ont utilisé cette méthode dans le cas de récurrences du premier ordre à variable complexe

$$(1') \quad z_{n+1} = \varphi(z_n)$$

(φ étant une fonction rationnelle [2][3], ou transcendante [4]). Il faut noter à ce sujet que de telles récurrences correspondent à un

cas particulier de récurrences (1) où les fonctions f et g vérifient les conditions de Cauchy-Riemann. Plus récemment certaines propriétés de (F) ont été étudiées, pour des récurrences ayant la forme (1), dans le cas où x et y sont complexes [5] [6] et dans le cas où ces variables sont réelles [7] [8]

C'est cette méthode directe que nous nous proposons d'exposer dans la présente communication. Cependant nous n'avons pas actuellement, une expérience suffisante du problème énoncé pour être en mesure de donner un caractère général aux résultats que nous donnons. Nous tenterons donc plutôt, à l'aide d'exemples, de mettre en évidence certaines propriétés ainsi que la diversité des structures possibles de (F) et des "trajectoires discrètes" formées par la suite des points M_n , sans toutefois prétendre avoir épuisé toutes les circonstances susceptibles de surgir, ou énoncé les conditions générales de leur existence.

Notre exposé comprend deux parties. Tout d'abord nous donnons une série de définitions et de résultats indispensables pour aborder le problème que nous avons posé. La deuxième partie traite essentiellement des propriétés de (F), de sa détermination et, à l'aide d'exemples, on fait apparaître différentes structures dans le cas où les fonctions f, g sont soit des polynômes en x_n, y_n , soit linéaires par morceaux mais continues.

2 - DEFINITIONS, RESULTATS GENERAUX

2 -1. Points doubles a distance finie, multiplicateurs

On appelle points doubles a distance finie de (1) (points d'équilibre) les points dont les coordonnées (α, β) sont solutions du système d'équations

$$(2) \quad \alpha = f(\alpha, \beta) \quad , \quad \beta = g(\alpha, \beta)$$

Un cycle d'ordre m est un point double de la transformation T^m qui n'est pas point double de T^p , p étant un entier quelconque inférieur à l'entier m . Aux points d'un

cycle d'ordre m les relations suivantes sont vérifiées.

$$(3) \quad x_{n+m} = x_n \quad , \quad y_{n+m} = y_n$$

et ce cycle est formé de m points distincts.

Les racines S_1, S_2 de l'équation caractéristique

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a - S & b \\ c & d - S \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} a = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} & b = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} \\ c = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} & d = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} \end{matrix}$$

sont appelées les multiplicateurs de (1) au point double (α, β) . Dans le cas d'un cycle d'ordre m , les multiplicateurs se définissent pour la transformation T^m ; et ils sont les mêmes en chaque point du cycle, car l'équation caractéristique est identique en ces points.

Si S_1, S_2 sont distincts en module et non nuls on sait, par la théorie des substitutions linéaires, qu'il est possible de ramener (1) à la forme canonique suivante.

$$(5) \quad \begin{cases} x_{n+1}^* = S_1 x_n^* + \bar{f}(x_n^*, y_n^*) \\ y_{n+1}^* = S_2 y_n^* + \bar{g}(x_n^*, y_n^*) \end{cases}$$

lorsque l'origine est placée au point double considéré. Dans le cas où \bar{f} et \bar{g} sont analytiques, f et g ont leurs premiers termes de degré supérieur ou égal à deux.

Lorsque S_1, S_2 sont réels et égaux la forme canonique peut avoir l'une des deux expressions:

$$(6) \quad \begin{cases} x_{n+1}^* = Sx_n^* - y_n^* + \bar{f}(x_n^*, y_n^*) \\ y_{n+1}^* = Sy_n^* + \bar{g}(x_n^*, y_n^*) \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} x_{n+1}^* = Sx_n^* + \bar{f}(x_n^*, y_n^*) \\ y_{n+1}^* = Sy_n^* + \bar{g}(x_n^*, y_n^*) \end{cases}$$

selon que la racine S n'annule pas ou annule tous les mineurs du déterminant (4).

Les multiplicateurs permettent de définir les axes principaux du point double, qui sont les vecteurs propres associés à (4) leurs

pentés sont données par:

$$P_1 = \frac{S_1 - a}{b} = \frac{c}{S_1 - d} \quad P_2 = \frac{S_2 - a}{b} = \frac{c}{S_2 - d}$$

Dans le cas de l'expression (6) les deux axes principaux sont confondus, pour l'expression (7) les pentés sont indéterminées.

Les expressions obtenues permettent de mettre en évidence un résultat connu depuis fort longtemps [9] [10] concernant la stabilité locale du point (α, β) : "il y a stabilité locale si S_1 et S_2 sont tous les deux inférieurs à un en module. On ne peut conclure si l'un des S est égal à un en module, l'autre ayant son module inférieur à un (cas critique)". Ainsi, en dehors des cas critiques, le comportement des solutions, au voisinage d'un point double, est fixé par l'approximation linéaire de (1).

Etant donné un point $P_0(x_0, y_0)$, dans le plan (x, y) , (1) génère une suite de points P_1, P_2, P_3, \dots qui sont les con-
séquents successifs de P_0 . De même la suite de points P_{-1}, P_{-2}, \dots obtenue à partir de (1), forme les antécédents successifs de P_0 . Un point P_0 peut avoir plusieurs antécédents réels P_{-1} , ou aucun antécédent réel, ceci étant fonction des déterminations réelles de la récurrence inverse.

$$(8) \quad x_n = \varphi(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad y_n = \psi(x_{n+1}, y_{n+1})$$

L'ensemble des points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{-1}, P_{-2}, \dots$ forme dans le plan (x, y) une "trajectoire discrète" qui est invariante en appliquant T et s'il existe un point limite, ce point est double. Le même raisonnement peut être fait dans le cas d'un cycle d'ordre n .

2 -2. Différents types de points doubles

Par analogie avec les résultats de Poincaré relatifs aux équations différentielles, Lattes [10] avait été amené à classer les points doubles de (1) en noeuds, cols, foyers qui caractérisent le comportement de trajectoires discrètes au voisinage de ces points singuliers. Ainsi un noeud est un point double tel que S_1, S_2 sont réels, leurs modules étant soit inférieurs à l'unité, (stabi-

lité), soit supérieurs à l'unité (instabilité). Pour un col, S_1, S_2 sont encore réels mais l'un des S est inférieur en module à l'unité, l'autre étant supérieur en module à l'unité, un tel point est toujours instable. Un foyer est tel que S_1, S_2 sont complexes conjugués, leur module étant supérieur à un (instabilité), ou inférieur à un (stabilité). Une telle classification peut être détaillée [11] [12] en faisant intervenir le signe de S_1, S_2 lorsqu'ils sont réels, et le signe de leur partie réelle lorsqu'ils sont complexes.

Nous conviendrons ainsi de dire qu'un noeud ou un col est de type 1, si les deux multiplicateurs sont positifs. Ceci se traduit par le fait que, dans le plan (x_n, y_n) , le vecteur $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ ne coupe pas les axes principaux (figures 1a, 1b)

Un col ou un noeud est de type 2, si l'un des multiplicateurs est positif, l'autre étant négatif. Le vecteur $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ coupe alors l'un des axes principaux (figures 2a, 2b, 2c).

Un col ou un noeud est de type 3, si les deux multiplicateurs sont négatifs. Le vecteur $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ coupe alors les deux axes principaux (figure 3a, 3b).

Nous avons vu que, lorsque S_1, S_2 sont réels et égaux dans le cas de la forme canonique (?), les axes principaux sont indéterminés. Le point double \bar{P} correspondant est alors un noeud étoile et, dans le cas linéaire, les trajectoires discrètes sont formées par un faisceau de droites passant par \bar{P} . Selon le signe de S_1 et S_2 un noeud étoile peut être de type 1, 2 ou 3.

Un foyer est de type 1 si la partie réelle des multiplicateurs est positive, la suite des points P_0, P_1, P_2, \dots est alors située sur une spirale passant par ce point double. Le foyer est de type 2 lorsque la partie réelle des multiplicateurs est négative et les points de la suite P_0, P_1, P_2, \dots sont situés alternativement sur deux spirales passant par le foyer.

Nous n'envisagerons pas ici le cas où l'un des multiplicateurs est nul, ou égal, en module, à l'unité (cas critique).

Il faut noter enfin que les définitions données ci-dessus s'étendent aux cycles d'ordre n qui peuvent être des noeuds, cols ou foyers, de type 1, 2 ou 3, il suffit de raisonner sur les points doubles de la transformation T^m .

2 -3. Courbes de points doubles ou de cycles [10]

En général les points doubles sont isolés, mais il peut arriver que les équations (2) soient satisfaites par les coordonnées d'une infinité de points formant une courbe. L'équation (4) a alors une racine S_1 égale à 1 et une racine S_2 qui est en général différente de 1. Si une telle courbe existe son équation $h(x,y) = 0$ est telle que $h(x,y)$ est le facteur commun de $x - f(x,y)$ et $y - g(x,y)$.

Les courbes de cycles d'ordre m se définissent d'une façon analogue en considérant la transformation T^m .

2 -4. Courbes invariantes

Les trajectoires discrètes de (1) qui aboutissent ou sont issues d'un point double sont des courbes invariantes par application de la transformation T . Lorsque les données de (1) sont analytiques Lattes [10] a montré que si, en un point double, S_1, S_2 sont réels distincts, de module différent de 0 et de 1, et si $S_1 \neq S_2^n$ (n entier), il existe deux courbes analytiques invariantes C_1 et C_2 et deux seulement passant par le point double et définies dans un certain voisinage de ce point.

Dans le cas d'un noeud stable les conséquents successifs d'un point pris dans un certain domaine l'entourant tendent vers ce point tangentiellement à l'une des courbes invariantes C_1 , sauf si le point initial est pris sur l'autre courbe C_2 , les conséquents restent alors sur C_2 . Pour un noeud instable le même résultat s'obtient en raisonnant sur les antécédents.

Dans le cas d'un col, si les données sont

analytiques, les deux courbes C_1, C_2 qui passent par ce point sont analytiques. Les propriétés des conséquents et des antécédents sont données dans [10].

Sur un plan pratique on peut obtenir, les courbes C_1 et C_2 à l'aide de développements en série donnant les coordonnées canoniques x^* et y^* dans un certain voisinage du point double \bar{P} :

- soit en utilisant la méthode proposée par Lattes (voir [10] et un exemple dans [13] mais celle-ci donne une courbe $y^* = \theta(x^*)$ uniforme et le voisinage de \bar{P} à l'intérieur duquel le développement est valable peut, dans certains cas, être très réduit.

- soit en utilisant une méthode itérative basée sur des résultats de Picard (p. 76 [14] et [15]) la courbe est alors donnée sous forme paramétrique $x^* = x^*(t), y^* = y^*(t)$ et elle peut être non uniforme par rapport aux coordonnées x^* et y^* .

La convergence des développements obtenus dépend des autres singularités (autres points doubles ou cycles) qui se trouvent sur la courbe invariante. À l'aide de la deuxième méthode ces développements peuvent être poussés jusqu'à un ordre aussi élevé que l'on désire. Ces méthodes programmées sur calculatrice numérique ont permis de traiter les exemples du troisième paragraphe qui correspondent à des structures de (F) complexes.

Lorsque les données de (1) ne sont pas analytiques il existe deux courbes C_1, C_2 qui jouent un rôle semblable à celui des courbes analytiques obtenues ci-dessus (voir [10] p.35). La méthode itérative basée sur les résultats de Picard permet d'avoir aussi dans ce cas un développement des courbes invariantes.

Les résultats de ce paragraphe s'étendent, bien entendu, aux cycles d'ordre m .

2 -5. Indice de Poincaré des points doubles et des cycles

La notion d'indice introduite par Poincaré pour les points singuliers et les cycles limites des équations différentielles ordinaires a été étendue par Neimark aux transformations

ponctuelles [16], en considérant les propriétés de rotation du champ des vecteurs $\overrightarrow{P_0 P_1}$ (P_1 étant le conséquent de P_0) lorsqu'on décrit une courbe fermée dans le sens trigonométrique. Dans le cas où les multiplicateurs S_1, S_2 sont réels et différents de 1 en module, l'indice i d'un point double est égal à +1 s'il y a zéro ou les deux multiplicateurs inférieurs à 1, l'indice est égal à -1 s'il n'y a qu'un multiplicateur plus petit que 1.

Ainsi, en appliquant ce résultat aux points doubles définis ci-dessus, l'indice d'un noeud de type 1 stable ou instable est $i = +1$. L'indice d'un noeud de type 2 stable est $i = +1$, pour un noeud instable de type 2, $i = -1$. L'indice d'un noeud stable ou instable de type 3 est $i = +1$. Dans le cas d'un col de type 1 et d'un col de type 2 dont le multiplicateur de plus grand module est positif $i = -1$. Pour un col de type 3 et un col de type 2 dont le multiplicateur de plus grand module est négatif $i = +1$. Avec un foyer stable ou instable $i = +1$. Certains points doubles correspondant à un cas critique (un des multiplicateurs est égal à l'unité en module) sont tels que $i = 0$. L'indice d'une trajectoire fermée ne se recoupant pas et sans point double est $i = 1$, et l'indice d'une courbe fermée ne passant par aucun point double est égal à la somme des indices des points singuliers situés à l'intérieur de cette courbe. Ce dernier résultat fournit, lorsqu'il y a continuité, une condition nécessaire d'existence d'une trajectoire (Γ) fermée sans point double, condition basée sur le fait que la somme des indices des points doubles entourés par (Γ) est égale à 1.

2 -6. Etude des points singuliers à l'infini - Equateur de Poincaré

La méthode dite de la "sphère" ou de l'"équateur" de Poincaré, d'utilisation très commode, dans le cas des équations différentielles [17] [18], peut être étendue aux récurrences ayant la forme (1) [19]. Le principe de cette méthode est illustré par la figure 4. La sphère S de rayon unité est tangente au plan (P) de coordonnées x_n, y_n en O , origine des axes. Tout point $M(x_n, y_n)$ de (P) correspond

deux points M' et M'' sur S et la droite OM , et un point M^* du plan (Q) tangent à S en C qui est perpendiculaire à Ox_n . Soient $C\tau$ et Cz les axes de ce plan, la transformation

$$(9) \quad x = (z)^{-1}, \quad y = \tau(z)^{-1}$$

permet de passer de M à M^* . Les images M' et M'' de tout point M à l'infini se trouvent sur le grand cercle (E) de S parallèle à (P) , qui correspond à $Z = 0$. Ce grand cercle est appelé "équateur". Il faut remarquer que la transformation (9) ne permet pas l'étude des points à l'infini dans la direction Oy , mais cette difficulté est levée en utilisant la transformation

$$(10) \quad x = \tau(z)^{-1}, \quad y = (z)^{-1}$$

Etudier les points à l'infini de (1) revient donc en utilisant (9) ou (10), à considérer les points $Z = 0$ de la récurrence.

$$(11) \quad Z_{n+1} = h(Z_n, \tau_n), \quad \tau_{n+1} = l(Z_n, \tau_n)$$

Une image qualitative de l'évolution de M s'obtient en considérant la projection du mouvement de M' sur le plan de l'équateur.

L'équateur peut comporter des points singuliers qui sont les points doubles de (11) pour $Z = 0$, ces points pouvant être de type 1, 2 ou 3, ou des cycles. Dans le cas où (1) est linéaire, ou linéaire par morceaux les points singuliers à l'infini sont de type classique et s'étudient facilement. La situation est plus délicate lorsque (1) est non linéaire car les points singuliers à l'infini peuvent être alors de nature complexe et demandent une étude particulière.

En tant qu'exemple, la figure 5 représente l'équateur de la récurrence $x_{n+1} = y_n, y_{n+1} = x_n + 2y_n$, pour laquelle l'origine est un col de type 2.

L'utilisation de (9) conduit à la récurrence

$$Z_{n+1} = Z_n \cdot (\tau_n)^{-1}, \quad \tau_{n+1} = (\tau_n)^{-1} + 2$$

Les points doubles à l'infini sont donnés par $\tau = 1 + \sqrt{2}, Z = 0$ en ramenant l'origine en ces points on voit que l'un est un noeud attractif de type 2 (points A, B) et l'autre un noeud répulsif de type 3 (points C, D).

3 - DETERMINATION DU DOMAINE DE CONVERGENCE VERS UN POINT DOUBLE STABLE OU VERS UN CYCLE STABLE

3 -1. Généralités

A chaque point double attractif \bar{P} de la récurrence (1) correspond un domaine D , qui est formé par tous les points dont les conséquents successifs convergent vers \bar{P} . Ce domaine, limité par une frontière (F) , peut ne pas être connexe, et est appelé le domaine total de convergence, la région d'un seul tenant D_0 entourant \bar{P} étant le domaine immédiat de convergence [2] [3].

Dans le cas de la récurrence (1'), cas particulier de (1) avec f et g vérifiant les conditions de Cauchy Riemann, Julia et Fatou [2] [3] ont montré que la frontière (F) contient les points doubles et les cycles instables de tous les ordres, qui constituent un ensemble dénombrable E , et est formée par le dérivé E' de E , E' étant parfait. En outre E' peut être continu linéaire ou discontinu. Si le domaine total est plus étendu que le domaine immédiat il se compose d'une infinité de régions, sans connexion entre elles, séparées par E' . Il convient de remarquer, qu'avec (1'), les multiplicateurs des points doubles et des cycles sont égaux et ces points ne correspondent qu'à un seul type de singularité qui est celle du noeud étoile.

Il faut donc s'attendre à ce que, dans le cas général de la récurrence (1), la richesse de singularités étant beaucoup plus grande, les structures possibles de (F) soient très variées, et beaucoup plus complexes.

3 -2. Propriétés de la frontière (F) relative à un point double stable de (1)

Nous nous plaçons dans le cas où (F) est un continu. Les points de (F) forment un ensemble fermé, dans le plan (x,y) , qui constitue une ligne répulsive pour les points situés dans son voisinage. Cette ligne est invariante par la transformation T et la transformation inverse T^{-1} . Ainsi les conséquents d'un point de (F) sont sur (F) et il en est de même pour les antécédents [5] [6] [7] [8].

En tenant compte de ces propriétés, sur (F) il est possible de trouver:

- des points doubles et des cycles instables d'ordre fini ou infini (l'un au moins des multiplicateurs est, en module, supérieur à 1)
- les antécédents de ces points cependant ces points, contrairement au cas de (1'), sont en nombre fini, sauf s'il existe sur (F) un cycle d'ordre infini.

Dans le cas où l'un des multiplicateurs en un point double ou un cycle est égal à 1 en module, l'autre étant inférieur à 1 unité, ce point peut appartenir ou ne pas appartenir à (F) , selon la stabilité du cas critique correspondant.

Les points doubles et les cycles instables sur (F) peuvent être des noeuds, cols ou foyers de type 1 ou 2. Les points de type 3 à distance finie sont exclus, sauf, peut être, dans le cas où (F) forme une boucle, et nous n'avons pas encore trouvé d'exemple qui illustre cette situation. A l'infini un point de type 3 pour la récurrence (1) peut appartenir à (F) . Pour un noeud instable N de type 1 ou 2, toute condition initiale x_0, y_0 prise sur (F) , au voisinage de ce point, donne des conséquents qui s'éloignent de N de façon continue pour le type 1, en oscillant autour de N pour le type 2. Ainsi pour les points de (F) N est toujours un point répulsif. Les cols C , appelés encore points "semi répulsifs" [5] [6] sont tels que toute condition initiale (x_0, y_0) prise près de C , en dehors de (F) donne des conséquents qui s'éloignent de C , après un certain nombre d'itérations, et toute condition initiale prise près de C sur (F) donne des conséquents qui tendent vers C de façon continue (type 1) ou en oscillant autour de C (type 2). Pour les points de (F) les cols sont donc des points attractifs. Les foyers, comme les noeuds, sont des points répulsifs pour les points de (F) .

En un point N ou C , l'axe principal qui correspond au multiplicateur de plus petit module est tangent à (F) . Si on a affaire à une

frontiere (F) qui delimitte le domaine d'influence d'un point double stable, un point N ou C, de type 2, instable n'appartient a (F) que si le multiplicateur de plus grand module est positif. Dans le cas d'un cycle stable, d'ordre 2 par exemple, un point N ou C de type 2, instable tel que le multiplicateur de plus grand module est negatif, peut appartenir a la frontiere qui separe les zones d'influence de chacun des points du cycle. Connaissant les tangentes en des points N ou C on obtient facilement les tangentes aux antecedents successifs de ces points.

Si un point de (F) est un noeud étoile la tangente en ce point a (F) est indéterminée. Ce point est en général un point anguleux pour (F) comme le montre l'exemple simple suivant $x_{n+1} = y_n, y_{n+1} = 0,5 x_n + 0,1 x_n^2$ pour lequel la frontiere du domaine de stabilite de l'origine est le carré de sommets A (5; 5), $A_1 (-10; 5), A_2 (5; -10), A_3 (10; -10)$, A étant le noeud étoile [7].

Un autre cas de point anguleux se presente pour une recurrence de la forme $x_{n+1} = f(x_n), y_{n+1} = g(y_n)$ ou (F) est un rectangle. En outre si nous considerons (1'), l'ensemble E étant constitué par des noeuds étoiles, la tangente aux points de (F) est indéterminée et nous retrouvons un resultat de Julia [2].

Dans un assez grand nombre de cas la serie de points et de tangentes que l'on obtient a partir des propriétés énoncées ci-dessus suffit a tracer (F) grossierement. Si l'on desire un tracé plus précis ou si le nombre de points caracteristiques (points doubles, cycles et antecedents) est insuffisant, ce tracé de (F) est amélioré dans le cas ou les données de (1) sont analytiques en utilisant le resultat suivant:

- Un arc (α) de la courbe invariante analytique, issu d'un point double ou d'un cycle col \bar{C} , et correspondant au multiplicateur de plus petit module, fait partie de (F). La restriction de la transformation T a cette courbe admet \bar{C} comme point attractif et (α) est

formé par l'ensemble des points dont les consequents successifs tendent \bar{C} .

Ainsi autour de \bar{C} , (F) est connu par un développement en serie annoncé dans le paragraphe I-4.

Dans le cas d'un noeud instable \bar{N} , il existe des récurrences pour lesquelles la courbe invariante analytique correspondant au plus petit module fait partie de (F) et des récurrences pour lesquelles ceci n'est pas vrai, c'est-a-dire (F) est constitué par une trajectoire non analytique en \bar{N} . Nous donnerons des exemples de ces deux situations, mais nous ne savons pas encore, comment les reconnaître a priori.

La détermination d'un arc de (F) peut se faire simplement lorsque sur (F) se trouvent un col C, attractif pour les points de (F) et un noeud ou foyer instable, repulsif pour les points de (F), frontiere de la zone d'influence de C sur (F). Vis a vis de la recurrence inverse (8) C devient repulsif pour les points de (F) et le noeud ou le foyer, attractif pour les points de (F) et les points suffisamment voisins. On obtient une suite de points que l'on peut considerer sur (F) avec une précision suffisante, en prenant une condition initiale P_0 voisine de C, sur la tangente en C a (F), et en iterant P_0 a l'aide de la détermination convenable de (8). La suite des points ainsi obtenus est tres voisine de (F) puisque, le noeud ou le foyer étant maintenant attractif, l'erreur d'estimation diminue quand on se rapproche de ce point stable.

3-3. Lignes critiques

On appellera lignes critiques (L_C) du plan (x_n, y_n), le lieu des points qui admettent deux antecedents confondus. Lorsque le degré d'un des polynomes f et g est pair il peut exister une région a l'intérieur de laquelle les points n'ont pas d'antecedents.

La ligne antecédente de (L_C), (L_C)⁻¹ s'obtient en annulant le jacobien du deuxieme membre de (1), ce qui est une extension d'un

Page 8 Missing!

doubles, joints par une trajectoire sont situés de part et d'autre d'une ligne $(L_c)^{-1}$ l'un peut être de type 1 et l'autre de type 2, la trajectoire change de comportement en traversant $(L_c)^{-1}$.

- la présence de deux éléments répulsifs l'un entourant l'autre et non séparés par un élément attractif (point double instable entouré par une courbe répulsive, ou courbe répulsive entourant une autre courbe répulsive) donne naissance à une région "complètement invariante" située entre ces deux éléments.

4 - EXEMPLES

4 -1. Cas où (F) a une expression analytique simple

Soit la récurrence [22]

$$(12) \quad x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = x_n y_n$$

L'origine est un point double stable et le point A (1, 1) un col de type 2. Les deux courbes analytiques invariantes passant par ce col ont pour équation

$$y_1 = x^{0,5} (1 + \sqrt{5}) \quad y_2 = x^{0,5} (1 - \sqrt{5})$$

y_1 est la courbe en pointillés du premier quadrant de la figure 6, y_2 courbe en trait plein fait partie de (F). Il existe de plus un cycle d'ordre 3 M (-1, -1), N (-1, 1), P (1, -1). En passant à la transformation T^3 on voit que ce cycle est un col de type 2, les courbes analytiques invariantes ayant pour équations

en M: $y_1 = -[-x]^{0,5} (1 + \sqrt{5}), \quad y_2 = -[-x]^{0,5} (1 - \sqrt{5})$

en N: $y_1 = [-x]^{0,5} (1 + \sqrt{5}), \quad y_2 = [-x]^{0,5} (1 - \sqrt{5})$

en P: $y_1 = -x^{0,5} (1 + \sqrt{5}), \quad y_2 = -x^{0,5} (1 - \sqrt{5})$

En outre les points à l'infini sur Ox et Oy sont répulsifs et appartiennent à (F) qui est dessinée en trait plein sur la figure 6. Sur un plan plus général (F) a une expression analytique simple lorsque les fonctions f et g de (1) sont des monômes en xy [6].

Comme deuxième exemple simple soit:

$$(13) \quad x_{n+1} = 2x_n, \quad y_{n+1} = y_n^2$$

Les deux points doubles à distance finie sont O qui est un col de type 1 et le point A(0, 1) qui est un noeud instable de type 1. A l'infini

dans les directions Ox Oy se trouvent deux points doubles attractifs dont on cherche dans le plan de l'équateur de Poincaré la courbe (F) et les trajectoires (figure 7a). Le diamètre BC est la ligne critique, tout point tel que $|y| < 1$ converge vers B ou C, et tout point tel que $|y| > 1$ converge vers D. Les points du demi secteur B C E sautent dans le demi secteur B D C. La ligne $|y| = 1$ fait partie de (F) et donne dans le plan de l'équateur l'ellipse B A C A'. On remarque que le point double à l'infini (B, C) est complexe, certaines trajectoires aboutissant en ce point, d'autres s'en éloignant.

4 -2. Cas où (F) est tracée facilement à partir de ses points caractéristiques et de leur tangente

Soit la récurrence [8]

$$(14) \quad x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = 0,5 x_n + 0,1 x_n^2 + 0,1 y_n$$

L'origine est un noeud stable de type 2. Le point P(4, 4) est un noeud instable de type 2, entouré par le cycle d'ordre 2 $A(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}), B(3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$ qui est un col de type 1. Les tangentes en A B C à (F) et aux antécédents $A_1 B_1 P_1, A_2 B_2 P_2, A'_2 B'_2 C'_2$ permettent un tracé suffisamment précis de (F) à condition d'ajouter les points de la ligne critique, leurs antécédents et conséquents (Figure 7b). En outre, la ligne analytique invariante passant par P et correspondant au multiplicateur de plus grand module passe par O et est analytique en O. Les lignes analytiques invariantes, autres que (F), passant par A et B passent aussi par O, sont tangentes à la ligne analytique qui joint O et P mais perdent leur analyticité en O. Remarquons que O et P, se trouvant d'un même coté de $(L_c)^{-1}$, sont de même type (voir le paragraphe 3-4.)

4 -3. Cas où la frontière (F) est déterminée à partir d'une courbe invariante analytique

Soit la récurrence: [13]

$$(15) \quad x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = 0,8x_n + x_n^2 + y_n^2$$

pour laquelle l'origine est noeud stable de type 2. (F) contient le point A(0, 1, 0, 1), qui est un col de type 2, pour lequel on détermine

facilement les deux axes principaux Au, Av (Figure 8). Le point A n'a qu'un seul antécédent A_{-1} et sur (F) il n'existe aucun cycle. Les deux points que nous avons, avec les deux tangentes a (F), sont insuffisants pour une détermination de (F). On recherche donc la courbe invariante analytique, correspondant au multiplicateur de plus petit module, qui passe par A, en utilisant la méthode proposée par Lattes [10]. En limitant le développement aux 7 premiers termes, l'équation de cette courbe, v_7 , avec les coordonnées u, v est:

$$v = -2,591 u^2 - 1,705 u^3 - 7,673 u^4 - 23,863 u^5 - 34,142 u^6 - 204,579 u^7$$

Soit P l'intersection de v_7 avec la ligne critique, il est facile de vérifier que P est très près de (F). Les antécédents de l'arc AP permettent la détermination complète de (F).

4 -4. Changement de comportement qualitatif de (F) sous l'effet d'une variation de paramètre

Nous envisagerons la récurrence [23]

$$(16) \quad x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = 0,5x_n + 0,1x_n^2 + \lambda x_n y_n$$

λ pouvant prendre les valeurs $\lambda = 0,09$, $\lambda = 0,1$, $\lambda = 0,101$, $\lambda = 0,11$. Quel que soit λ , l'origine est un noeud étoile stable de type 2.

a) Pour $\lambda = 0,09$ (F) comporte un noeud instable de type 2, A dont les antécédents sont A_{-1} , A_{-2} et A'_{-2} , et un cycle d'ordre 2 formé par les points B(0,5) et C(5,0) qui sont des cols de type 1 et dont les antécédents sont B_{-1} , B_{-2} , B'_{-2} , C_{-1} , C_{-2} , C'_{-2} (Figure 9). Pour le cas considéré (F) se confond avec la courbe analytique invariante en A, qui correspond au multiplicateur de plus petit module.

b) $\lambda = 0,1$ est une valeur de bifurcation pour (F), c'est-à-dire qu'elle correspond à un changement de comportement qualitatif. Il apparaît en effet une droite de cycles doubles d'équation $y_n + x_n = 5$, dont l'un des multiplicateurs est égal à 1, l'autre étant supérieur à 1 sur le segment d'abscisses $-5; +10$ inférieur à -1 sur les segments d'abscisses $(-\infty; -13,508)$, $(+18,508; +\infty)$ et inférieur à 1 en module sur les segments $(-13,508; -5)$, $(+10; +18,508)$. Sur la figure 10 sont représentées la partie de (F), située dans le premier et le deuxième quadrant du plan xy, re-

lative au domaine d'attraction de l'origine, et la partie de (F) relative au domaine d'attraction des segments de cycles doubles attractifs définis par les abscisses $(-13,508; -5)$, $(+10; +18,508)$ sur la droite $x + y = 5$. Le tracé complet de (F) s'obtient en prenant les antécédents de ces parties.

c) Pour $\lambda = 0,101$, le point double sur (F) est maintenant un col de type 2, F, entouré par un cycle d'ordre 2, E_1, E_2 qui est un noeud de type 1. Il apparaît en plus, sur (F), un cycle d'ordre 4, (dont deux points A et B sont représentés sur la figure 11), qui est un col de type 2, et un point à l'infini qui est répulsif pour les points de (F). Au voisinage des points E_1, E_2 , (F) n'est pas constitué par une courbe analytique invariante, sur (F) on trouve, en particulier, les antécédents successifs de A et B qui convergent vers E. Le tracé complet de (F) s'obtient en prenant les antécédents de la partie dessinée sur la figure 11.

d) Pour $\lambda = 0,11$, en plus du cycle d'ordre 4, apparaissent trois cycles d'ordre 8, qui entraînent une nouvelle déformation de (F).

4 -5. Exemple de récurrence linéaire par morceaux

Considérons la récurrence [24]

$$(17) \quad x_{n+1} = y_n \begin{cases} y_{n+1} = y_n - 0,5x_n & \text{pour } |x_n| \leq 6 \\ y_{n+1} = y_n - \alpha x_n + 6\alpha - 3 & \text{pour } x_n \geq 6 \\ y_{n+1} = y_n - \alpha x_n - 6\alpha + 3 & \text{pour } x_n \leq -6 \end{cases}$$

α étant un paramètre que nous faisons varier entre les valeurs $-3 \leq \alpha \leq -1$. Quel que soit α , l'origine est un foyer de type 1.

a) Pour $\alpha = -1$, il existe deux cols de type 2, A (9; 9) B (-9; -9) et pas de cycle d'ordre 2 (F) est formé par des segments de droites. Autour de A, (F) correspond à un segment de pente -0,62, limité par un point abscisse $x_n = 6$ et un autre point d'ordonnée $y = 6$. Ce segment est la courbe invariante analytique limitée par la zone "d'analyticité" que nous avons définie autour de A. A l'aide de la méthode de l' quateur de Poincaré on constate qu'il y a deux points à l'infini; l'un M, dans la direction de pente $\tau = 0,5(1 - \sqrt{5})$, noeud instable de type 3; l'autre N, dans la direction de

pente $\tau_2 = 0,5(1+\sqrt{5})$ noeud stable de type 2. Le point sur (F) est donc M.

b) Etudions maintenant le cas $\alpha = -3$. On trouve sur (F) deux noeuds instables de type 2, A (7; 7) et B (-7; -7) dont l'axe principal, qui correspond au multiplicateur de plus petit module, a pour pente -1,3. En outre, il existe trois cycles d'ordre 2: les cycles C, D et E, F qui sont des cols de type 2, et le cycle G, H qui est un noeud instable de type 1 (voir la figure 12). L'étude des points a l'infini montre qu'il n'y en a aucun sur (F). (F) est encore formé par des segments de droites, cependant autour de A la frontiere ne correspond pas a un segment de l'axe principal de pente -1,3. Entre C et D la frontiere est constituée par une suite infinie de segments de droites dont les extrémités sont les antécédents successifs de D, la pente de ces segments tendant vers -1,3. Remarquons encore que pour un point initial P_0 , pris au voisinage de A et dans le domaine d'attraction de O, on obtient une trajectoire qui oscille autour de l'axe principal de A qui correspond au multiplicateur de plus grand module, jusqu'a la droite verticale $x = +6$, antécédente de la ligne critique. Après cette droite le comportement est celui d'un foyer de type 1.

c) On constate ainsi que, lorsque α passe de la valeur -1 a -3, les propriétés de (F) changent. La valeur de α qui correspond a cette bifurcation est $\alpha = -2$. Cette bifurcation se traduit par l'apparition de deux segments C(6; 9), D(9; 6) et E(-6; -9), F(-9; -6) comportant une infinité de cycles doubles, ainsi que d'un point a l'infini dans la direction de pente -1. Bien qu'étant du a la naissance d'une ligne de cycles doubles, cette bifurcation est d'un type différent de celle de l'exemple 16, puisqu'ici le cycle d'ordre 2 ne se conserve pas pour $\alpha = -1$.

4 -6. F ne contient aucun point double a distance finie ou infinie

L'exemple suivant illustre une telle situation [25]

(18) $x_{n+1} = x_n(1-h) + y_n$,

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - 0,2hx_n & \text{pour } |x_n| \leq 5 \\ y_{n+1} = y_n - 2hx_n + 9h & \text{pour } x_n \geq 5 \\ y_{n+1} = y_n - 2hx_n - 9h & \text{pour } x_n \leq -5 \end{cases}$$

ou h prend les valeurs 0,2 et 1.

Pour $h = 0,2$ la récurrence inverse de (18) permet, en prenant une condition initiale voisine de 0 (point double stable), de constater qu'il existe sur (F) un cycle d'ordre tres élevé, peutetre infini. On obtient suffisamment de points pour tracer (F) (figure 13).

Pour $h = 1$, (F) comporte un cycle d'ordre 6, foyer de type 1, B_1 , $i = 1,2...6$, et un deuxieme cycle d'ordre 6, col de type 1, A_1 , $i = 1,2...6$ (figure 13). A partir de ces points la détermination complete de (F) se fait facilement, en prenant un point voisin de A_1 sur la tangente a F et en l'itérant a l'aide de la récurrence inverse de (18).

4 -7. Frontieres qui tendent asymptotiquement vers une courbe fermée

Considérons la récurrence

(19) $x_{n+1} = y_n$,
 $y_{n+1} = (0,2y_n - 0,5x_n)(x_n^2 + y_n^2 - 1,2x_n - y_n + 0,5) + x_n$
 pour $\alpha = 1,3$, $\alpha = 1,1$, $\alpha = 1,2$

a) Lorsque $\alpha = 1,3$, (19) admet deux points doubles stables A_1 (origine) et A_3 , noeuds de type 2, (figure 14), dont les domaines d'attraction sont séparés par (F). Sur (F) on trouve: un col de type 2, A_2 , un cycle d'ordre 2, B_2 , B'_2 , foyer de type 1. Sur la figure 14, sont dessinées, en outre, différentes courbes analytiques invariantes déterminées par la méthode basée sur les résultats de Picard, méthode appliquée pour les points situés a l'intérieur de l'ellipse antécédente (E) des lignes critiques (l.c.). Si l'on considere la somme des indices des points que nous venons de définir, (somme égale a +1), on peut s'attendre a ce que ces points soient entourés par une courbe fermée (Γ). Cette courbe existe bien, elle comporte un cycle d'ordre 5, N_1 , $i = 1,2...5$ qui est un noeud de type 1 et un cycle d'ordre 5, C_1 , $i = 1,2...5$ qui est un col de type 1. On constate que les courbes antécédentes des arcs de (F) définis a l'intérieur de (E) tendent asymptotiquement vers (Γ).

b) Dans le cas ou $\alpha = 1,1$, (19) admet un point double stable A_1 (origine) qui est un

noeud de type 2 et un cycle d'ordre 2, stable, B_1, B'_1 qui est un noeud de type 1 (F) sépare les domaines d'attraction de A_1 et B_1, B'_1 (figure 15). Sur (F) on trouve, un noeud de type 2 instable A_2 , un cycle d'ordre 2, B_2, B'_2 col de type 1. En outre la ligne analytique invariante, qui sépare, a l'intérieur de (E), les zones d'influence de chacun des points du cycle B_2, B'_2 , passe par un col de type 2, A_3 . Pour A_3 , bien que le multiplicateur de plus grand module soit négatif, ce point appartient a une frontiere parce qu'il sépare les zones d'influence de deux points d'un meme cycle d'ordre 2 (voir le paragraphe 3.2). La courbe (Γ) existe encore pour $\alpha = 1,1$ et est peu affectée par la variation du parametre, ce qui n'est pas le cas pour l'allure de (F) a l'intérieur de (Γ).

c) La valeur $\alpha = 1,2$ correspond a un cas de bifurcation, limite entre les comportements qualitatifs différents de a) et b). La courbe (Γ) existe toujours et est voisine de la courbe (Γ) obtenue pour $\alpha = 1,1$, mais il apparait un cercle, intérieur a (Γ), qui comporte une infinité de cycles d'ordre 2. Son équation est:

$$x^2 + y^2 - 1,2x + y + 0,5 = 0$$

4 -8. Zones complètement invariantes

Reprenons la récurrence (18) avec $h = 2,3$. L'origine est un col de type 2, dont le multiplicateur de plus grand module est négatif (indice +1). Ce point est entouré par une courbe fermée répulsive (Figure 16) sur laquelle se trouvent un cycle d'ordre 4, foyer de type 1, B_1, B_2, B_3, B_4 et un cycle d'ordre 4 col de type 1, A_1, A_2, A_3, A_4 . Toute condition initiale, prise a l'intérieur de cette courbe fermée, donne apres un certain nombre d'itérations une suite de points représentés sur la figure 16. Ces points sont dans deux régions "complètement invariantes" par application de (18) avec $h = 2,3$

4 -9. Domaine de stabilité non connexe

Un exemple d'une telle situation est fourni par la récurrence

$$(20) \quad x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = -x_n - y_n - x_n^2$$

ou le domaine d'attraction de l'origine est constitué par deux régions séparées.

5 - Conclusion

Nous nous sommes limités, dans ce texte, au cas ou les fonctions f et g de (1) n'ont pas de points d'indétermination, et malgre ceci nous sommes loin d'avoir épuisé, avec cette hypothese, tous les cas possibles. Si incomplete que soit cette étude, nous pensons cependant qu'elle peut montrer l'intérêt qui s'y attache. Il faut remarquer, en outre, que des équations telles que (1) ne servent pas uniquement a décrire le comportement d'un Systeme a Données Echantillonnées, mais sont aussi un outil pour l'étude et la détermination des solutions périodiques des équations différentielles non linéaires [16]. Les propriétés mises en évidence peuvent aussi être utilisées pour l'analyse des solutions des équations fonctionnelles de Schröder voir par exemple [3] et [10] a deux variables réelles, car la connaissance du domaine d'existence de ces solutions et l'étude de leurs singularités est en relation étroite avec l'étude du domaine limité par (F), lié a la récurrence qui figure dans ces équations.

Les exemples que nous avons traités nous ont amené a mettre en évidence des cas de bifurcation, c'est a dire des cas de grande sensibilité des solutions d'une récurrence sous l'effet d'une variation de parametre. Bien que les bifurcations envisagées dans ce texte aient pour origine l'apparition d'une courbe de cycles doubles, il faut noter que les conditions d'existence d'un tel phénomène ne sont pas dues uniquement a ce fait. Ainsi des bifurcations, correspondant a un changement de stabilité d'un point double, avec naissance ou disparition d'un autre point double ou d'un cycle [16] peuvent se produire pour des récurrences ayant la forme (1). Nous nous proposons de considérer ce probleme dans une autre publication.

Remerciements

La plupart des exemples de ce texte ont été traités avec la collaboration de M.M.BABARY, GIRAUD, RIBERI du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales. Nous tenons a les remercier pour l'aide qu'ils nous ont apportée.

B I B L I O G R A P H I E

[1] Yu. NEIMARK
Izvestia Vuzov Radiofizika URSS, 1, N° 1, 1958

[2] G. JULIA
J. Math. pures et appl. 8eme série 1, 1918, p. 47

[3] P. FATOU
Bull. Soc. Math. Fr., 47, 1919 p. 161; 48, 1920, p33 et 208

[4] P. FATOU
Acta Math., 47, 1926 p. 337

[5] TOSHIO NISHINO et TSUNEO YOSHIOKA
C.R. Acad. Sc. Paris, T. 260, 1965. p. 3835

[6] TOSHIO NISHINO et TSUNEO YOSHIOKA
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 3eme série, t. 82, 1965. p. 327

[7] I. GUMOWSKI et C. MIRA
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965. p.6524, groupe 2

[8] C. MIRA
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965. p.5314, groupe 2

[9] LEVLCIVITA
Annali di Matematica, série 3, t. 5, 1901.

[10] LATTES
Annali di Matematica, série 3, t. 13, 1906. p. 1

[11] RICHALET
"Equations aux différences du 2eme ordre"
Politechnika Slaska 1963.

[12] C. MIRA
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963. p.3809, groupe 1

[13] J.L. ABATUT et J.P. BABARY
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966. p.931, Série A

[14] E. PICARD
"Leçons sur quelques équations fonctionnelles" Gauthier-Villars
1950. Nouveau tirage

[15] A. GIRAUD
Note interne au Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales.

[16] Yu. I. NEIMARK
Izvestia Vuzov Radiofizika URSS, 1, N° 2, 1958

[17] H. POINCARÉ
"Oeuvres" Tome 1, 1928. Gauthier-Villars p. 20

[18] ANDRONOV, WITT et KHAIKIN
"Theory of oscillators" Pergamon Press p. 326

[19] I. GUMOWSKI et C. MIRA
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966. p. 547 Série A

[20] I. GUMOWSKI et C. MIRA
Electronic Letters, vol. 2, N° 7, July 1966

[21] P. PULKIN
Dokl. Akad. Nauk. URSS, 73, N° 6, 1950. p. 1129

[22] J.P. BABARY
C.R. Acad. Sc. Paris, série A, séance du 9 octobre 1967

[23] C. MIRA
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966. p. 951 série A

[24] C. MIRA
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966. p. 837, série A

[25] I. GUMOWSKI - C. MIRA et E. RIBERI
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967. séries A et B, (10 juillet).

RESUME

Soit le système à Données Echantillonnées (Sampled Data System) dont le comportement est décrit par la récurrence non linéaire autonome, à variables réelles :

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ x_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

f et g étant deux fonctions continues par rapport à leurs arguments, et la relation (1) définissant une transformation ponctuelle non dégénérée.

On se propose de déterminer la frontière (\mathcal{F}) du domaine d'influence d'un point double (ou d'équilibre) stable de (1), dans le plan (x_n, y_n) , un point double vérifiant la relation :

$$(2) \begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(x, y) \end{cases}$$

Les propriétés de (\mathcal{F}) sont données à partir de ses points caractéristiques qui sont, en général :

- des points doubles instables
 - des cycles d'ordre m instables (m = 2, 3...)
- c'est-à-dire des points vérifiant :

$$(3) \begin{cases} x_{n+m} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+m} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

Des exemples de détermination de (\mathcal{F}) sont données, et d'autre part certains cas de bifurcation de (\mathcal{F}) (changement de comportement qualitatif), en présence d'une variation d'un paramètre intervenant dans (1), sont traités.

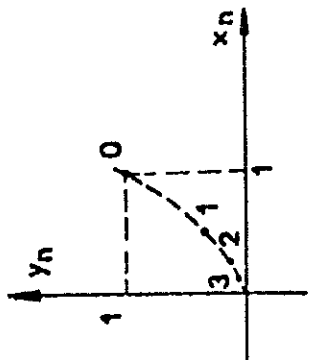


Figure 1 a

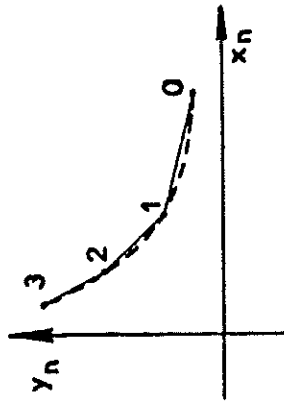


Figure 1 b

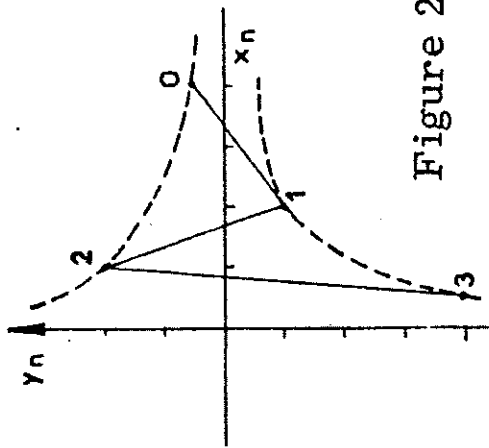


Figure 2 a

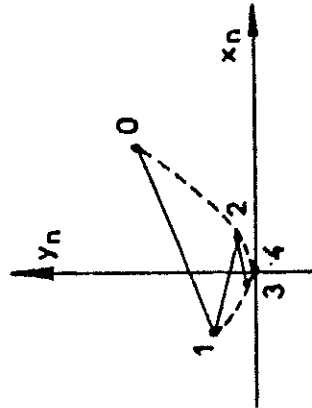


Figure 2 b

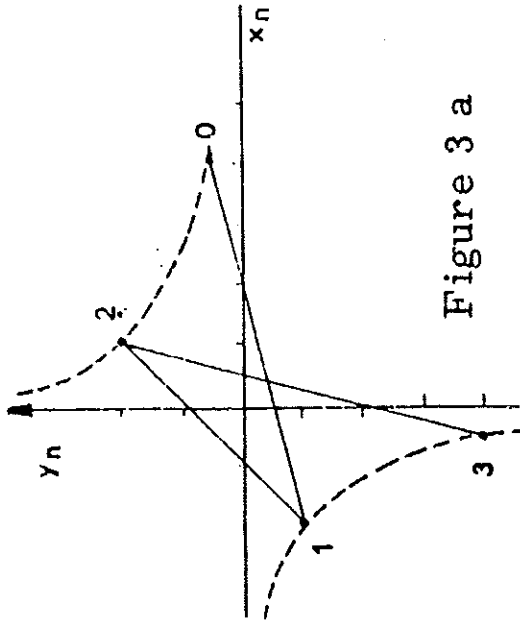


Figure 3 a

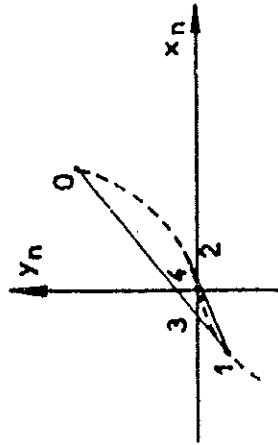
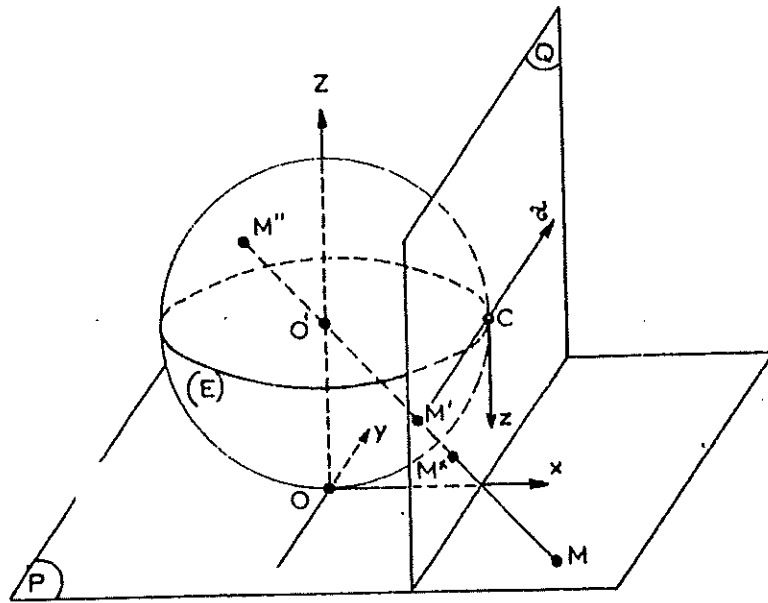


Figure 3 b



— Figure 4 —

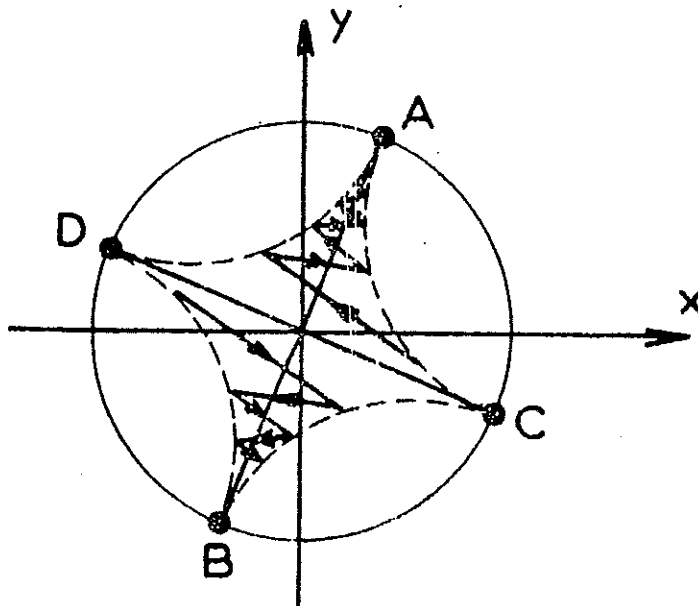


Figure 5

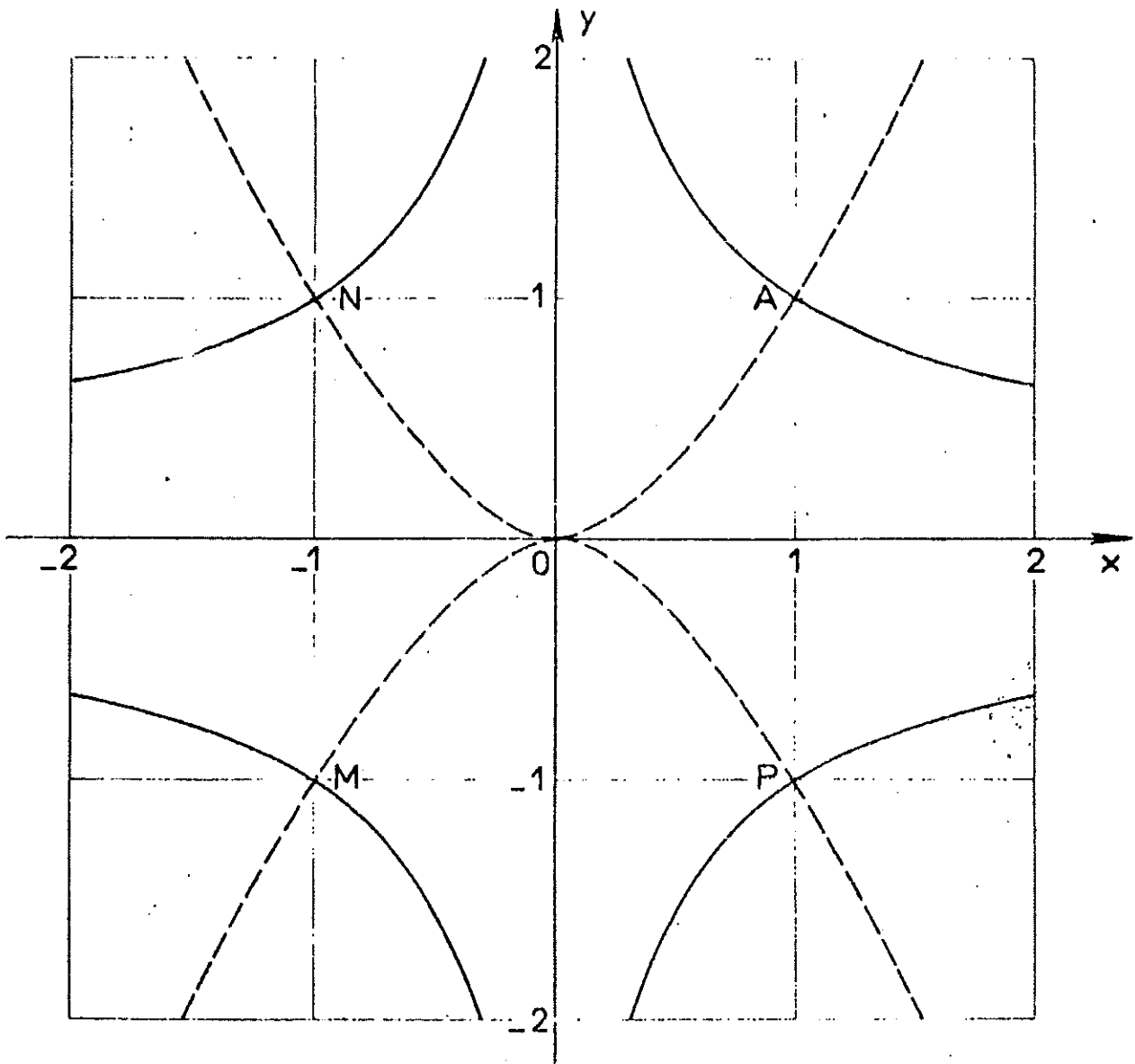
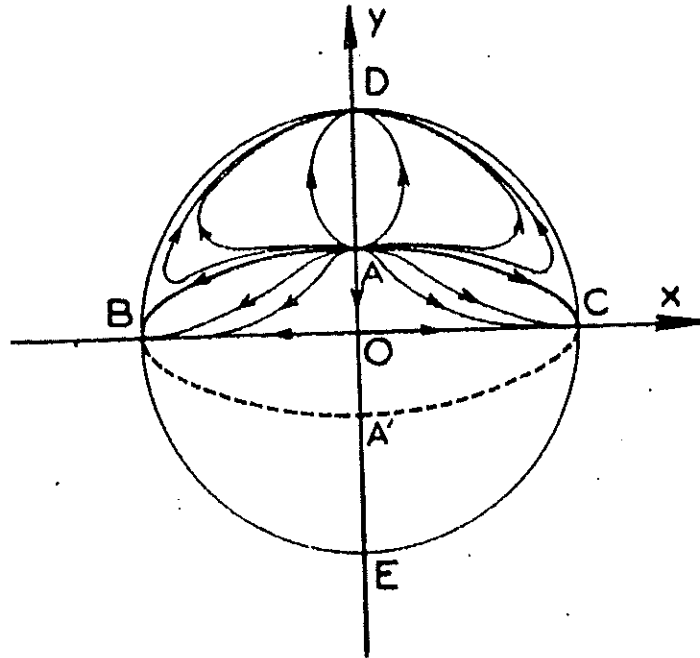
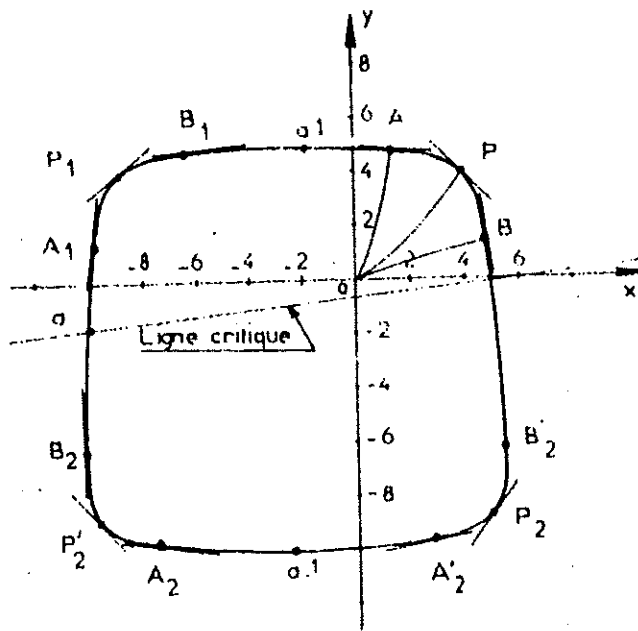


Figure 6



— Figure 7a —



— Figure 7b —

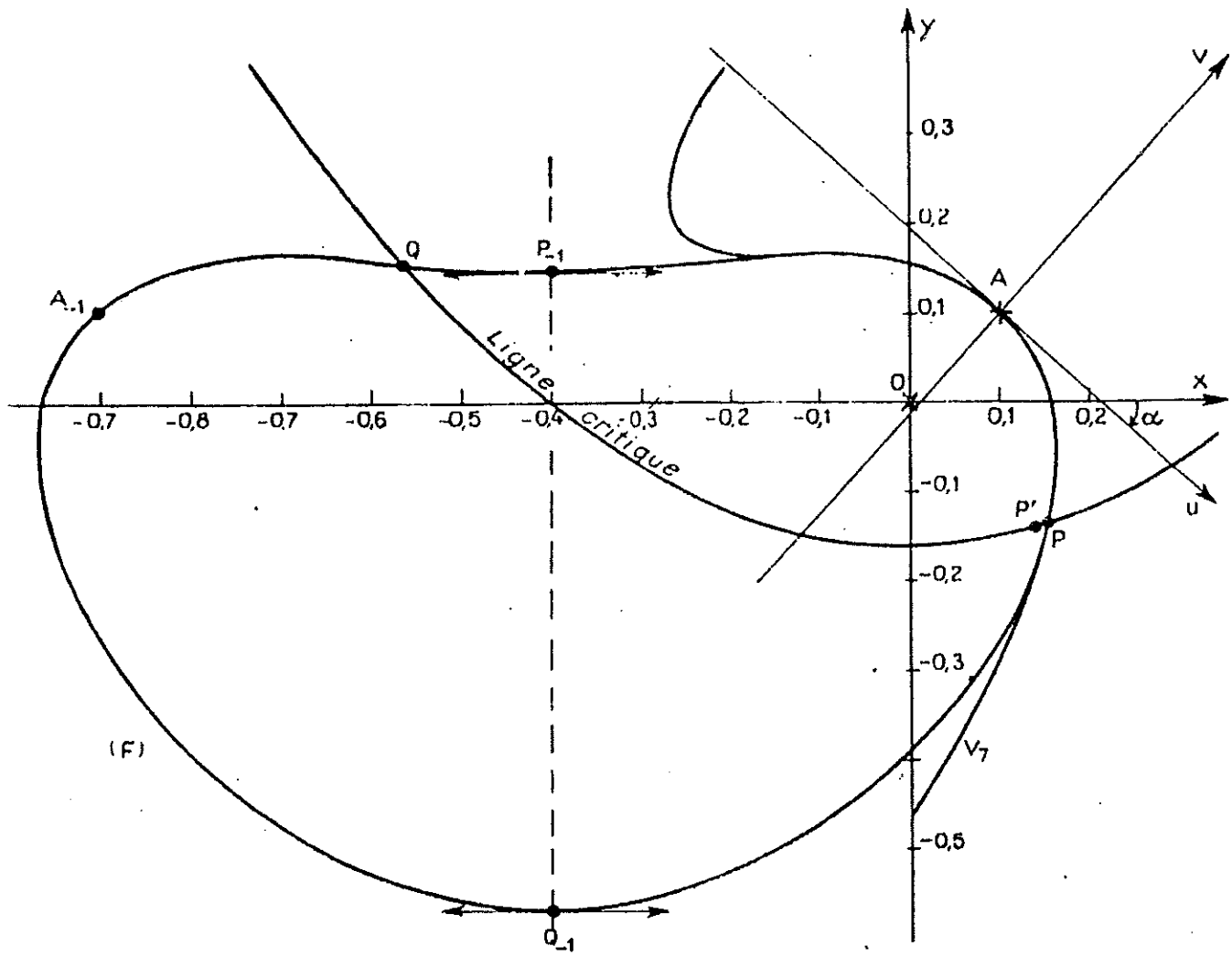


Figure 8

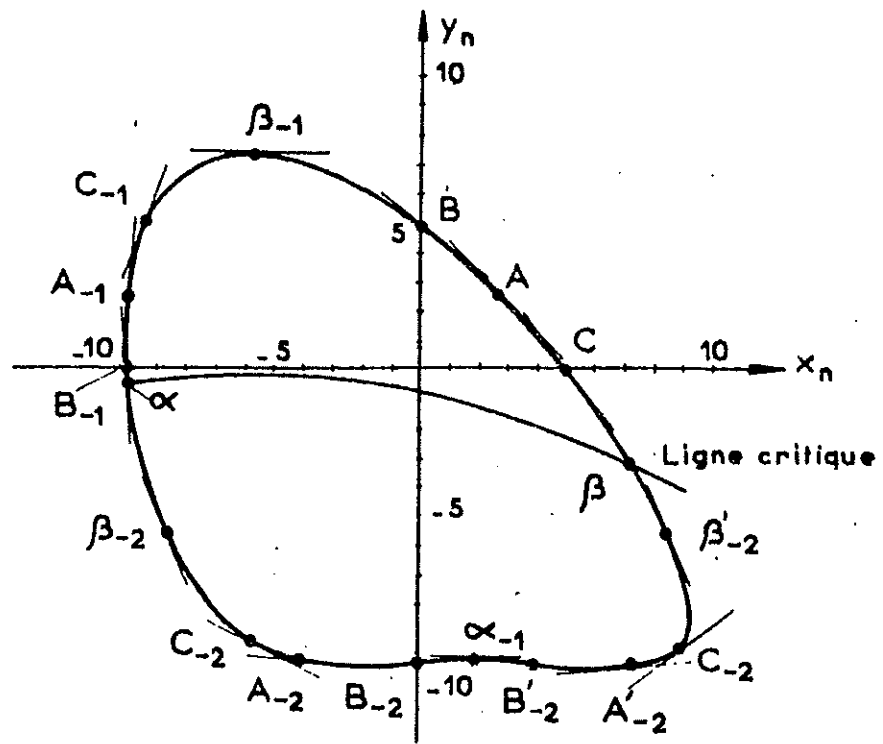


Figure 9

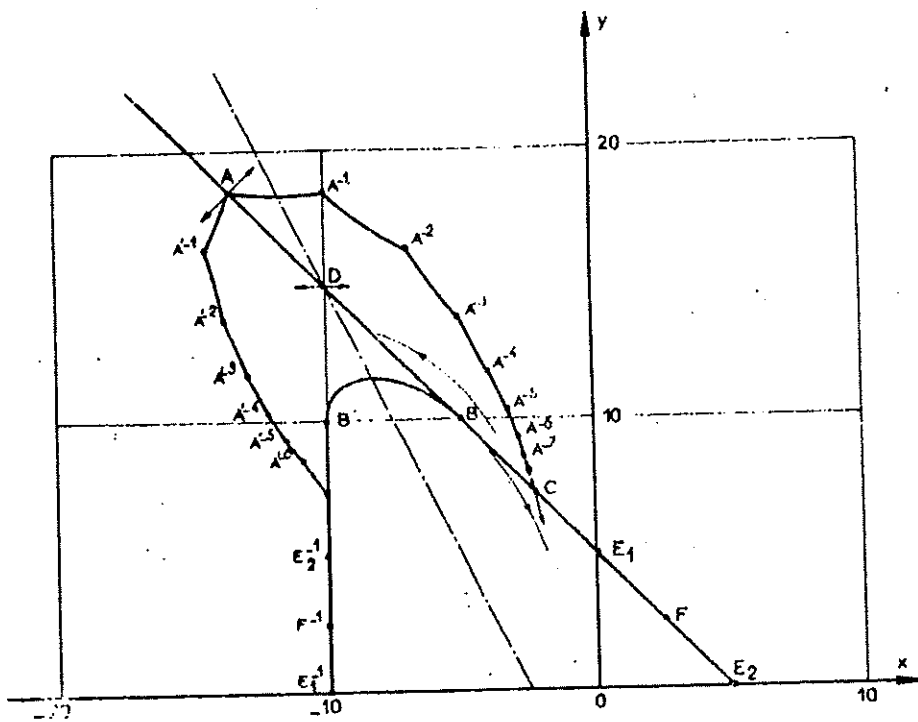


Figure 10

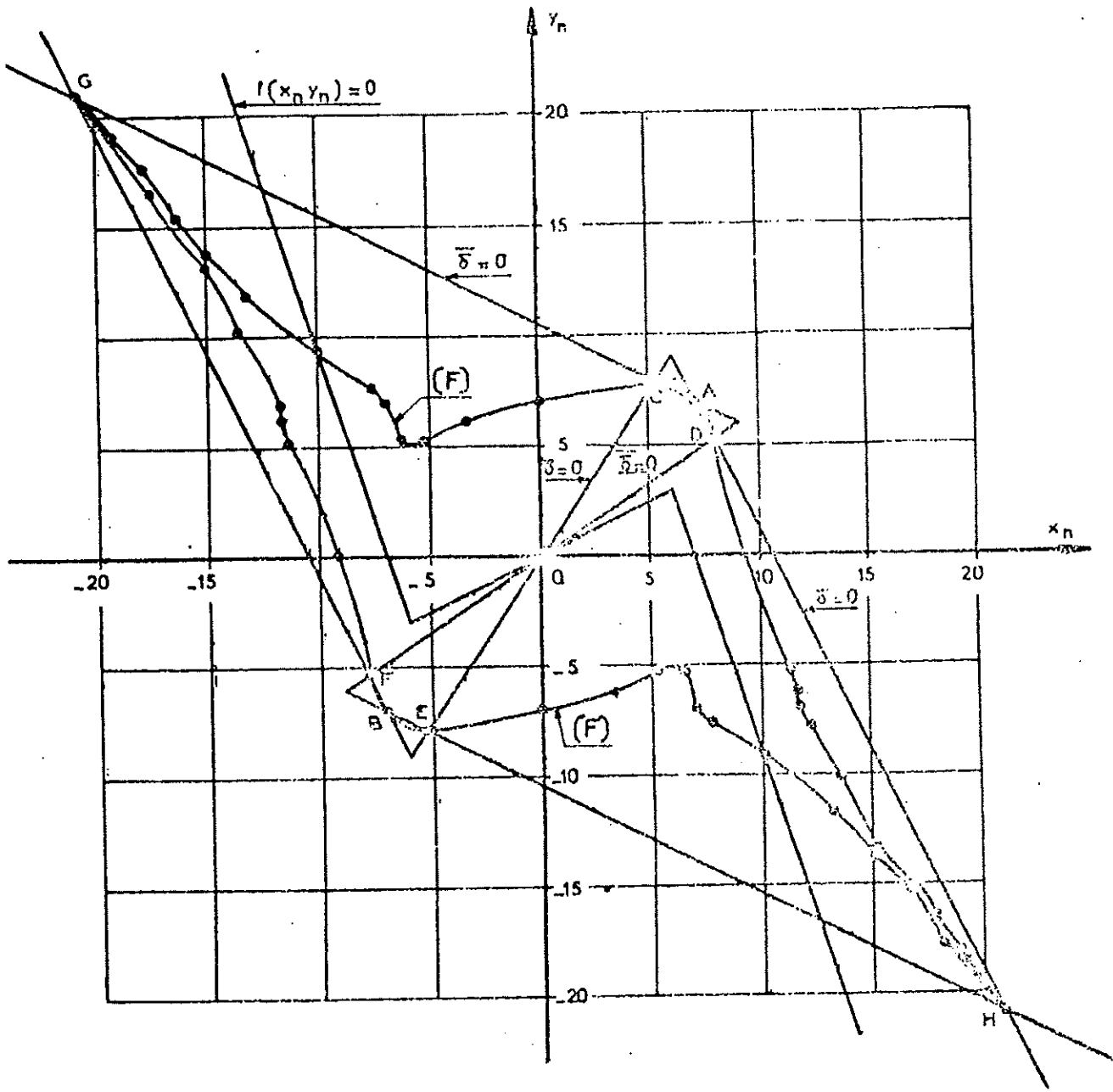
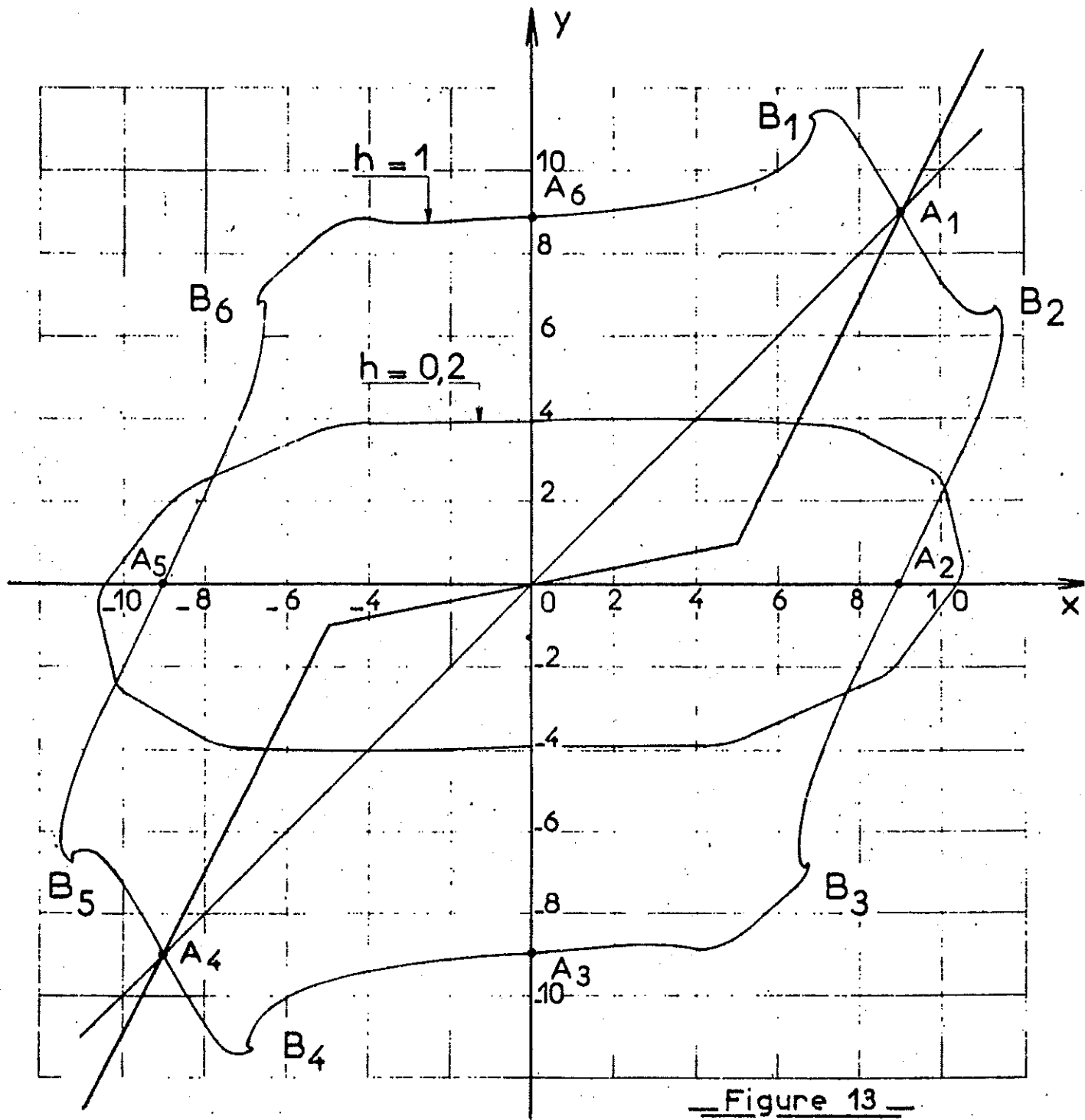


Figure 12



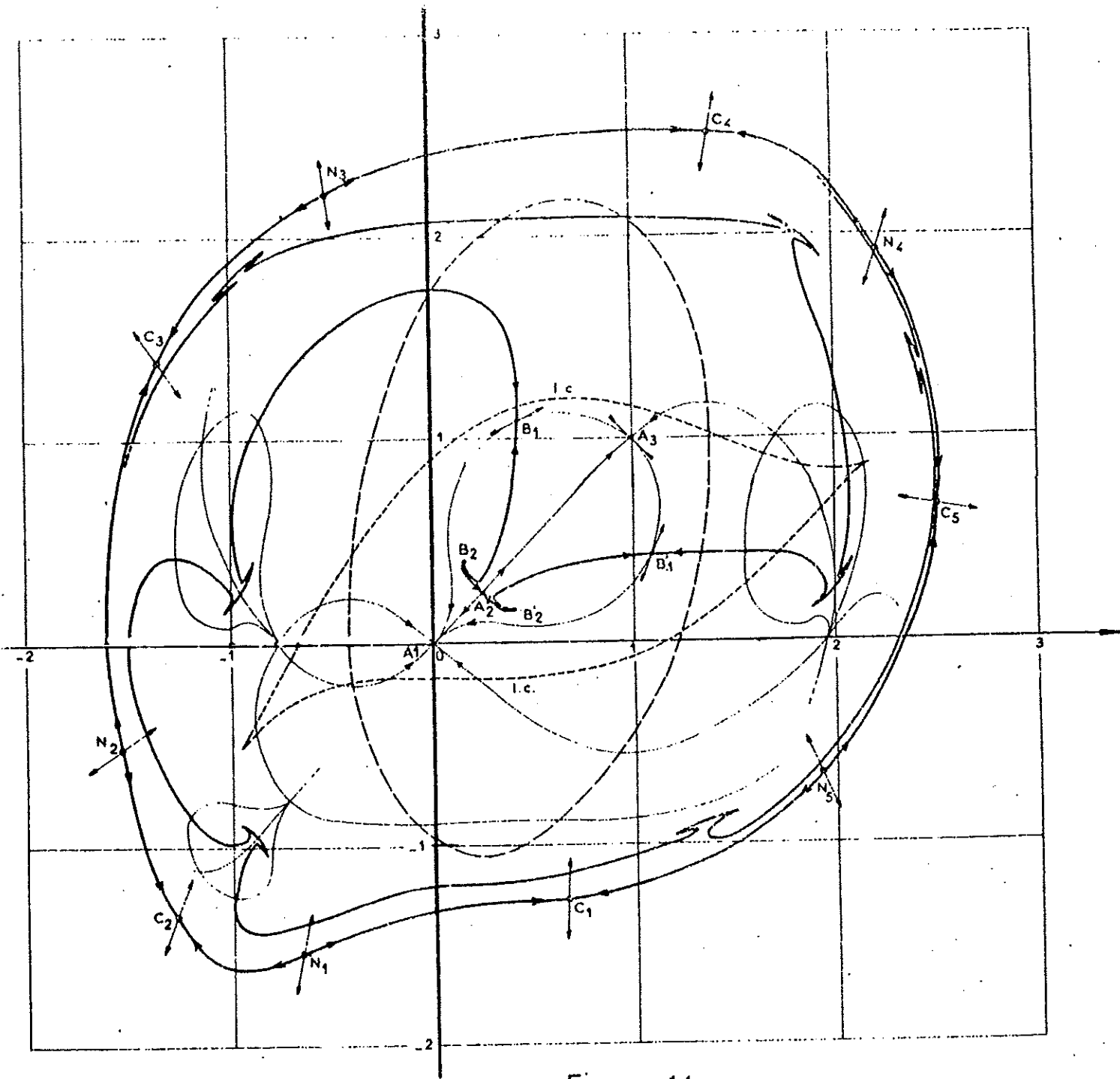


Figure 14

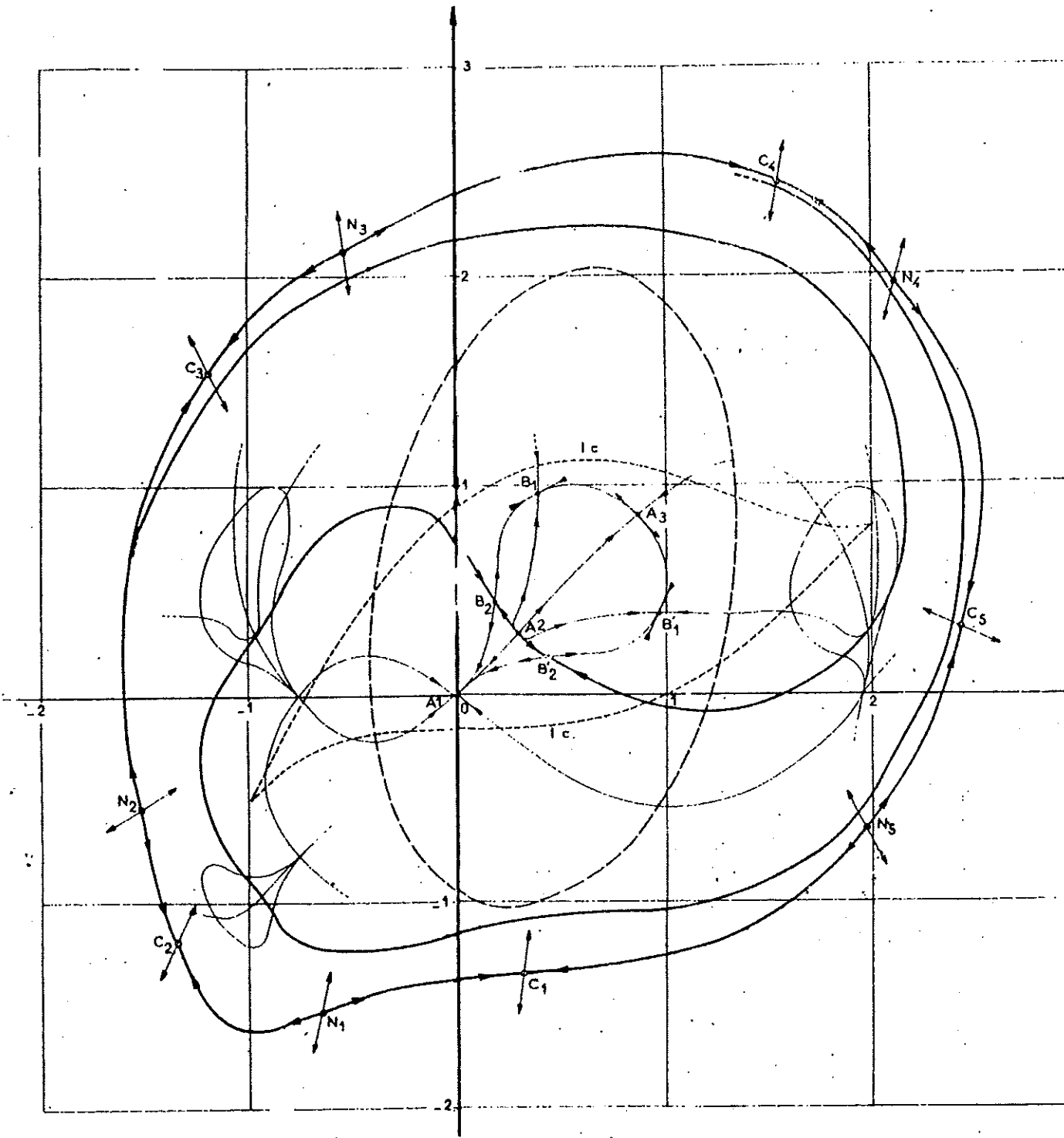


Figure 15