Examen d'Histoire et Méthode des Sciences

Lundi 3 Septembre 2007

Licence L_2 mathématique et informatique

AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ,
AUSSI LES RÉPONSES NE SONT PAS UNIQUEMENT DANS LE TEXTE !

Questions relatives au texte d'André Lamouche

1°) Définissez en quelques mots ce qu'est l'induction. (1 point)

L'induction est un mode de raisonnement selon lequel une « vérité » générale est extraite d'un nombre estimé suffisant d'observations : c'est l'induction amplifiante.

2°) Selon Lamouche, que risque un mathématicien œuvrant uniquement par déduction ? (2 points)

Selon Lamouche, l'induction est source féconde pour l'avancée des mathématiques ; il lui attribue un rôle prépondérant, s'appuyant pour cela sur l'opinion d'Henri Poincaré. L'induction permet la sélection, le choix d'une voie, d'une hypothèse plutôt qu'une autre. L'induction ne résulte pas d'une méthodologie mais est liée à l'intuition du scientifique émanant directement de sa capacité créatrice : sans induction, c'est-à-dire sans intuition, pas de choix, donc pas de premier pas. Lamouche étaye son argumentation par des références à des grands mathématiciens du début du XX^e^ siècle. Aussi le mathématicien refusant l'induction prend le risque d'être stérile.

3°) En quoi diffère l'induction mathématique de l'induction physique ? (3 points)

L'induction est toujours liée à une quelconque simplification du problème. Que ce soit en mathématiques ou en physique, un problème trop général entraînera le scientifique dans l'impasse, le nombre des difficultés étant trop grand pour être surmonté. Il importe alors deux choses :

(a) être capable de « pressentir » quelle voie — quel enchaînements d'arguments — conduira à la solution ;

(b) déterminer les « bonnes » hypothèses simplificatrices sur lesquelles va reposer la démonstration.

C'est peut-être sur le côté simplificateur que la nature de l'induction peut différer en mathématiques et en physique. En mathématiques, ces hypothèses ont pour objectif unique de restreindre le problème à un problème résolvable, sous-entendu avec les connaissances actuelles. En physique, ces hypothèses sont de surcroît assujetties à l'adéquation avec les évidences observationnelles. Le physicien doit donc développer une faculté d'adéquation avec le monde réel — ce qui fait si souvent défaut aux mathématiciens —, faute de quoi, aussi belle que puisse être sa démonstration, celle-ci sera portée aux oubliettes par la moindre réfutation expérimentale. En physique, cette énergie investie dans la traduction des contraintes de la nature en hypothèses « plausibles » se traduit souvent par une moindre sophistication de la démonstration à proprement parler.

4°) En quoi consiste l'expérience à laquelle le scientifique (mathématicien ou informaticien) devrait faire appel dans sa pratique de la recherche ? (2 points)

L'expérience dont il est fait mention ici fait référence aux compétences acquises par le scientifique : sa connaissance du sujet, des techniques mathématiques ou algorithmiques, ses succès antérieurs, etc. Plus que les résultats en eux-mêmes, les concepts, les astuces, les enchaînements constituent une base que seule la pratique de la recherche permet d'acquérir.

5°) Donnez selon vous et en vous aidant de ce qui a été vu en cours, en quoi consiste la part de l'expérience, de l'intuition, de l'individu et de la culture dans la pratique de la recherche ? (5 points)

Lors de la pratique de la recherche, plusieurs « qualités » contribuent à la découverte, et ce de manière inextricable comme l'avait déjà signalé Claude Bernard à propos de l'induction et de la déduction. L'intuition si difficilement transmissible, est liée aux choix des techniques à mettre en œuvre, des hypothèses simplificatrices à poser. Ces choix sont guidés tant par la capacité à posséder une vision globale du problème qu'à une « expérience » de la confrontation aux problèmes : ici intervient la psychologie de l'individu — sa persévérance, sa créativité, la gestion de son angoisse face à l'absence de réponse, sa volonté de s'engager dans l'inconnu — et sa culture, son environnement. Par leurs histoires, des scientifiques sont enclins à être des logiciens, d'autres des intuitifs ou, plus prosaïquement, certains sont analytiques (Cartésiens !) et d'autres sont des « bidouilleurs ». Leur méthaphysique imprégnera l'esprit de leurs travaux : aussi les œuvres de Kepler regorgent de mysticisme et de pythagorisme alors que celles de Newton — tout du moins celles publiées — sont d'une implacables logique mathématique. Aucun doute que les milieux sociaux très différents de ces deux scientifiques ont une influence non négligeable sur la nature des démonstrations : exhaltées pour l'un, d'une rigueur froide pour l'autre. S'il est possible de réduire, *a posteriori*, toute théorie a son contenu purement scientifique, leur découverte — et par là-même, tout processus de recherche — résulte d'une interaction complexe entre expérience, intuition, personnalité et culture de l'individu.

La méthode générale des sciences pures et appliquées

par André Lamouche (1924) [1]

Les mathématiques sont considérées souvent comme purement déductives ; et certaines écoles de mathématiciens ont même essayé de les ramener à la logique pure. H. Poincaré est un des savants qui ont le plus contribué à mettre au point cette importante question. Il a montré que le raisonnement mathématique participe dans une certaine mesure de la nature du raisonnement inductif, et que c'est par là qu'il est fécond. Ce processus est nettement prépondérant dans l'invention mathématique ; mais il intervient dans la démonstration aussi : « *Dans la démonstration elle-même la logique n'est pas tout ; le vrai raisonnement mathématique est une véritable induction, différente à bien des égards de l'induction physique, mais procédant comme elle du particulier au général* [2]. »

Elle diffère notamment de l'induction physique en ce qu'elle présente un caractère de *rigueur absolue* ; elle doit ce privilège à sa nature purement *quantitative* d'abord (qui, contrairement à l'induction qualitative ou causale, ne comporte l'introduction d'aucune *hypothèse nouvelle*, explicite ou implicite) ; en outre elle a toujours subi préalablement, sur la forme-type soumise ensuite à la généralisation (par voie de récurrence par exemple), la *vérification* qui est nécessaire pour légitimer toute induction ; et cette même vérification reste d'ailleurs en général possible, à un degré quelconque de l'induction supposée indéfiniment prolongée de proche en proche.

La possibilité logique, on l'a vu, déborde la possibilité physique ; mais même en se situant délibérément dans la seule possibilité logique, un choix reste à faire entre les innombrables combinaisons possibles ; qu'il s'agisse de combinaisons dissociatives pour parvenir à des schémas simples, adoptés ensuite comme fondements d'une science abstraite, ou de combinaisons associatives enrichissant sans cesse le domaine de cette science. Ce simple choix impose déjà à l'ensemble des sciences mathématiques un dessin général consistant ; il anime cet ensemble et l'adapte à nos grandes fonctions constitutives : « *En réduisant la pensée mathématique à une forme vide*, écrit H. Poincaré, *il est certain qu'on la mutile [...]. Parmi toutes les constructions que l'on peut combiner avec les matériaux fournis par la logique, il faut faire un choix ; le vrai géomètre fait ce choix judicieusement, parce qu'il est guidé par un sûr instinct, ou par quelque vague conscience de je ne sais quelle géométrie plus profonde, et plus cachée, qui seule fait le prix de l'édifice construit.* »

Ce « sûr instinct » n'est autre chose que l'*intuition*. Nous voyons donc, à côté de la pure logique déductive, se manifester nettement l'activité créatrice et sélective de cette faculté fondamentale, dans l'*induction* d'abord où elle joue un rôle capital, et d'autre part dans le *choix* des combinaisons à retenir parmi toutes celles qui sont logiquement convenables. Un grand nombre de savants modernes ont contribué à mettre en évidence cette importance essentielle de l'intuition dans les mathématiques, notamment MM. Poincaré, Tannery, Painlevé, E. Picard, Borel, etc.

Chaque mathématicien emprunte d'ailleurs plus ou moins, selon son tempéramment, à la logique ou à l'intuition ; et H. Poincaré distingue à ce sujet « *deux sortes d'esprits, les logiciens comme Weierstrass par exemple, les intuitifs comme Riemann* ». Mais les uns et les autres *concourent* en fait à l'élaboration de la science, de telle sorte qu'*il nous faut résigner à la diversité des esprits, ou mieux il faut nous en réjouir* ». C'est en effet dans l'*ensemble* de l'œuvre collective que se réalisera progressivement, par apports successifs, l'*accord* nécessaire entre la logique et l'intuition.

En fait, cet accord n'est complet et équilibré, nous l'avons vu, que sous la forme ternaire obtenue en y incorporant l'*expérience*. Son rôle dans la genèse des sciences mathématiques se manifeste dès l'origine, en prenant une part efficace au choix des schémas fondamentaux [...].

Ce n'est pas seulement dans le choix des schémas, mais aussi dans la définition des opérations fondamentales de la science, que l'expérience intervient pour décider, parmi toutes les définitions logiquement

[1] A. Lamouche, *La méthode générale des sciences pures et appliquées* Gauthiers-Villars, 1924.

[2] H. Poincaré, *Science et Méthode*, Flammarion, 1908.

possibles, celle qui sera finalement adoptée. Seule l'expérience, par exemple, peut justifier la définition de la somme géométrique de deux vecteurs telle qu'elle est donnée couramment.

Cette question du rôle de l'expérience dans la genèse des sciences mathématiques a mis longtemps aux prises les deux théories extrêmes : la théorie rationaliste et la théorie empiriste. La première méconnaissait trop radicalement, et l'autre exagérait sans doute ce rôle. L'argument le plus puissant de la dernière était l'adéquation parfaite des mathématiques à la réalité, que confirment chaque jour les progrès des sciences expérimentales et appliquées. La notion de la méthode psychologique unique des sciences, et de l'accord fonctionnel invariable sur lequel elle repose, rend au moins aussi nettement compte de cette adéquation progressive, tout en mettant l'expérience à sa véritable place dans la genèse générale des sciences considérées.

Si d'ailleurs le rôle de la logique pure est assez facile à caractériser et à délimiter dans les sciences mathématiques, les parts respectives de l'intuition et de l'expérience sont moins aisées à différencier nettement. Dans les données premières de la géométrie par exemple, H. Poincaré éprouve une grande difficulté à distinguer la part de l'expérience et celle de l'intuition, la part de l'individu et celle de la culture ; il finit cependant par accorder la prépondérance à cette dernière.