

MÉMOIRE

présenté

à la FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

en vue de l'obtention de

L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : Physique
Spécialité : énergétique

par

Christophe LETELLIER

SYSTÈMES DYNAMIQUES COMPLEXES :
de la caractérisation topologique à la modélisation

soutenu le 28 Janvier 1998

Membres du jury

- **Alain Arnéodo**, Directeur de Recherche C.N.R.S. à l'Université de Bordeaux 1
- **Vincent Croquette**, Directeur de Recherche C.N.R.S. à l'Ecole Normale Supérieure de Paris
- **Robert Gilmore**, Professeur à l'Université de Drexel, Philadelphie, USA
- **Pierre Glorieux**, Professeur à l'Université de Lille 1
- **Gérard Gouesbet**, Professeur à l'I.N.S.A. de Rouen
- **James Kadtke**, Professeur à l'Université de Californie de San Diego, USA
- **Michel Ledoux**, Professeur à l'Université de Rouen
- **Fabrice Neveu**, Ingénieur de Recherche, Peugeot-Citroën SA

Je tiens à remercier **Alain Arnéodo**, **Pierre Glorieux**, **Robert Gilmore**, **James Jadtke**, **Vincent Croquette**, et **Michel Ledoux** d'avoir eu la gentillesse de porter un regard critique sur ce travail.

Je tiens à remercier plus particulièrement

Fabrice Neveu pour avoir cru en ce paradigme du chaos et pour avoir contribué au financement de mes recherches par le groupe PSA,

Jack Hudson (Université de Virginie), **Bernard Cousyn** et **Thierry Duverger** (Groupe Peugeot-Citroen), **Nikolai Rulkov** (Université de Californie), **Robert Buchler** (Université de Floride), **François Lusseyran**, **Esteban Saadjian** et **Jean-Christophe Leprevost** (LEMTA de Nancy), **Gérard Bonhomme** (LPGMI de Nancy), **Bruno Chéron**, **Bruno Maheu** et **Christophe Dumouchel** pour avoir contribué aux nombreuses applications de la théories de la dynamique des Systèmes à des systèmes physiques réels que nous avons réalisé,

Luis Aguirre (Universidade Federal de Minas Gerais) et **Reggie Brown** (Université de Californie) pour leurs discussions stimulantes sur les techniques de reconstruction,

Gérard Gouesbet pour les discussions stimulantes sans lesquelles ce manuscrit ne serait pas ce qu'il est et la grande liberté dans les orientations de ce travail dont j'ai toujours disposé,

Henri Labro et **Jérôme Godelle** pour être des collègues de bureau très compréhensifs et qui contribuent à une atmosphère de travail particulièrement appréciable ; des parties de ce mémoire sont directement issus de leur travail,

Jean Maquet, **Siefried Meunier-Guttin-Cluzel** et **Lois Le Sceller** qui ont largement contribué aux résultats présentés dans ce mémoire.

ainsi que tous les membres du LESP¹ pour leur contribution à l'atmosphère agréable du laboratoire.

¹ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Energétique des Systèmes et Procédés, UMR 6614 CORIA, Université et INSA de Rouen, Place Emile Blondel, BP 08, 76131 Mont Saint-Aignan cedex

Que restera-t-il demain des écrits des savants ?... Seulement le mal qu'ils ont dit de ceux qui les ont précédés. On se souvient de ce qu'ils ont détruit dans la théorie des autres, mais ce qu'ils échafaudent eux-mêmes sera immanquablement détruit, ridiculisé même par ceux qui viendront après. Telle est la loi de la science [...]

Ce qui me fascine dans les sciences, c'est que j'y trouve la poésie suprême ; avec les mathématiques, le grisant vertige des nombres ; avec l'astronomie, l'énigmatique murmure de l'Univers. Mais de grâce, qu'on ne me parle pas de vérité !

Amin Maalouf, Samarcande

Table des matières

1	Introduction historique	7
2	Caractérisation topologique	15
2.1	Introduction	15
2.2	Principe	16
2.2.1	Application de premier retour	18
2.2.2	Ordre unimodal	18
2.2.3	Plan symbolique	21
2.2.4	Validation du patron	22
2.3	Systèmes équivariants	24
2.3.1	Justification physique	24
2.3.2	Dans l'espace des phases	26
2.3.3	Dans le domaine fondamental	29
2.4	Applications	31
2.4.1	Simplification de la dynamique symbolique	31
2.4.2	Analyse de circuits électroniques	33
2.5	Perspectives	37
2.5.1	Codes de Gauss	37
2.5.2	Identification des nœuds et liens	38
3	Reconstruction de champs de vecteurs	39
3.1	Introduction	39
3.2	La méthode	41
3.2.1	Principe	41
3.2.2	Problème du choix de la variable mesurée	51
3.2.3	Prise en compte d'un paramètre de contrôle	51
3.2.4	Systèmes non-autonomes	53
3.3	Applications expérimentales	56
3.3.1	Electrolyse du cuivre	57
3.3.2	Réaction de Belousov-Zhabotinskii	60
4	Applications aux Sciences Pour l'Ingénieur	65
4.1	Combustion turbulente	65
4.1.1	Le moteur à quatre temps	65
4.1.2	Espace des phases	68
4.1.3	Phases de la combustion	71
4.2	Instabilités de jets	73
4.2.1	L'atomisation	73
4.2.2	Caractéristiques du jet	75
4.2.3	Analyse de la dynamique du diamètre du jet	75
4.2.4	Extraction des orbites périodiques	77
4.2.5	Conclusion	78
4.3	Mélange	79

4.3.1	Données expérimentales	79
4.3.2	Reconstructions de la dynamique	80

Chapitre 1

Introduction historique

Certaines civilisations orientales comme l'ancienne civilisation chinoise prônent une appréhension globale de la Nature considérée comme holistique et harmonieuse. Selon cette conception, tous les éléments sont en interaction afin de produire un tout qui représente plus que la simple somme de ses composantes. Cette approche holistique a entravé le progrès scientifique de ces civilisations car elle rejette l'idée que l'on puisse étudier partiellement le monde en isolant le reste, comprendre la partie sans le tout.¹

La science occidentale, elle, repose essentiellement sur les approches développées par les Anciens grecs tels que Platon ou Aristote. Dans le *Timée*, Platon développe une cosmologie, représentation cohérente et rigoureuse de l'univers physique. A cette époque, ne sont accessibles à la connaissance que des entités permanentes, intemporelles ; or le monde n'est pas immuable et, pour être connaissable, son évolution même doit présenter un caractère de permanence se manifestant sous forme de causalité, stabilité et symétrie.² En posant les jalons de ce que va devenir la méthode utilisée dans toute recherche à visée scientifique, il en fixe également les limites : à partir d'un ensemble limité de présupposés ou d'axiomes (généralement indémontrables³), on cherche à vérifier une correspondance convenable et raisonnable entre les théorèmes, déduits à l'aide de règles d'inférence acceptées et reconnues par une communauté aussi large que possible, avec les données de l'observation. Les mathématiques sont alors l'instrument privilégié permettant d'exprimer certaines conséquences découlant des axiomes initialement posés. On comprend alors pourquoi le faible développement mathématique de l'époque ne permet aux Anciens grecs que l'observations des phénomènes réguliers, périodiques, soit le degré le plus bas de permanence. Ils développent alors une représentation du monde basée sur des figures géométriques simples : le cercle pour les mouvements et les polyèdres réguliers pour la théorie des éléments.

Pourtant la nature est complexe et ne se laisse pas toujours aborder à l'aide de concepts aussi simples. L'homme désigne alors ce qui ne peut être accessible à la connaissance par le terme *chaos*, du latin *chaos* emprunté au grec *khaos*, qui est introduit dans la langue française en 1377 par Christine de Pisan⁴. Dans la théologie païenne, le chaos représente la confusion générale des éléments avant leur séparation et leur arrangement pour former le monde⁵. Dans la Genèse, chaos est la traduction canonique en grec du terme hébreux *tohu-wa-bohu* (synonyme de pagaïe en allemand) apparaissant dans le premier chapitre de la Bible. *Wa* signifie *et*, et *bohu* certainement la même chose que *tohu*. Puisque ce mot apparaît pour la première fois dans la Bible et qu'il n'y a pas de tradition orale continue, nous ne pouvons pas être certain de ce que "tohu" signifie. Une analogie possible est "sens dessus-dessous". Dans son dictionnaire philosophique, Voltaire (1694-1778) fait une description de cette confusion existant avant la création : "*La terre était tohu-bohu, et le vent de Dieu était sur les eaux*". Dieu est alors vu comme "*l'Esprit organisateur*

¹J. D. Barrow, *La grande théorie*, Coll. Champs, Flammarion, Paris, 1991.

²Platon, *Timée*, introduction de L. Brisson, Coll. Champs, Flammarion, Paris, 1995.

³Ceci a été clairement établi par Kurt Gödel.

⁴Dictionnaire étymologique Larousse

⁵Paul-Emile Littré, Dictionnaire de la langue française, 1866

par qui le chaos s'ordonne"⁶, nous retrouvons le démiurge de Platon. Par la suite, le chaos est toujours associé à une incompréhension des choses, à l'impossibilité de formuler une quelconque loi organisatrice d'un phénomène apparemment inextricable. Par exemple, "Devant cet ensemble présenté par la Voie Lactée, ou les amas d'étoiles, ou les nébuleuses résolubles, la mécanique céleste reculait, parce qu'elle n'y voyait que le chaos"⁷. L'homme attribue naturellement un caractère divin à tout ce qu'il ne peut expliquer : Zeus, dieu de la foudre, perd toute sa crédibilité et cesse d'être invoqué dès lors que le phénomène auquel il est associé est expliqué⁸. Pourtant, ces hommes qui se gaussent des croyances antiques retrouvent toute leur superstition lorsqu'ils sont confrontés à un phénomène qui dépasse leur entendement et suscite quelque peur. Ainsi au XIX^e siècle, la chaomancie⁹, sorte de divination faite au moyen d'observation sur l'air, fait son apparition. Pourtant, en 1865, Victor Hugo¹⁰ le voit *comme tous les pêle-mêle, depuis les mêlées d'hommes qu'on nomme batailles jusqu'aux mêlées d'éléments qu'on nomme chaos*. Très inspiré, Victor Hugo¹¹ fait une description du chaos marin où l'on retrouve les ingrédients essentiels de ce que regroupe le terme scientifique *chaos* de nos jours :

Essayer de vous rendre compte de ce chaos. Il est le récipient universel, réservoir pour les fécondations, creuset pour les transformations. Il amasse, puis disperse ; il dévore, puis crée. Il reçoit tous les égouts de la terre, et il les thésaurise. Il est solide dans la banquise, liquide dans le flot, fluide dans l'effluve. Comme matière il est masse, et comme force il est abstraction. Il égalise et manie les phénomènes. Il se simplifie par l'infini dans la combinaison. C'est à force de mélange et de trouble qu'il arrive à la transparence. La diversité soluble se fond dans son unité. Il a tant d'éléments qu'il est l'identité. Une de ses gouttes, c'est tout lui. Parce qu'il est plein de tempêtes, il devient équilibre.

Le chaos, partout présent, dont la complexité est issue d'un nombre infini de combinaisons simples, est admirablement pressenti dans la description de Victor Hugo. Il faudra attendre le XX^e siècle pour une formulation plus scientifique.

Pourtant, dès le XV^e siècle, les théoriciens de Paris et d'Oxford distinguent le mouvement (*motus*) de sa vitesse (*latitudo motus on velocitus*). Il semble que c'est à Nicole Oresme (1323-1382), évêque de Lisieux et professeur en Sorbonne que revient l'idée vers 1350 de représenter les variations dans le temps d'une même quantité par une série de segments dont la longueur est proportionnelle à la quantité.¹² Certes Euclide utilisait déjà des longueurs pour représenter des grandeurs mais l'innovation d'Oresme fut de relier entre elles les extrémités : la première courbe exprimant la dynamique d'un système était née. L'apport de la physique de Galilée (1564-1642) consiste en l'étude du mouvement, et surtout du mouvement accéléré. Ainsi, au XVI^e siècle, Galilée introduit la possibilité de prédiction par le calcul et érige des lois mathématiques permettant les premières descriptions de phénomènes physiques tels que la chute des corps. Galilée développe une méthodologie vraiment scientifique ; il part des résultats expérimentaux pour comprendre les mécanismes et écrire des lois. C'est aussi avec Galilée que naît une nouvelle approche de la nature. Ainsi, dans son ouvrage *le Saggiatore* publié en 1623, il écrit :

*Le grand livre de la nature est écrit en langage mathématique.*¹³

Pour cela, il est aujourd'hui considéré comme le fondateur de la physique moderne. En effet, avant ses travaux, la physique était surtout qualitative. Dorénavant, l'antique Nature, organisation de substances, de formes et de qualités s'évanouit au profit d'une Nature neuve apparaissant comme un ensemble coordonné de phénomènes quantitatifs. L'une des premières réussites de cette nouvelle conception de la science réside dans les travaux de Johannes Kepler (1571-1630) qui rend caduque la

⁶Daniel-Rops, cité dans le Dictionnaire de la langue française, *ibid*.

⁷Henri Poincaré, *Science et Méthode*, Ed. E. Flammarion, Paris, 1908.

⁸par Benjamin Franklin au XVII^e siècle

⁹du sens de *khaos*, immensité de l'espace

¹⁰*in* Victor Hugo, *Les travailleurs de la mer*, GF-Flammarion, p. 361, 1980

¹¹*ibid.*, p. 368

¹²J. Dhombres, Le nombre et la matière, *in* Galilée : naissance de la physique, Cahiers de Science et Vie, p. 17, n°2, 1991.

¹³Galilée, *Dialogues*, Coll. Histoire de la pensée, Herman, Paris, 1997.

description des phénomènes célestes dans le système géocentrique, patiemment recensés par Tycho Brahé (1546-1601). Pourtant à cette époque, le système de Tycho Brahé était plutôt à la mode. Selon ce système, les planètes tournaient bien autour du soleil, mais le soleil lui-même tournait autour de la Terre. Nicolas Copernic (1473-1543), qui comme tous les humanistes de la Renaissance, était convaincu de la supériorité des connaissances des Anciens, redécouvre néanmoins l'hypothèse d'Aristarque de Samos : selon cet astronome grec du III^e siècle avant J.C., tout s'explique mieux si l'on admet que la Terre tourne à la fois sur elle-même et autour du Soleil. Reprenant cette prescription de Copernic et confrontant sans cesse ses résultats avec les observations de Tycho Brahé, Kepler comprend qu'il lui faut des données continues et non un ou deux points particuliers pour décrire les mouvements célestes. Il remet en cause le rôle divin et mathématise un peu plus la nature :

*Mon but est de montrer que la machine céleste n'est pas de nature divine et vivante mais une sorte de mécanisme d'horloge..., tout comme la plupart des nombreux mouvements sont dûs aux simples forces magnétiques et matérielles, juste comme tous les mouvements d'une horloge sont causés par un simple poids. Et je montre comment ces causes physiques sont données par des expressions numériques et géométriques.*¹⁴

Par ses travaux, Kepler ne se contente pas de résoudre le problème du mouvement de Mars (très mal décrit dans les autres systèmes) mais rejette aussi l'astronomie descriptive de Ptolémée et de Copernic en faveur d'une nouvelle astronomie fondée sur un raisonnement physique. Le cœur des arguments de Kepler repose sur sa conviction que les mouvements du système solaire ont des causes physiques. C'est Isaac Newton (1642-1727) qui convaincra de la supériorité du modèle de Kepler. De plus, c'est un caractère universel qui est amené par Newton qui unifie la mécanique terrestre (la chute des corps de Galilée) et la mécanique céleste (les lois de Kepler) autour de la loi de gravitation et de la relation fondamentale de la dynamique. La notion de force fait alors son apparition ainsi que le terme *dynamique* en 1642 (du grec *dunamikos*, de *dumanis*, force). Avec ce concept, l'univers se formalise maintenant selon principe de continuité, réintroduit à partir d'une connaissance des mathématiques antiques.

Avec la méthode des fluxions de Newton, c'est une étape cruciale qui est réalisée : un lien étroit est établi entre deux branches distinctes, le calcul différentiel et le calcul intégral. Mais Newton ne peut revendiquer seul la paternité de l'analyse différentielle et doit la partager avec Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Si Newton applique sa méthode des fluxions à la solution de problèmes physico-mathématiques et astronomiques, Leibniz dégage dès 1675 les principes du calcul différentiel, en expose l'algorithme et identifie le problème inverse au problème de l'intégration. Leibniz établit ainsi les liens étroits entre la dynamique et la statique en faisant naître la force vive d'une infinité d'impressions continues de la force morte. Dans cette relation, Leibniz obtient une parfaite équation entre cause pleine et effet entier. Le monde peut alors être écrit en langage mathématique sous la forme d'équations différentielles.

Cette synthèse de l'analyse différentielle est la principale découverte de Isaac Newton, celle qu'il crût indispensable de garder en secret et qu'il ne jugea pas souhaitable d'inclure aux *Principia Mathematica*¹⁵. Il en note pourtant toute l'importance :

*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*¹⁶.

ce que nous pouvons traduire en français moderne par

Quel que soit le nombre de variables impliquées, aux données correspondent des équations différentielles, et vice versa.

L'œuvre de Newton a une influence considérable sur le XVIII^e siècle. Que le monde puisse se résumer en une formule, car c'est ainsi que les meilleurs esprits de ce siècle interprètent les *Principia*, va constituer le leitmotiv de cette période. En effet, la théorie de la gravitation de Newton permet

¹⁴J. Kepler, 1605, cité in I. Petterson, *Newton's Clock - Chaos in the Solar System*, p. 62, Freeman, 1993.

¹⁵I. Newton, *Principia Mathematica*, (1687), nouvelle traduction, C. Bourgois, Paris, 1985.

¹⁶cité in V. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Ed. MIR, Moscou, 1980.

de décrire correctement les mouvements de cinq des six planètes alors connues (Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne). Newton remarque que les lois de Kepler sont obtenues dans le cadre d'un problème à deux corps, c'est à dire que seule l'action gravitationnelle du soleil est prise en compte pour le calcul des orbites planétaires. Il réalise que lorsqu'un troisième corps est introduit dans les calculs, des variations par rapport aux orbites de Kepler sont observées. Seule Mercure présente des écarts aux tables calculées et il faudra attendre la théorie de la relativité d'Albert Einstein (1879-1955) pour tenir compte des effets dûs à sa vitesse importante. Pourtant, il persiste une grande anomalie dans la description des corps célestes et elle est, paradoxalement, présentée par le satellite de la Terre, la Lune. Ce problème du mauvais accord entre théorie et observations du mouvement de la Lune mobilisera un grand nombre de scientifiques et plus particulièrement les trois grands mathématiciens que sont Alexis-Claude Clairaut (1713-1765), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) et Leonhard Euler (1707-1783). L'origine de la difficulté, déjà suspectée par Johannes Kepler, réside dans l'influence non négligeable de la force exercée par le Soleil sur la Lune en regard de celle exercée par la Terre. Après une concurrence acharnée, Clairaut démontrera que des termes d'ordre supérieur, auparavant négligés par Newton, doivent être pris en compte.

Par la suite, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) et Pierre Simon de Laplace (1749-1827) consacreront beaucoup de leur temps à ce problème des trois corps en interaction gravitationnelle. Après avoir mis en évidence une dérive de l'orbite de la Lune sur une période de plusieurs dizaines de milliers d'années, Laplace est conforté dans l'idée que les lois mathématiques sont capables de décrire l'évolution de l'Univers et, mieux, de la prédire. Ainsi, dans son essai philosophique sur les probabilités¹⁷, il écrit :

Nous devons donc envisager l'état présent de l'Univers comme l'effet de son état antérieur, et comme cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux des plus légers atomes : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.

C'est en fait deux aspects alors pensés comme indissociables qui sont ici affirmés par Laplace. Tout d'abord l'idée du *déterminisme*¹⁸ qui garantit un ordre des faits suivant lequel les conditions d'existence d'un phénomène sont déterminées de telle façon que, ces conditions étant posées, le phénomène ne peut pas ne pas se produire. Cette conception de l'Univers émane de la tradition classique. En effet, comme l'écrivait Cicéron :

*Rien ne se produit qui ne devait point se produire et, de plus, rien ne se passera qui ne trouvera pas dans la nature la cause efficiente de sa réalisation [...] S'il existait un homme dont l'âme pouvait discerner les liens qui joignent chaque cause à toute autre cause, alors certainement il ne commettrait jamais d'erreur dans ses prédictions. Car celui qui connaît les causes des événements futurs nécessairement sait ce que sera chaque événement à venir*¹⁹.

ce qui sera repris aussi bien par Leibniz :

*Que jamais rien n'arrive sans qu'il y ait une cause ou du moins une raison déterminante, c'est à dire quelque chose qui puisse servir à rendre raison a priori, pourquoi cela est existant plutôt que de toute autre façon.*²⁰

ou par Baruch Spinoza (1632-1677) :

*A toute chose doit être assignée une cause, c'est à dire une raison, pourquoi elle existe plutôt que non.*²¹

¹⁷Pierre Simon de Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1825, réédition par Christian Bourgois, Paris, 1996

¹⁸déterminisme, 1836, de *determinismus*, fin XVIII^e, in le Petit Robert.

¹⁹cité in J. Barrow, *La grande théorie*, Coll. Champs, Flammarion, Paris, 1991.

²⁰Gottfried Leibniz, *Théodicée*, I, §44, cité in la préface de Jean Largeault du recueil d'articles de René Thom, *Apologie du Logos*, coll. Histoire et Philosophie des Sciences, Hachette, Paris, 1990.

²¹Spinoza, *Ethique*, I, 11, *ibid.*

Ils sont convaincus que l'Univers est un tout et qu'il a une formule unique qu'une intelligence parfaite saisirait ; cette intelligence embraserait l'Univers dans toute ses parties. Laplace pense ainsi s'opposer au déterminisme théologique dans lequel le rôle de l'intelligence omnisciente est tenue par Dieu. Mais les spéculations de Laplace reposent sur l'existence d'une intelligence parfaite, comme le faisait Platon avec le démiurge, ce qui diffère peu d'une position théologique.

Le second aspect, alors considéré comme étant obligatoirement associé au déterminisme, réside dans la prédictibilité de la succession des événements à partir de conditions initiales et des lois d'évolution. En effet, Laplace précise que grâce à l'analyse différentielle, cette intelligence n'aurait besoin que de connaître la vérité absolue de l'Univers à un instant donné ; de là, elle serait capable de déduire l'évolution de l'Univers à tous les instants, passés ou futurs. De plus, Laplace réfute l'existence de phénomènes aléatoires :

Le hasard n'a donc aucune réalité en lui-même : ce n'est qu'un terme propre à désigner notre ignorance [sur la manière dont les différentes parties d'un phénomène se coordonnent entre elles et avec le reste de la nature.] La notion de probabilité tient à cette ignorance...²²

D'un point de vue technique, Laplace contribue au développement du calcul intégral et à l'emploi de nouveaux outils (équations différentielles, équations aux dérivées partielles, calcul des variations, ...) poursuivant l'édifice de la mécanique céleste newtonienne et la mathématisation de la mécanique complétant d'importantes contributions apportées par Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) et Gaspard Monge (1746-1818) qui contribuent à la définition des règles de résolution des équations différentielles. Laplace a aussi montré que la loi de Newton suffit à expliquer les irrégularités observées à l'époque dans les mouvements de la Lune. Après lui, tout le passé et l'avenir du système solaire devenaient calculables et ne dépendaient plus que de la précision avec laquelle on pouvait déterminer ses conditions initiales. La première brèche dans la conception de l'Univers de Laplace provient du fait qu'il oublie qu'écrire les équations est une chose, les résoudre une autre. Pourtant, Leibniz et Euler avaient déjà compris qu'il n'était pas toujours possible d'intégrer des équations différentielles

A cette époque, le problème des trois corps, la description des mouvements de trois points matériels s'attirant selon la loi de Newton, pose déjà de sérieuses difficultés. Il est déjà ramené à la résolution de douze équations différentielles ; ce sont les classiques équations de Lagrange de la mécanique céleste. Ce système est alors la base de toutes les études sur ce problème et, en particulier, des travaux d'Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877). Dans un premier temps, ceux-ci confortent les idées de Laplace. En effet, parallèlement aux calculs de John Couch Adams (1819-1892), Le Verrier prédit l'existence, la position et la masse de la planète Neptune uniquement par des calculs à l'aide de la loi de Newton confrontés à des irrégularités observées dans le mouvement d'Uranus. Après l'observation de cette nouvelle planète dont la position réelle est trouvée à moins de deux degrés d'arc de ses prédictions, Le Verrier poursuit l'étude des systèmes linéaires entreprise par Laplace, mais surtout, il se pose la question de l'influence des termes non-linéaires qu'avait, en première approximation, négligés Laplace. Toutefois, ses méthodes de calcul ne lui permettent pas d'établir des résultats systématiques sur l'importance de ces termes non-linéaires car la convergence de ses approximations dépend des conditions initiales.

Une idée novatrice sera apportée par l'astronome George William Hill (1838-1914). Alors que Lagrange et beaucoup d'autres partent de trajectoires elliptiques issues de l'interaction gravitationnelle de deux corps (la Terre et la Lune) qui sont ensuite perturbées étape par étape afin de déduire l'effet perturbateur du troisième corps (le Soleil), Hill part d'une solution particulière : une solution périodique simple du problème à trois corps. Cette orbite périodique, solution qui inclut déjà l'influence perturbatrice du Soleil, est voisine de l'orbite réellement décrite par la Lune. Il superpose ensuite des petites perturbations et des dérives permettant un meilleur accord avec les observations du mouvement de la Lune. Par cette voie, Hill réduit considérablement le travail requis par le calcul des orbites lunaires grâce à des séries qui convergent plus rapidement.

Mais c'est Henri Poincaré (1854-1912) qui apportera des avancées décisives sur ce problème. De par son approche originale, Henri Poincaré introduit un grand nombre de techniques nouvelles dans

²² cité in Amy Dahan Dalmedico, *Le déterminisme de Pierre Simon de Laplace et le déterminisme aujourd'hui*, Chaos et déterminisme, Points Seuil, Paris 1992.

l'étude des équations différentielles. Ces techniques constituent maintenant une base importante de l'analyse des solutions de ces équations à l'aide de l'outil informatique. Rappelons d'abord que les équations différentielles représentent la réalité comme un continuum évoluant de manière continue d'un instant à l'autre. Par essence, ces expressions définissent la relation qui doit apparaître entre les valeurs des variables telles que la position et la vitesse sur un intervalle de temps infiniment petit. Comme le décrit Poincaré :

Au lieu de considérer dans sa globalité le développement progressif d'un phénomène, on cherche simplement à relier un instant à l'instant immédiatement précédent ; on suppose que l'état réel du monde dépend seulement du passé le plus récent, sans être directement influencé, pour ainsi dire, par la mémoire du passé lointain. Remerciant ce postulat, plutôt que d'étudier directement un phénomène dans son évolution globale, on peut se limiter à l'écriture de ses équations différentielles.

Le problème se résume alors à intégrer ces segments infinitésimaux afin de déduire les relations décrivant l'évolution d'un phénomène à partir d'un état initial jusqu'à son état final. Malheureusement, ces équations sont très souvent difficiles voire impossibles à intégrer. Puisqu'il est difficile d'obtenir une solution particulière, Henri Poincaré souhaite investir l'ensemble des solutions à la fois. Pour cela, sa stratégie est d'utiliser l'espace des phases introduit par William Rowan Hamilton (1805-1865). Il reprend donc l'étude des termes non-linéaires apparaissant dans la description des mouvements célestes étudiés par Le Verrier. Il se retrouve, lui aussi, confronté à un phénomène aux solutions inextricables dotées d'une importante *sensibilité aux conditions initiales* :

Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à un instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.

Par là même, Henri Poincaré établit que, bien que les équations représentent le système des trois corps en interactions gravitationnelles et qu'elles fournissent une relation entre temps et position, il n'existe pas de relation explicite afin d'établir une prédiction précise de la position dans le futur. Le dogme de la prédictibilité est d'ores et déjà mis en brèche. Nous y reviendrons plus tard. La renommée d'Henri Poincaré repose effectivement sur sa contribution au problème des trois corps. C'est dans le cadre d'un concours international qu'il précise ses recherches sur le problème des équations de la dynamique d'un système à trois corps. En 1885, Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), de l'Université de Stockholm, décide d'organiser un concours afin de remettre un prix récompensant une découverte importante dans le domaine de l'analyse mathématique, et ce le 21 Janvier 1889, jour du 60^{ème} anniversaire de la naissance du roi de Suède, Oscar II. L'un des sujets posés par Karl Weierstrass (1815-1897) porte sur la stabilité du système solaire. Henri Poincaré aborde ce problème dans le cadre restreint du problème des trois corps et soumet un épais manuscrit (plus de 200 pages) intitulé *Sur le problème du mouvement des trois corps*. Par ce travail, il apporte doute et incertitude sur un déterminisme toujours prédictible, concept cher à Weierstrass qui, dans une lettre à Mittag-Leffler, jugera favorablement le travail de Poincaré :

Vous pouvez dire à votre souverain que ce travail ne peut vraiment pas être considéré comme établissant la solution complète à la question posée, mais qu'il est néanmoins d'une telle importance que sa publication inaugurerait une nouvelle voie de l'histoire de la mécanique céleste. L'issue que sa Majesté avait en vue lors de l'ouverture de la compétition peut par conséquent être considérée comme étant atteinte.

Cette nouvelle voie de l'histoire de la mécanique céleste sera en fait à la base du paradigme de la théorie des systèmes dynamiques non-linéaires. Avec l'introduction d'un nouveau paradigme, le domaine du connaissable s'est élargi en admettant les lois du changement comme entités permanentes. La notion de permanence apparaît alors intrinsèquement liée à la période d'observation des phénomènes. Les systèmes chaotiques nécessitent des temps d'observation relativement longs afin de mettre en évidence la nature stable, permanente, de leur évolution. L'identification de ces lois d'évolutions est intimement liée à la notion d'observation continue introduite par Tycho Brahé et à la disposition de longues séries de mesures puisque qu'à petites échelles temporelles, presque tout est linéaire.

Cette propriété de linéarité a assuré le succès de la perspective occidentale appréhendant la Nature comme un phénomène linéaire où ce qui survient à un endroit et à un moment donné est déterminé exclusivement par ce qui s'est produit à proximité. La conception holistique, elle, considère la Nature comme intrinsèquement non-linéaire, de sorte que les inférences venues d'ailleurs prédominent et interagissent entre elles pour constituer un ensemble complexe. Cette approche occidentale n'était pas inconsiderée. Simplement, elle était prématurée.

Chapitre 2

Caractérisation topologique

2.1 Introduction

A la fin du XIX^e siècle, Henri Poincaré remarque que la compréhension profonde d'un système dynamique non linéaire est liée à l'identification de ses orbites périodiques instables [115]. Après ces résultats novateurs, les travaux d'Henri Poincaré restent sans conséquences durant une bonne cinquantaine d'années pour au moins trois raisons : la première guerre mondiale décime l'école française empêchant à l'héritage légué par Henri Poincaré d'être reçu, l'avènement de la mécanique quantique mobilise une grande partie de la communauté scientifique jusqu'à la seconde guerre mondiale et le développement des ordinateurs afin de rendre pragmatique les concepts introduits par Henri Poincaré ne sera effectif qu'après la seconde guerre mondiale. Aussi est-ce au début des années 60 avec le développement du calcul numérique que Edward N. Lorenz propose son modèle simplifié de la convection [102] et redécouvre l'approche de Henri Poincaré. Les ordinateurs sont maintenant suffisamment puissants pour lui permettre d'intégrer son système et d'en visualiser les trajectoires dans l'espace des phases alors assimilé à l'espace des états. Depuis, des comportements chaotiques ont été décelés dans de nombreux systèmes dynamiques et l'extraction des orbites périodiques instables est devenue une réalité. Aussi la caractérisation des attracteurs chaotiques est devenue un enjeu important de la dynamique des systèmes.

Il existe actuellement deux approches principales pour comprendre ou/et caractériser le comportement chaotique d'un système dynamique : l'approche métrique et l'approche topologique. L'approche métrique est basée sur l'étude des distances entre les points de l'attracteur chaotique. Il est alors usuel de calculer les exposants de Lyapunov [43], les dimensions fractales [63], etc. En règle générale, ces calculs requièrent de grands ensembles de données, sont gourmands en temps de calcul et sont peu fiables lorsqu'ils sont confrontés à la présence de bruit. L'approche topologique est plus récente. Elle est basée sur l'observation de deux mécanismes responsables de la création d'un attracteur chaotique : l'étirement et le repliement. Le phénomène d'étirement, qui implique la divergence de trajectoires initialement proches dans l'espace des phases, est responsable de la sensibilité aux conditions initiales. Le repliement, qui préserve la trajectoire d'une éjection hors d'un domaine borné de l'espace des états, est responsable du phénomène de récurrence caractéristique du comportement chaotique. Ces deux mécanismes structurent l'attracteur chaotique de manière unique autour du squelette d'orbites périodiques [36]. Cela signifie que si nous pouvons déterminer l'architecture de la structure des orbites périodiques, nous pouvons identifier les mécanismes d'étirement et de repliement.

La caractérisation topologique d'un attracteur chaotique est basée sur des invariants topologiques, principalement les nombres de liaisons [106], qui sont robustes sous des variations des paramètres de contrôle du système dynamique étudié. Dans les cas les plus favorables, la caractérisation topologique peut être associée à une dynamique symbolique reposant sur une partition génératrice de l'attracteur. Une telle approche est robuste face aux perturbations dues au bruit puisqu'elle implique essentiellement les orbites de faible période dynamique et parce qu'elle utilise des entiers qui sont peu sensibles aux erreurs de mesures [108]. Malheureusement, une telle

caractérisation est à l'heure actuelle uniquement disponible pour des systèmes dont l'espace des phases est tridimensionnel.

De manière à introduire cette caractérisation topologique, nous ferons appel à des systèmes numériques simples. La théorie des systèmes dynamiques non linéaires fait ainsi habituellement appel à deux systèmes : le système de Lorenz et le système de Rössler. L'attracteur généré par le système de Lorenz possède la particularité de présenter une symétrie axiale, ce qui en complique singulièrement la caractérisation. Dès 1976, O. E. Rössler [122] présente que les propriétés de symétrie constitue un problème. Aussi, soucieux de simplifier l'étude des systèmes chaotiques, il crée un ruban dépourvu de symétrie et générant un comportement chaotique analogue à celui observé pour le système de Lorenz, mais sans symétrie. Après avoir présenté brièvement le principe de la caractérisation topologique à l'aide du ruban simplement replié de Rössler, nous introduirons l'approche spécifique que requiert la caractérisation des systèmes nantis de propriétés de symétrie. Nous présenterons ensuite les difficultés rencontrées pour la caractérisation des systèmes décrits dans des espaces dont la dimension est supérieure à trois. Le cas des systèmes peu dissipatifs sera aussi abordé.

2.2 Principe

Ces dernières années, de nombreux travaux portent sur l'utilisation d'une description topologique des attracteurs chaotiques pour en obtenir une caractérisation très fine. Plus précisément, il est maintenant bien connu qu'un attracteur chaotique se développe autour d'un squelette d'orbites périodiques. La définition d'une partition génératrice et d'une dynamique symbolique ainsi que l'utilisation de la théorie des nœuds ont permis de comprendre la structure interne de ces étranges attracteurs. En effet, les orbites périodiques peuvent être vues comme des nœuds. Cette approche date essentiellement des premiers articles de J. Birman et R. Williams [15, 16] où l'attracteur généré par le système de Lorenz est analysé sous la forme d'une surface branchée, véritable support de nœuds. Cette surface branchée est appelée *patron* [87] ou *gabarit* [81, 82] selon les auteurs.

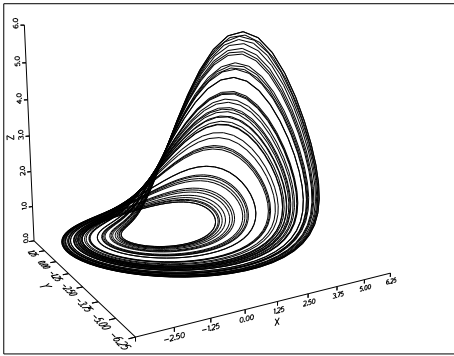


FIG. 2.1 – Ruban simplement plié proposé par O. E. Rössler : $(a,b,c)=(0.398,2,4)$

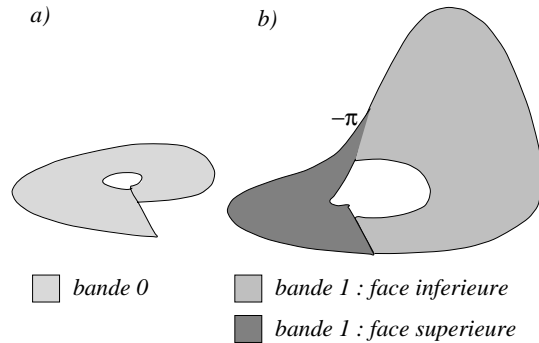


FIG. 2.2 – Décomposition en deux bandes de topologie différente de l'attracteur généré par le système de Rössler. $(a,b,c)=(0.398,2,4)$.

Nous introduirons le principe de la caractérisation topologique sur le système de Rössler qui constitue le système d'équations différentielles dont le comportement dynamique est le plus simple des comportements chaotiques. Il est de ce fait un bon candidat pour tester toute technique d'analyse avant de passer à des applications sur des systèmes plus exotiques. Le système de Rössler est constitué du système de trois équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (2.1)$$

où a , b et c sont des paramètres de contrôle. Pour des conditions initiales appartenant au bassin d'attraction, le comportement dynamique s'installe sur un ensemble invariant appelé *attracteur chaotique* dont une représentation est donnée FIG. 2.1 pour des valeurs $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$ des paramètres de contrôle.

L'attracteur généré par le système proposé par O. E. Rössler correspond à la configuration topologique la plus simple que peut adopter un attracteur chaotique. Il peut être vu comme un ruban simplement étiré et replié. Deux bandes de topologie différente peuvent être mises en évidence (FIG. 2.2) : une bande, située au centre de l'attracteur, est une bande très simple sans aucune torsion (FIG. 2.2.a) et une seconde bande, à la périphérie de l'attracteur, est pourvue d'un demi-tour et peut être assimilée à un ruban de Möbius (FIG. 2.2.b).

Nous avons ainsi distingué deux zones bien distinctes sur l'attracteur. Suivant R. Birman et J. Williams [15, 16], il a été montré [106, 108, 138, 104] qu'un patron qui encode les propriétés topologiques de l'attracteur peut être construit pour des systèmes tridimensionnels. Un tel patron est une représentation explicite d'un attracteur, schématisant la structure des différentes bandes. A partir de l'attracteur généré par le système de Rössler, un patron constitué de deux bandes peut être établi (FIG. 2.3.a). Le ruban est divisé en deux bandes, une sans torsion locale et l'autre pourvue d'un demi-tour (FIG. 2.3.b). En raison d'une convention d'insertion standard [104], les bandes doivent être réinjectées sur le ruban de l'arrière vers l'avant et de la gauche vers la droite. Par conséquent, une permutation entre les deux bandes est requise, impliquant le patron de la FIG. 2.3.b.

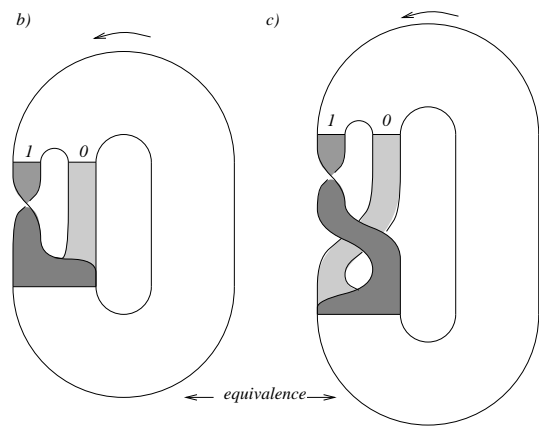


FIG. 2.3 – Patron de l'attracteur généré par le système de Rössler. Une permutation entre les deux bandes est requise pour satisfaire à la convention d'insertion standard. $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$.

Cette convention d'insertion permet une description sans ambiguïté du patron par une *matrice de liaisons* [104] comme suit. Les éléments diagonaux M_{ii} sont égaux à la torsion locale de chaque bande, soit le nombre de demi-tours subi par la $i^{\text{ème}}$ bande. Les éléments non diagonaux M_{ij} sont par ailleurs définis comme étant égaux aux nombres d'intersection entre la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ bande. Il est alors aisé de vérifier que le patron de l'attracteur généré par le système de Rössler est défini par la matrice de liaisons

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Nous pouvons remarquer que les torsions locales et les intersections sont orientées. En effet, une convention d'orientation des intersections est aussi requise. Pour un voyageur suivant l'une des trajectoires, une intersection positive est associée à une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre tandis qu'une intersection négative est associée à une rotation dans le sens trigonométrique (FIG. 2.4).

Chaque bande peut être dénommée par un symbole. Choisissons le symbole 0 pour désigner la bande sans torsion locale et le symbole 1 pour la bande pourvue d'un demi-tour. De cette manière, toute trajectoire peut être codée par une chaîne de symboles. En particulier, les orbites périodiques peuvent être codées de manière unique. Nous avons introduit ce que nous appelons une *dynamique symbolique*. Une telle dynamique symbolique nécessite la définition précise de la *partition génératrice* de l'attracteur qui est donnée par une *application de premier retour* à une section de Poincaré.



FIG. 2.4 – Conventions d'intersections

2.2.1 Application de premier retour

Une section de Poincaré P est définie comme une surface transverse au flot. Dans le cas présent, elle peut être définie par la relation suivante :

$$P_x \equiv \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_- = \frac{\sqrt{c^2 - (b^2 - 4ac)}}{2}, \dot{x} > 0 \right\} \quad (2.3)$$

où x_- est la coordonnée du point fixe central.

L'application de premier retour g de l'ensemble P_x à lui-même est alors construite à partir de la variable y (FIG. 2.5). Elle est constituée de deux branches monotones : une croissante associée à la bande sans torsion locale et une décroissante correspondant à la bande pourvue d'un demi-tour. Le point critique y_c tel que

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

définit la partition génératrice de l'attracteur. Ainsi, à chaque intersection y_i avec le plan de Poincaré correspond un code $C(y_i)$ tel que

$$C(y_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_i > y_c \\ 1 & \text{si } y_i < y_c \end{cases} \quad (2.5)$$

Les orbites périodiques sont ensuite extraites selon une méthode de retour au voisinage dans une section de Poincaré par un schéma de Newton-Raphson développé par P. Dutertre [42]. Les points périodiques de cette section de Poincaré sont alors codés. Une orbite de période q possède q points périodiques et est représentée par une chaîne S de q codes :

$$S = C(y_1)C(y_2)\dots C(y_q)$$

où les y_i représentent les coordonnées en y des points périodiques.

2.2.2 Ordre unimodal

Chaque point de période q est représenté par une séquence symbolique de q symboles. Le $i^{\text{ème}}$ point périodique d'une orbite de période q est associé à une chaîne

$$S_i = C(y_i)C(y_{i+1})\dots C(y_q)C(y_1)\dots C(y_{i-1})$$

L'ensemble des points périodiques est alors ordonné selon l'ordre unimodal [33, 64].

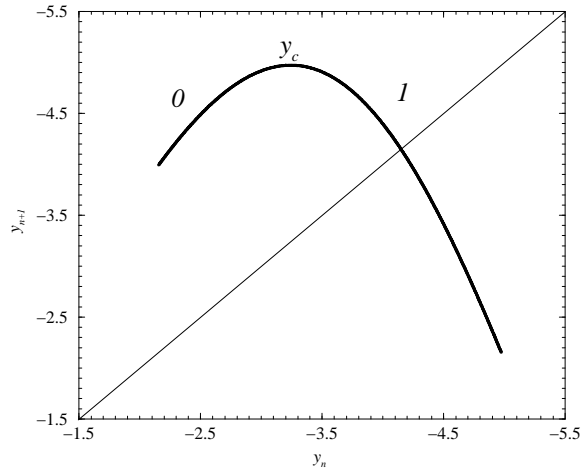


FIG. 2.5 – Application de premier retour du système de Rössler commandé par les paramètres $(a,b,c)=(0.398,2,4)$: 10000 intersections sont utilisées.

Définition 1 L'ordre unimodal \prec_1 sur l'ensemble des symboles $\Sigma_2 = \{0,1\}$ est défini comme suit.

Soient deux séquences symboliques

$$S_1 = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k\sigma_{k+1}$$

et

$$S_2 = \rho_1\rho_2\dots\rho_k\rho_{k+1}$$

où les σ_i et les ρ_j désignent les symboles. Supposons que $\sigma_i = \rho_i$ pour tout $i < k$ et que $\sigma_k \neq \rho_k$. Soit

$$S^* = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{k-1} = \rho_1\rho_2\dots\rho_{k-1}$$

la partie commune entre S_1 et S_2 . Nous posons qu'une chaîne $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{k-1}$ est paire (impaire) si la somme $\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i$ est paire (impaire) et que S^* est paire quand aucune partie commune n'est trouvée entre S_1 et S_2 . Alors, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{lll} S_1 \prec_1 S_2 & \text{si } S^* & \text{est paire et } \sigma_k < \rho_k \\ S_1 \prec_1 S_2 & \text{si } S^* & \text{est impaire et } \rho_k < \sigma_k \\ S_2 \prec_1 S_1 & \text{si } S^* & \text{est impaire et } \sigma_k < \rho_k \\ S_2 \prec_1 S_1 & \text{si } S^* & \text{est paire et } \rho_k < \sigma_k \end{array} \right.$$

Quand $S_1 \prec_1 S_2$, nous disons que la séquence S_2 implique la séquence S_1 .

Une orbite de période q sera désignée par la séquence symbolique (S_i) entre parenthèses qui implique les $(q - 1)$ autres séquences symboliques notées sans parenthèses. Cette séquence est ici appelée la *séquence orbitale*. Comme nous avons classé les points périodiques, les séquences orbitales peuvent être également classées entre elles suivant l'ordre unimodal. Ainsi, lorsqu'une séquence orbitale (S_2) implique une séquence orbitale (S_1), nous disons que (S_2) *force* (S_1) et nous notons ceci par (S_1) \prec_2 (S_2) où \prec_2 est l'ordre de forçage.

séquence	séquence	séquence
(1)	(1011111011)	(101111111)
(10)	(1011111010)	(101111110)
(1011)	(10111110)	(10111111010)
(10111010)	(10111111)	(10111111011)
(1011101010)	(1011111110)	(1011111)
(1011101011)	(1011111111)	(1011110)
(101110)	(10111111111)	(10111101011)
(101111)	(10111111110)	(10111101010)

TAB. 2.1 – Population d'orbites périodiques instables de l'attracteur généré par le système de Rössler commandé par les paramètres $(a,b,c)=(0.398,2,4)$: la dynamique symbolique est élaguée. Les orbites périodiques sont classées par ordre d'apparition sous augmentation du paramètre de contrôle a .

De cette manière, toutes les orbites périodiques sont ordonnées. La séquence orbitale qui force toutes les séquences orbitales associées aux orbites périodiques extraites d'un attracteur chaotique est appelée la *séquence principale*. Au sein de l'attracteur généré par le système de Rössler, la séquence principale (parmi les orbites de période inférieure à 12) est codée (10111101010) [89]. Toutes les orbites forcées par la séquence principale ont pu être extraites de l'attracteur. La population d'orbites périodiques est reportée TAB. 2.1. Remarquons qu'aucune orbite de périodes 3 et 5 n'existe sur cet attracteur. La population d'orbites périodiques ne contient donc pas toutes les orbites prédites par la dynamique symbolique à deux symboles : une telle population est dite *élaguée* [37] et les attracteurs chaotiques ne sont alors pas hyperboliques. Les orbites périodiques

peuvent être créées ou détruites lorsqu'un paramètre de contrôle est varié. Néanmoins, les orbites périodiques sont organisées comme elles le sont dans la limite hyperbolique puisque leurs invariants topologiques sont préservés sous variation des paramètres de contrôle. De ce fait, même si l'attracteur considéré n'est pas hyperbolique, le patron conserve toute sa signification physique de générateur de nœuds, une surface sur laquelle toutes les orbites périodiques instables peuvent être projetées par déformation continue sans modifier leurs propriétés topologiques. Il en résulte qu'un patron ne sera pas nécessairement équivalent à l'attracteur étudié puisqu'il génère l'ensemble des orbites périodiques prédites par la dynamique symbolique sur l'ensemble Σ_2 . Comme nous l'avons observé, ceci survient pour l'attracteur généré par le système de Rössler. En effet, certaines sous-séquences (telles que 00) ne sont pas présentes dans le tableau 2.1. Cette sous-séquence n'apparaît en fait qu'avec l'orbite de période 3 codée par la séquence symbolique (100) [42].

Les orbites dont la période est inférieure à 9 sont représentées FIG. 2.6 afin de visualiser en quel sens elles constituent le squelette de l'attracteur. La représentation offerte par ces orbites périodiques diffère peu de celle donnée par une trajectoire chaotique FIG. 2.1.

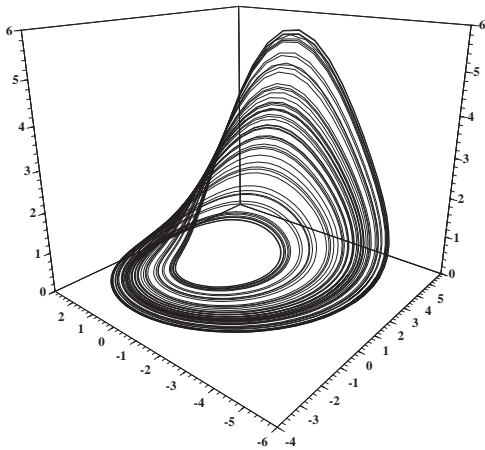


FIG. 2.6 – Population d'orbites de période inférieure à 9 comme squelette de l'attracteur.

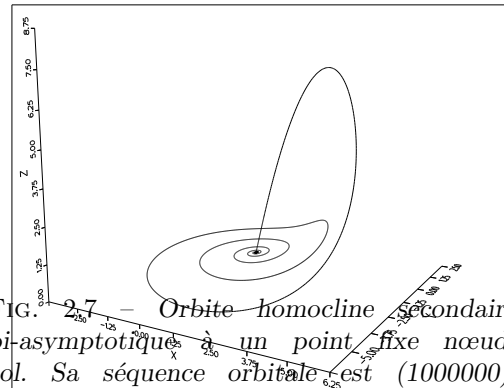


FIG. 2.7 – ~~Orbite homocline secondaire bi-asymptotique à un point fixe nœud-col. Sa séquence orbitale est (1000000).~~ Numériquement, cette orbite de période 7 est très peu distincte de l'orbite homocline principale décrite par la séquence symbolique infinie (10^∞) .

Lorsque le paramètre de contrôle a est augmenté, la population d'orbites périodiques croît impliquant un développement de l'attracteur. Nous avons observé que la dynamique du système de Rössler, pour $b = 2$ et $c = 4$, se développe selon l'ordre unimodal pour des valeurs de a comprises entre $a_H = 0.12496$ (bifurcation de Hopf) et $a_b = 0.43295$ (situation homocline secondaire). Après une bifurcation de Hopf survenant pour $a = a_H$, une cascade de doublements de période se développe jusqu'à un point d'accumulation ($a_\infty = 0.386$). Ensuite, conformément aux prédictions de la dynamique symbolique, une bifurcation nœud-col apparaît et une nouvelle cascade de doublements de période se développe à partir du nouveau cycle limite [42]. Il en va ainsi jusqu'à $a = a_b$ où survient une bifurcation non prévue par l'ordre unimodal : nous nous retrouvons en présence d'une orbite *homocline secondaire* de période 9. Une telle orbite se caractérise par le fait qu'elle quitte le point fixe central par sa variété instable et y revient par sa variété stable. Les implications de l'existence d'une telle orbite ont été traitées par L. Sil'nikov [128]. Une revue détaillée de cette approche est donnée par les travaux de P. Gaspard et G. Nicolis [49, 50], P. Glendenning et C. Sparrow ou bien A. Arnéodo *et al* [11]. Une orbite homocline secondaire de période 7 est représentée FIG. 2.7. Précisons que sur cette ligne de l'espace des paramètres définie par $b = 2$ et $c = 4$, il n'est pas possible d'observer l'orbite homocline principale de période infinie codée par la

séquence orbitale (10^∞).

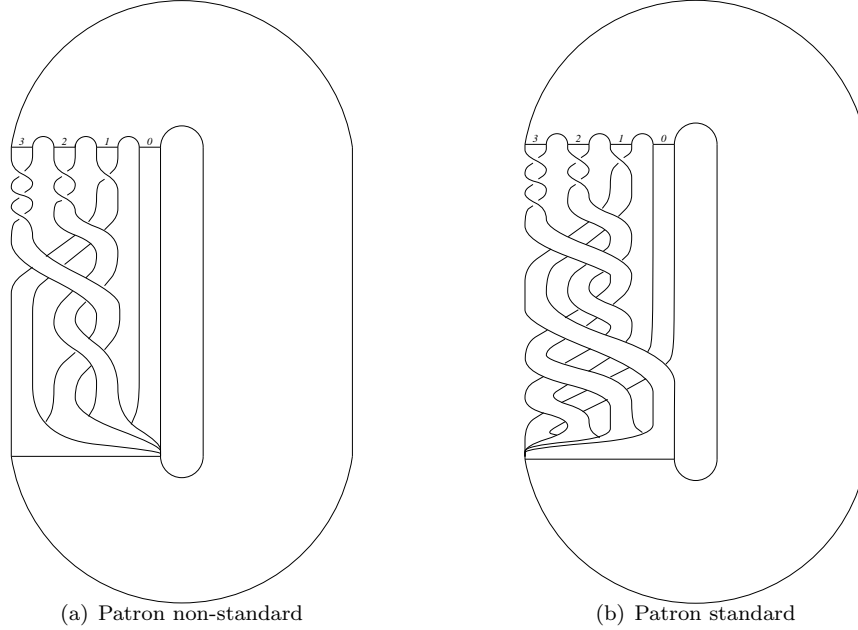


FIG. 2.8 – Patron de l'attracteur à quatre bandes généré par le système de Rössler.

En raison de cette configuration bien particulière, la dynamique n'évolue alors plus selon l'ordre unimodal. Une troisième branche monotone apparaît sur l'application de premier retour impliquant l'apparition d'une nouvelle bande dont la topologie est différente des deux premières. Un troisième symbole, 2, est alors nécessaire à la codification des orbites périodiques [87, 89]. L'introduction d'une troisième branche et, par conséquent, d'un deuxième point critique complique singulièrement l'évolution de la population d'orbites périodiques. En effet, des créations et des destructions d'orbites périodiques se produisent simultanément : nous ne sommes plus en présence de dynamiques monotones, c'est l'*antimonotonie* [40, 48]. Au fur et à mesure que le paramètre de contrôle augmente, de nouvelles branches apparaissent sur l'application de premier retour et de nouvelles bandes de topologies différentes sont identifiées sur l'attracteur. Nous avons obtenu une relation générale pour la matrice de liaisons associée à un patron à n bandes caractérisant le système de Rössler [87, 89] :

$$M_{ij}^n \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & \dots & \dots & -(n-2) & -(n-1) & -(n-1) \\ -1 & -2 & \dots & \dots & -(n-1) & -(n-1) & -n \\ -1 & -2 & \dots & \dots & -(n-1) & -n & -n \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

A titre d'exemple, le patron à quatre bandes est représenté FIG. 2.8.

2.2.3 Plan symbolique

Lorsque l'analyse est effectuée à partir de séries temporelles expérimentales, la population d'orbites périodiques ne peut être déterminée que dans les limites imposées par la quantité de données à disposition. En effet, dans de telles situations, la population d'orbites périodiques est rarement bien connue en raison de la quantité limitée de données et de l'influence des perturbations extérieures.

Comme l'ont montré N. Tufillaro *et al* [139], l'information disponible concernant la population d'orbites périodiques dépend crucialement de la longueur de la série temporelle. Par conséquent, la détermination de la séquence principale est plutôt imprécise lorsque la série temporelle est courte.

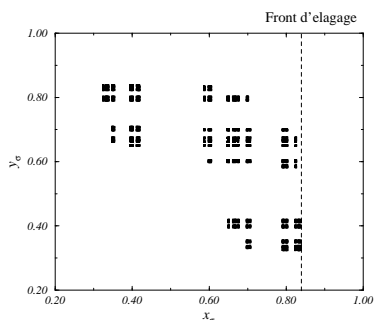


FIG. 2.9 – Plan symbolique associé à l'attracteur généré par le système de Rössler : la population d'orbites périodiques est gouvernée par l'ordre unimodal comme l'indique le front d'élagage estimé par une droite.

H. Fang [44, 45] a développé une procédure, également utilisée par N. Tufillaro *et al* [139], permettant la détermination du *front d'élagage* et, par là même, de la séquence principale. Cette procédure repose sur le fait qu'une trajectoire chaotique est associée à une chaîne de symboles

$$S = \dots\sigma_{-3}\sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$$

où σ_0 désigne le présent, σ_{-i} le passé et σ_i le futur ($i > 0$).

Des coordonnées symboliques définissent alors un plan symbolique. Elles sont construites sur le futur et le passé de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_\sigma(S) = \sum_{i=1}^D \frac{b_i}{2^i} & \text{où } b_i = \sum_{j=1}^i \sigma_j \pmod{2} \\ y_\sigma(S) = \sum_{i=1}^D \frac{c_i}{2^i} & \text{où } c_i = \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{-j} \pmod{2}, \end{cases} \quad (2.7)$$

où

$$S = \sigma_{-D}\dots\sigma_{-3}\sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots\sigma_D.$$

Si S est une chaîne infinie de symboles générée par une trajectoire chaotique, alors D est égal à l'infini dans les relations précédentes. Cependant, puisque nous ne sommes en possession que d'un ensemble fini de données, N. Tufillaro *et al* [139] ont utilisé une approximation du plan symbolique en fixant D à 16. De cette manière, nous pouvons utiliser une chaîne finie de symboles pour générer un ensemble de points du plan symbolique. Le plan symbolique associé à l'attracteur généré par le système de Rössler ($a = 0.398$, $b = 2$, $c = 4$) est représenté FIG. 2.9. Dans le cas d'une population d'orbites périodiques gouvernée par l'ordre unimodal, le front d'élagage est correctement estimé par une droite [44, 45].

La coordonnée symbolique x_σ du front d'élagage nous permet de déterminer la séquence principale. En effet, une fois déterminée les séquences orbitales des orbites périodiques, la séquence principale est associée à la séquence orbitale dont la coordonnée symbolique est la plus proche de celle du front d'élagage. Dans notre cas, le front d'élagage est situé en $x_\sigma = 0.8376$ tandis que l'orbite périodique dont la coordonnée la plus proche est égale à 0.8375 a pour séquence orbitale (10111101010) comme nous l'avions annoncé précédemment.

2.2.4 Validation du patron

Des patrons de l'attracteur généré par le système de Rössler ont été proposés au cours de ce chapitre. Ils doivent maintenant être vérifiés par comparaison entre les nombres de liaisons prédits par ces patrons et ceux comptés sur des *projections régulières*¹ de couples d'orbites périodiques.

Les nombres de liaisons sont des invariants topologiques qui permettent de caractériser des nœuds et des *liens*². Le nombre de liaisons est défini comme suit [74].

¹Par projection régulière, nous entendons une projection plane d'un couple d'orbites périodiques où chaque intersection ne met en jeu que deux segments d'orbites périodiques.

²Un lien est une collection disjointe de nœuds [74]. Nous pourrions désigner cet objet comme un entrelac.

Définition 2 Soient deux nœuds α et β définissant un lien $L = \alpha \cup \beta \subset S^3$. Soit l'ensemble $\alpha \cap \beta$ des intersections entre α et β sur une projection régulière, alors le nombre de liaisons est donné par

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \epsilon(p) \quad (2.8)$$

où ϵ est le signe de chaque intersection selon la convention usuelle, c'est à dire



Le nombre de liaisons $lk(\alpha, \beta)$ entre deux nœuds orientés α et β est par conséquent la demi somme algébrique de toutes les intersections de α avec β (les auto-intersections sont ignorées). Un nombre de liaisons donne une idée intuitive de combien de fois β tourne autour de α . Par exemple, le lien de Hopf, constitué par deux cercles liés comme le sont les anneaux d'une chaîne, présente deux intersections de même signe (\pm selon l'orientation choisie). Ainsi, selon une orientation positive,

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(1 + 1) = +1 \quad (2.9)$$

qui confirme la notion intuitive que chaque nœud tourne une fois autour de l'autre (FIG. 2.10).

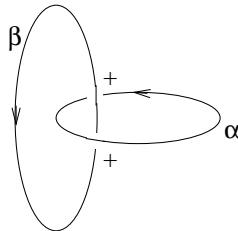


FIG. 2.10 – Le lien de Hopf :
 $lk(\alpha, \beta) = +1$.

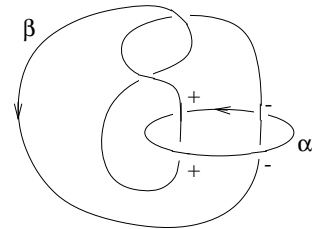


FIG. 2.11 – Le lien de Whitehead :
 $lk(\alpha, \beta) = 0$.

Nous pouvons cependant remarquer que le nombre de liaisons ne nous donne pas une information complète sur le fait que deux nœuds soient liés ou pas. Prenons l'exemple du lien de Whitehead : les deux nœuds sont liés bien que leur nombre de liaisons soit égal à 0 (FIG. 2.11). Par contre, nous pouvons concevoir qu'aucun des nœuds ne tourne autour de l'autre. Les nombres de liaisons sont des invariants topologiques sous des *isotopies ambiantes*³.

Avec L. Le Sceller et G. Gouesbet, nous avons montré que les nombres de liaisons pouvaient être déterminés de manière algébrique à partir de la matrice de liaisons [84]. La procédure est expliquée dans l'article qui est inclus dans le recueil de morceaux choisis, compagnon de ce mémoire. Ces prédictions peuvent être comparées avec les nombres de liaisons directement calculés sur des projections régulières de couples d'orbites périodiques. Par exemple, nous avons représenté FIG. 2.12 le cas du couple des orbites (1) et (1011). Les nombres de liaisons sont bien en accord. Des nombres de liaisons sont calculés pour plusieurs couples d'orbites périodiques de manière à réaliser une bonne vérification du patron. En fait, le nombre d'éléments de la matrice conditionne le nombre minimum de couples d'orbites périodiques à tester pour leur détermination ; il reste que ces éléments doivent être testés avec des orbites dont la période est au moins égale à 4 ou 5.

³Deux liens L et \tilde{L} sont dits équivalents sous une isotopie ambiante si il existe une homotopie $H_t : S^3 \rightarrow S^3$, $t \in I$ telle que H_0 est l'application identité, H_1 transforme L en \tilde{L} , et H_t est un homéomorphisme $\forall t \in I$.

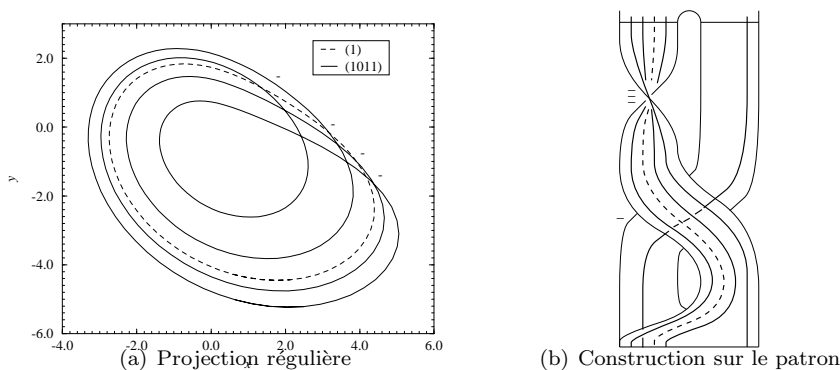


FIG. 2.12 – Projection régulière et construction sur le patron des orbites (1011) et (1). Dans les deux cas, le nombre de liaisons $lk(1011, 1)$ est trouvé égal à -2.

2.3 Systèmes équivariants

La procédure de caractérisation topologique d'un attracteur chaotique a été introduite dans la section précédente. Cette procédure est en principe valable pour tout champ de vecteur tridimensionnel. Pourtant, lorsque l'attracteur présente des propriétés de symétrie, une représentation plus efficace peut être donnée que celle offerte par la procédure générale. C'est cette procédure que nous nous proposons d'introduire maintenant.

2.3.1 Justification physique

Les équations proposées par E. Lorenz [102] décrivent la convection de Rayleigh-Bénard qui survient lorsqu'un fluide est placé dans une petite cellule dont la face inférieure est chauffée. Cette convection se développe à partir d'un état de repos si le nombre de Rayleigh est tel que les instabilités peuvent apparaître. Après avoir appliqué une troncature à quelques modes des équations du mouvement, E. Lorenz propose un système de trois équations différentielles ordinaires qui s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (2.10)$$

Ce système est fonction de trois *paramètres de contrôle* : le nombre de Prandtl σ , le rapport R du nombre de Rayleigh R_α sur le nombre de Rayleigh critique R_c et un paramètre $b = \frac{4}{1+a^2}$ qui est une fonction du rapport d'aspect (longueur sur largeur) de la cellule rectangulaire contenant les rouleaux. Une cellule rectangulaire permet d'orienter les rouleaux sans ambiguïté. Le rapport d'aspect est choisi de manière à minimiser la différence de température nécessaire à l'apparition des premiers rouleaux et correspond à $b = 8/3$.

Les trois variables adimensionnelles x , y et z ont les significations physiques suivantes :

x est proportionnelle à l'intensité du mouvement de convection. De manière à distinguer une rotation positive d'une rotation négative, nous prenons la convention suivante : lorsque $x > 0$, la rotation suit le sens des aiguilles d'une montre et lorsque $x < 0$, la rotation s'effectue dans le sens contraire.

y est proportionnelle à la différence de température entre les courants de la partie droite et les courants de la partie gauche du rouleau : elle est positive lorsque la partie gauche est plus chaude que celle de droite.

z est proportionnelle à la distorsion du profil de température par rapport au profil linéaire présent en l'absence de convection

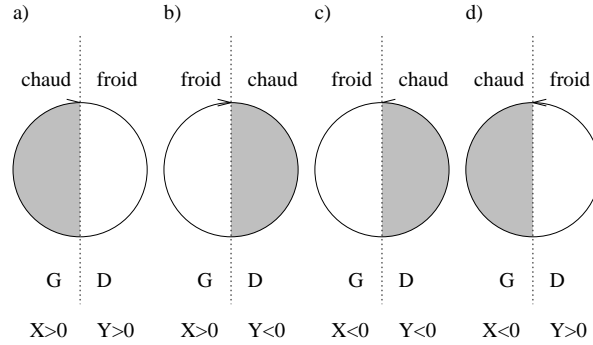


FIG. 2.13 – Quatre configurations de convection peuvent être distinguées suivant le signe des variables x et y . Néanmoins, seuls deux processus physiques distincts sont identifiés.

Suivant les signes des variables x et y , quatre configurations dynamiques sont obtenues (FIG. 2.13). Pourtant, il n'y a que deux processus dynamiques distincts. Lorsque x et y sont de même signe, le fluide chaud monte et le fluide froid descend, c'est la convection naturelle pilotée par la poussée d'Archimède. Lorsque x et y sont de signes opposés, c'est le fluide chaud qui descend et le fluide froid qui monte. La convection est alors pilotée par une instabilité hydrodynamique. Pour chacun de ces comportements dynamiques, nous avons donc deux configurations possibles qui sont physiquement équivalentes, l'une étant convertie en l'autre par un simple changement de convention de signes. Ceci peut être aisément compris à partir de la structure du système de Lorenz lorsque R est légèrement supérieur à 1. Pour une telle valeur de R , deux points fixes F_{\pm} sont donnés par

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{b(R-1)} \\ y = \pm\sqrt{b(R-1)} \\ z = R-1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Ce sont des points fixes du type foyer stable, c'est à dire que le comportement asymptotique dans l'espace des phases s'installe en spiralant sur l'un ou l'autre des points fixes selon les conditions initiales. Chaque point fixe correspond à une convection naturelle dont le sens de rotation dépend par conséquent des conditions initiales. Dans les deux cas, le processus physique mis en jeu est le même, la convection naturelle. De ce fait, dynamiquement parlant, les deux comportements asymptotiques sont identiques, ils ne doivent pas être distingués puisque physiquement équivalents.

Ces remarques sont en accord avec les équations puisque le champ de vecteurs \mathbf{f} défini par les équations de Lorenz est *équivariant*, c'est à dire qu'il vérifie la relation

$$\gamma\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\gamma\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

où le vecteur \mathbf{x} représente les trois coordonnées (x, y, z) et γ est la matrice définissant l'équivariance. Dans le cas du système de Lorenz, la matrice γ s'écrit :

$$\gamma \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Elle définit une rotation de $\pm\pi$ (le signe de la rotation est inessentiel). L'ordre de la symétrie est de deux puisque $\gamma^2 = \mathbf{I}$ où \mathbf{I} désigne la matrice identité. Lorsque $R > 24.74$, le mouvement asymptotique s'installe sur un attracteur chaotique qui présente une symétrie axiale (FIG. 2.14).

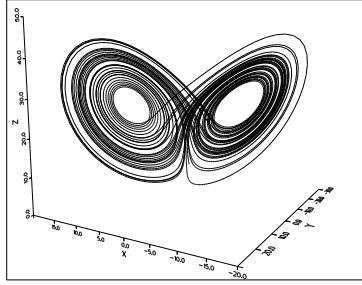


FIG. 2.14 – Attracteur généré par le système de Lorenz.

Nous allons maintenant développer la procédure de caractérisation topologique spécifique aux systèmes symétriques.

2.3.2 Dans l'espace des phases

La présence de propriétés de symétrie implique des considérations spécifiques pour l'analyse des propriétés dynamiques du système de Lorenz. Puisque le champ de vecteur \mathbf{f} associé aux équations de Lorenz est invariant sous l'action de la matrice γ , l'espace des phases peut être pavé par un domaine fondamental \mathcal{D} et une de ses copies $\gamma\mathcal{D}$ (remarquons que $\gamma^2\mathcal{D} = \mathcal{D}$). Dans le cas du système de Lorenz, le domaine fondamental peut être vu comme une des deux ailes : choisissons le domaine fondamental \mathcal{D} comme l'aile droite et la copie $\gamma\mathcal{D}$ de ce domaine comme l'aile gauche (FIG. 2.15).

Plus précisément, le domaine fondamental \mathcal{D} est séparé de sa copie par la surface \mathcal{S} invariante sous l'action de la matrice γ , soit

$$\mathcal{S} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -x\} \quad (2.14)$$

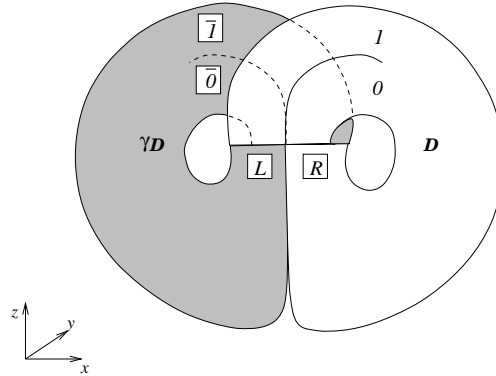
Le domaine fondamental \mathcal{D} peut alors être défini comme

$$\mathcal{D} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > -x\} \quad (2.15)$$

tandis que sa copie l'est comme

$$\gamma\mathcal{D} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < -x\} \quad (2.16)$$

Il doit être précisé que le choix de \mathcal{D} et de $\gamma\mathcal{D}$ est plutôt arbitraire et que, par conséquent, \mathcal{D} et $\gamma\mathcal{D}$ peuvent être intervertis.

FIG. 2.15 – Représentation schématique du domaine fondamental \mathcal{D} comme l'aile droite et de sa copie $\gamma\mathcal{D}$ comme l'aile gauche.

Par souci de clarté, nous devons introduire une dynamique symbolique sur l'ensemble de l'espace des phases avant de développer la procédure de caractérisation topologique spécifique aux systèmes symétriques. Une telle dynamique symbolique a été introduite par R. Birman et J. Williams [15, 16]. La partition génératrice qui lui est associée est représentée FIG. 2.15. Toutes les orbites périodiques peuvent être codées de manière évidente sur l'ensemble des symboles $\{L, R\}$ ⁴ suivant l'évolution de la trajectoire. Dans ce cas, un symbole est associé à chaque révolution de la trajectoire autour des points fixes F_+ ou F_- . La population d'orbites périodiques est reportée Table 2.2.

⁴ L pour gauche (left) et R pour droite (right).

Deux types d'orbites périodiques peuvent être distinguées. Les *orbites symétriques* (FIG. 2.16.a) qui sont globalement invariantes sous l'action de γ . Leurs séquences orbitales s'écrivent sous la forme (SS^*) où S^* est la chaîne conjuguée de S , c'est à dire que R est changée en L et *vice versa*. La période dynamique de telles orbites est par conséquent paire. Le second type d'orbites périodiques regroupe les orbites asymétriques (FIG. 2.16.b et c). Ces orbites apparaissent par paires et sont transformées l'une en l'autre sous l'action de la matrice γ , l'une étant la configuration symétrique de l'autre sous l'action de γ . Par exemple, l'orbite de période 3 codée (LRR) (FIG. 2.16.b) est transformée en l'orbite (RLL) (FIG. 2.16.c) sous l'action de γ . Leurs séquences orbitales sont conjuguées.

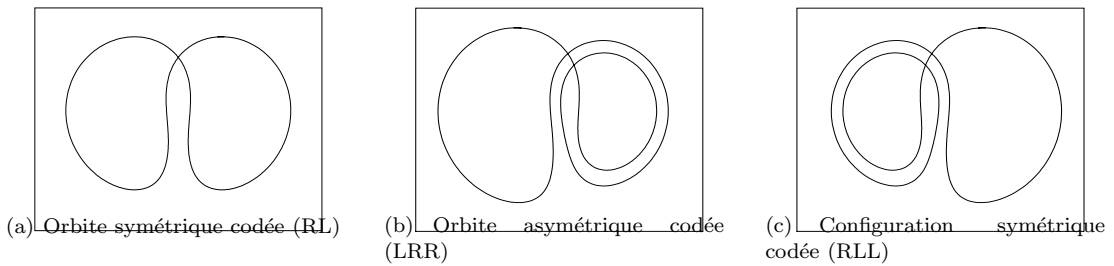


FIG. 2.16 – Orbites symétriques et paires d'orbites asymétriques.

Cette dynamique symbolique sur les symboles $\{L, R\}$ a été très souvent utilisée (par exemple par C. Sparrow [133]). Une telle dynamique symbolique n'est pas compatible avec une description prenant en compte les propriétés de symétrie des équations. De plus, selon cette description sur l'ensemble de l'espace des phases, les processus dynamiques de convection naturelle et d'instabilités hydrodynamiques ne sont pas distingués. Or nous avons vu qu'ils étaient aisément identifiables. Une description sur les symboles $\{L, R\}$ présente le double désavantage de ne pas distinguer ces deux comportements dynamiques (n'oublions pas qu'à terme, notre objectif est d'analyser les processus physiques) et de distinguer ce que la physique ne distingue pas, c'est à dire qu'elle considère qu'un rouleau de convection naturelle dont la rotation est trigonométrique est dynamiquement différent d'un rouleau dont la convection est en sens contraire. Ceci revient à dire qu'un même rouleau est différent vu de l'avant et vu de l'arrière!

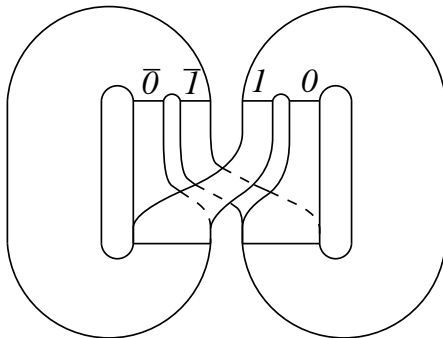


FIG. 2.17 – Double patron à quatre branches obtenu par séparation de chaque aile en deux bandes : l'une, codée 0 ou $0\bar{}$, est associée à la réinjection de la trajectoire dans la même aile alors que l'autre, codée par 1 ou $1\bar{}$ est associée à une transition d'une aile à l'autre.

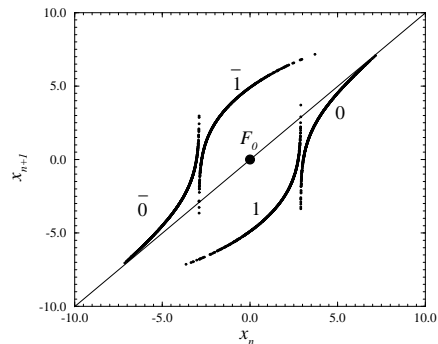


FIG. 2.18 – Application de premier retour à la section P_w construite avec la variable x . Chaque branche monotone est associée avec une bande du patron selon les symboles de l'ensemble $\{0\bar{}, 1\bar{}, 1, 0\}$.

La relation de symétrie impliquant quatre symboles deux à deux conjugués peut aussi être mise en évidence en construisant l'application de premier retour à la section de Poincaré

Espace des phases			Domaine \mathcal{D}
RL			1
$RLLR$			10
LRR	RLL		101
$RLLLR$			100
$RLLRLRRL$			1011
$LRRR$	$RLLL$		1001
$RLLLLRRR$			1000
$LRRLR$	$RLLRL$		10111
$RLLRLLRRLR$			10110
$LRRL$	$RLLRR$		10010
$RLLLRLRRRL$			10011
$LRRRR$	$RLLLL$		10001
$RLLLLLRRRR$			10000
$LRRLRL$	$RLLRLR$		101110
$RLLRLRLRRLRL$			101111
$RLLLRRLRRRLL$			100101
$LRRRLR$	$RLLLRL$		100111
$RLLLRLRRRRLR$			100110
$LRRRRL$	$RLLLLR$		100010
$RLLLLRLRRRRL$			100011
$LRRRRR$	$RLLLLL$		100001
$RLLLLLRRRRR$			100000

TAB. 2.2 – Population d’orbites périodiques extraite de l’attracteur généré par le système de Lorenz pour $R = 28$, $\sigma = 10$ et $b = 8/3$. Dans les trois premières colonnes sont reportées les séquences orbitales dans l’ensemble de l’espace des phases : la première et la troisième comportent les séquences des orbites asymétriques tandis que la deuxième regroupe les séquences des orbites symétriques. Les séquences orbitales dans le domaine fondamental sont reportées dans la dernière colonne.

$$P_w \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = R - 1\} \quad (2.17)$$

La variable x est alors utilisée pour construire l'application de premier retour (FIG. 2.18). Quatre branches monotones sont mises en évidence; elles sont reliées deux à deux par une symétrie centrale par rapport au point fixe trivial F_0 associé à l'origine de l'espace des phases.

Les symboles de l'ensemble $\{\bar{0}, \bar{1}, 1, 0\}$ agissent comme des symboles de transition. Ainsi, par exemple, révolutions successives sur l'aile gauche correspondant à la séquence LL , c'est à dire sans aucune transition, est changée en une séquence $\bar{0}$ et une séquence LR , mettant en jeu une transition de l'aile gauche vers l'aile droite, est changée en $\bar{1}$. Par conséquent les blocs de deux lettres construits sur les symboles $\{L, R\}$ sont transformés en un symbole de l'ensemble $\{\bar{0}, \bar{1}, 1, 0\}$. Nous pouvons alors définir une transformation Ψ transformant les blocs de deux lettres $\{L, R\}$ en un symbole de l'ensemble $\{\bar{0}, \bar{1}, 1, 0\}$ comme :

$$\Psi \equiv \begin{cases} \Psi(LL) = \bar{0} \\ \Psi(LR) = \bar{1} \\ \Psi(RL) = 1 \\ \Psi(RR) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Par exemple, l'orbite $(LRR) = LRRLRR\dots$ est transformée en $\bar{1}0\bar{1}\bar{0}1\dots = (\bar{1}0\bar{1})$.

Nous pensons vraiment qu'une description topologique doit tenir compte de ces propriétés de symétrie. Une étape intermédiaire peut être donnée en introduisant une description utilisant un double patron à quatre bandes (FIG. 2.17). La dynamique symbolique est alors construite sur l'ensemble $\{\bar{0}, \bar{1}, 1, 0\}$. Notez que les symboles $\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont les conjugués respectifs de 0 et 1. De ce fait, la convection naturelle est codée par le symbole 0 ou le symbole $\bar{0}$ et les instabilités hydrodynamiques par le symbole 1 ou le symbole $\bar{1}$. Le symbole et son conjugué désignent le même processus dynamique sous deux configurations, symétriques l'une de l'autre. Il apparaît que la distinction de ces deux configurations n'est pas essentielle dans une description du comportement dynamique. Ainsi, nous allons réduire l'ensemble de quatre symboles, $\{\bar{0}, \bar{1}, 1, 0\}$, à un ensemble de deux symboles, $\{0, 1\}$, en projetant la dynamique sur un domaine fondamental.

2.3.3 Dans le domaine fondamental

Compte tenu des propriétés d'équivariance du système de Lorenz, le comportement dynamique est le même sur le domaine fondamental \mathcal{D} que sur sa copie $\gamma\mathcal{D}$. De ce fait, la connaissance de l'organisation topologique dans le domaine fondamental et la nature de l'équivariance fournissent toute l'information topologique requise sur l'ensemble de l'attracteur. De plus, le patron associé au domaine fondamental est plus simple que celui donné sur l'attracteur complet. Une telle caractérisation topologique restreinte nous permet de comparer l'organisation topologique de différents attracteurs pavés par un nombre différent de copies du domaine fondamental, c'est à dire des attracteurs pourvus de propriétés de symétrie dont l'ordre diffère. La comparaison des populations d'orbites périodiques est alors possible.

De manière à réaliser cette caractérisation topologique du domaine fondamental, la dynamique doit tout d'abord être projetée sur le domaine fondamental (FIG. 2.19). Une orbite périodique s'écrit, dans l'espace des phases, comme :

$$\xi \equiv \{\mathbf{X}_\xi(t)\}_{t=0}^{T_\xi} \quad (2.19)$$

où $\mathbf{X}_\xi(t)$ est la coordonnée du vecteur à l'instant t de l'orbite périodique ξ , et T_ξ représente sa période temporelle. Sa projection sur le domaine fondamental \mathcal{D} s'écrit alors

$$\xi_{\mathcal{D}} \equiv \{\mathbf{Y}_\xi(t) \mid \mathbf{Y}_\xi(t) = \gamma\mathbf{X}_\xi(t) \text{ si } y < -x \quad , \quad \mathbf{Y}_\xi(t) = \mathbf{X}_\xi(t) \text{ autrement} \}_{t=0}^{T_\xi} \quad (2.20)$$

Une section de Poincaré $P_{\mathcal{D}}$ du domaine fondamental \mathcal{D} est définie par

$$P_{\mathcal{D}} \equiv \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y = y_+, \frac{\partial f_z}{\partial y} < 0 \right\} \quad (2.21)$$

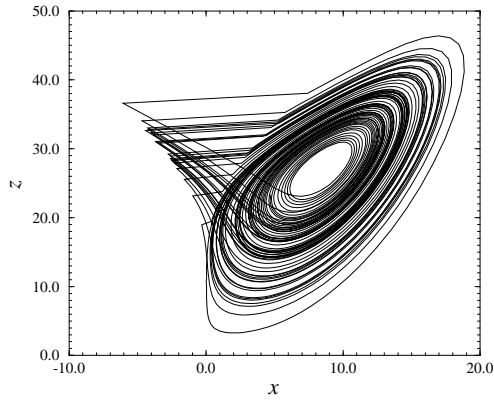


FIG. 2.19 – Dynamique du système de Lorenz projetée sur le domaine fondamental \mathcal{D} .

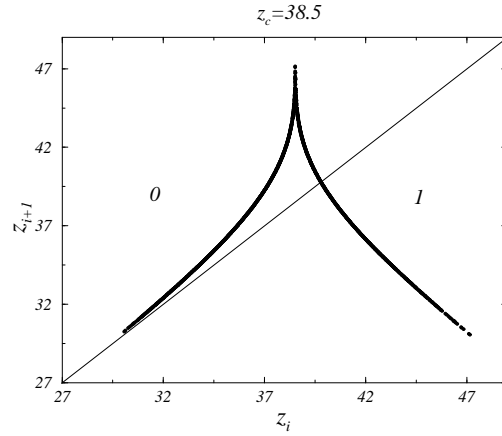


FIG. 2.20 – Application de premier retour à la section de Poincaré $P_{\mathcal{D}}$ construite avec la variable invariante z .

où \mathbf{f} est le champ de vecteurs défini par la relation (2.10). L'application de premier retour est représentée FIG. 2.20. Elle est équivalente à l'application de premier retour au maximum construite par E. Lorenz [102]. Ceci est dû au fait que cette dernière est construite avec la variable invariante z qui réalise une projection naturelle sur le domaine fondamental \mathcal{D} .

L'application de premier retour permet de coder les orbites périodiques suivant la partition

$$C(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z < z_c \\ 1 & \text{if } z > z_c \end{cases} \quad (2.22)$$

où $C(z)$ est le code des coordonnées en z des intersections de la trajectoire avec la section de Poincaré $P_{\mathcal{D}}$. La population d'orbites périodiques est reportée TAB. 2.2.

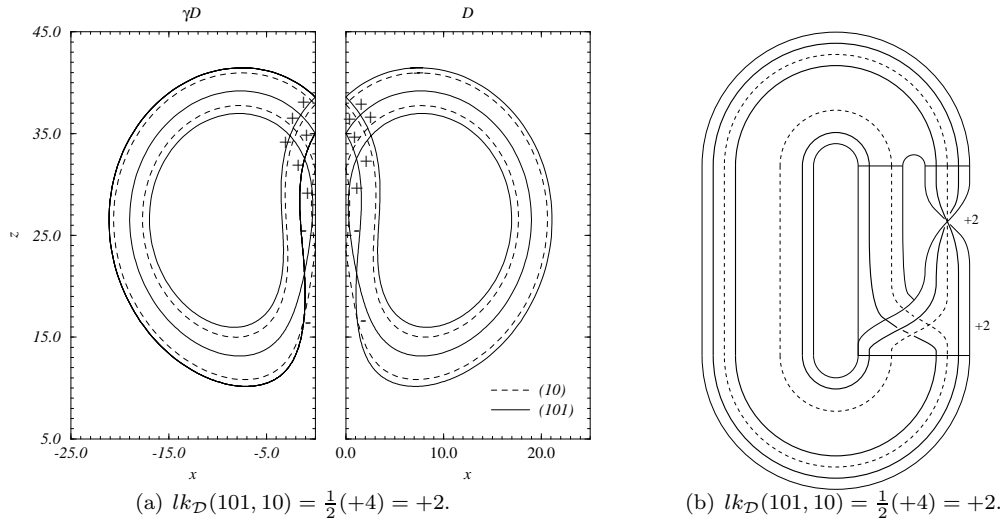


FIG. 2.21 – Comparaison entre le nombre de liaisons fondamentales $lk_{\mathcal{D}}(101, 10)$ compté sur une projection régulière et sa prédiction par le patron fondamental.

De manière à définir les propriétés topologiques des orbites périodiques fondamentales, nous introduisons un nombre de liaisons fondamentales $lk_{\mathcal{D}}(\alpha, \beta)$ compté dans le domaine fondamental et défini comme :

$$lk_{\mathcal{D}}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \epsilon(p) \quad (2.23)$$

où $\epsilon(p)$ désigne les intersections entre les orbites α et β projetées dans le domaine fondamental \mathcal{D} . Les nombres de liaisons fondamentaux $lk_{\mathcal{D}}$ doivent être égaux à ceux prédits par le patron synthétisant la topologie du domaine fondamental. Un tel patron sera appelé *patron fondamental* de manière à le distinguer du patron plus complexe associé à l'attracteur dans l'espace des phases. A titre d'exemple, le nombre de liaisons fondamentaux $lk_{\mathcal{D}}(101, 10)$ est calculé sur une projection des orbites fondamentales codées par (101) et (10) (FIG. 2.21).

De manière similaire, nous déterminons les nombres de liaisons fondamentaux de toutes les paires d'orbites de période inférieure à 5 (Table 2.3). Tous ces nombres de liaisons sont trouvés correctement prédits par le patron fondamental décrit par la matrice de liaisons

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Le patron fondamental est représenté FIG. 2.21 sur lequel une construction de la paire (101,10) est donnée. Le patron fondamental est en accord avec l'application de premier retour fondamentale (FIG. 2.20), c'est à dire que la bande 0 sans torsion locale est associée avec la branche monotone croissante et la bande 1 pourvue d'un demi-tour positif correspond à la branche monotone décroissante. Un patron identique est obtenu pour la copie $\gamma\mathcal{D}$ du domaine fondamental.

	(1)	(10)	(101)	(100)	(1011)	(1001)
(10)	+1					
(101)	+1	+2				
(100)	+1	+2	+3			
(1011)	+2	+3	+4	+4		
(1001)	+1	+2	+3	+3	+4	
(1000)	+1	+2	+3	+3	+4	+4

TAB. 2.3 – Nombres de liaisons fondamentaux entre orbites de période inférieure à 5.

2.4 Applications

2.4.1 Simplification de la dynamique symbolique

Nous allons montrer comment la prise en compte de l'équivariance du champ de vecteurs peut simplifier considérablement l'analyse dynamique d'un système. Pour cela, nous prendrons l'exemple du système de Burke et Shaw [127]. C'est un système de trois équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot{x} = -S(x + y) \\ \dot{y} = -Sxz - y \\ \dot{z} = Sxy + V \end{cases} \quad (2.25)$$

dont l'équivariance est identique à celle du système de Lorenz [91]. Ici, les paramètres de contrôle S et V seront respectivement fixés à 10 et 4.272; le comportement dynamique s'installe alors sur un attracteur chaotique représenté FIG. 2.22. L'analyse débute par la construction d'une application de premier retour à la section de Poincaré

$$P_w = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = z_{\pm}, x > 0, \dot{z} < 0\} \quad (2.26)$$

où $z_{\pm} = 1/S$ est la coordonnée en z des deux points fixes autour desquels l'attracteur se développe. L'application de premier retour obtenue présente quatre branches monotones (FIG. 2.23). Nous construisons alors une dynamique symbolique sur l'ensemble de symboles $\Sigma_4 = \{\bar{1}, 0, 1, 2\}$. La parité des symboles est généralement choisie en fonction de la parité de la torsion locale. Dans le

cas présent, les entiers correspondent également au nombre de demi-tour : le symbole $\bar{1}$ et 1 étant utilisé pour différencier les deux bandes pourvues d'un demi-tour.

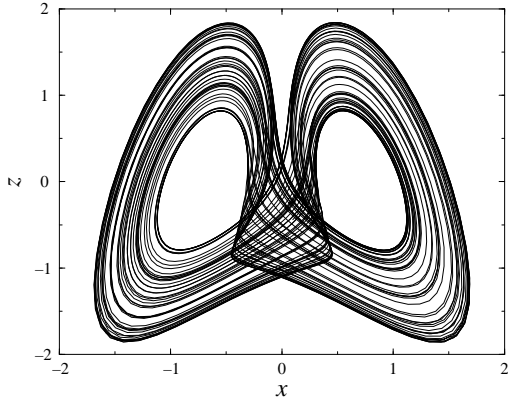


FIG. 2.22 – Attracteur chaotique généré par le système de Burke et Shaw.

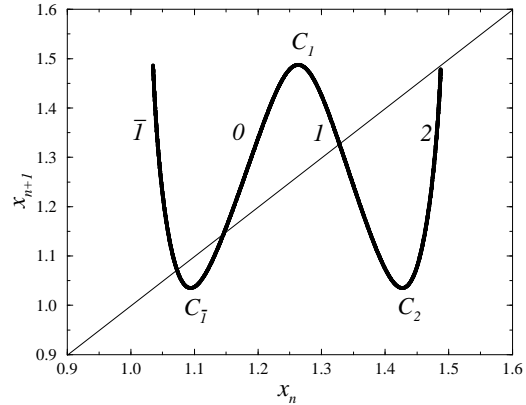


FIG. 2.23 – Application de premier retour à la section de Poincaré P_w .

A partir d'une analyse dans l'espace des phases, nous trouvons un patron, prédisant correctement les nombres de liaisons, décrit par la matrice de liaisons

$$M_{ij} \equiv \begin{bmatrix} +3 & +2 & +2 & +3 \\ +2 & +2 & +2 & +3 \\ +2 & +2 & +3 & +3 \\ +3 & +3 & +3 & +4 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Une représentation de ce patron peut être trouvée dans l'article [91] reporté dans les morceaux choisis. Avec P. Dutertre, nous avons étudié l'évolution de cet attracteur sous variation du paramètre de contrôle V . Nous avons trouvé l'ordre de création reporté TAB. 2.4. Cet ordre de création est plutôt complexe à prédire et il faut avoir recours à toutes les subtilités de l'ordre multimodal [42].

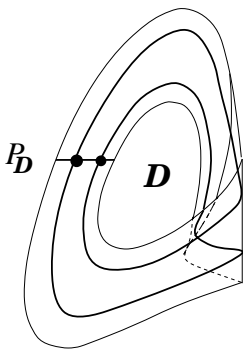


FIG. 2.24 – Réduction de la dynamique au domaine fondamental \mathcal{D} . Nous pouvons remarquer que la transformation Φ impliquée dans cette réduction augmente d'un facteur 2 la période dynamique des orbites périodiques.

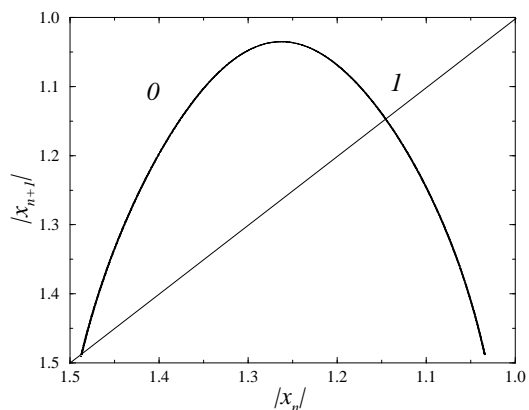


FIG. 2.25 – Application de premier retour à la section de Poincaré $P_{\mathcal{D}}$ du domaine fondamental construite avec la variable invariante $|x|$.

Néanmoins, si l'équivariance du champ de vecteurs est prise en compte, nous réduisons alors la dynamique sur un domaine fondamental \mathcal{D} . Ceci est illustré FIG. 2.24. L'application de premier retour fondamentale se résume alors à une application unimodale type fonction logistique (FIG. 2.25). Ceci est encourageant car la dynamique symbolique associée à une dynamique unimo-

dale est particulièrement bien connue (voir section 2.2.2). Le patron fondamental est alors décrit par la matrice de liaisons fondamentale

$$M_{\mathcal{D}} \equiv \begin{bmatrix} +2 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Nous pouvons remarquer que la période dynamique des orbites périodiques est augmentée d'un facteur 2 lors de la projection de la dynamique sur le domaine fondamental \mathcal{D} sous l'action de Φ . Nous sommes alors en mesure d'introduire une transformation Ψ sur les chaînes de symboles de l'ensemble Σ_4 de l'espace des phases de manière à réduire les séquences orbitales à des séquences orbitales fondamentales requises lors de la description dans le domaine fondamental. Nous avons obtenu une relation entre les symboles de l'ensemble Σ_4 et des blocs de deux symboles de l'ensemble $\Sigma_2^{\mathcal{D}}$ qui s'énonce comme :

$$\Psi \equiv \begin{cases} \Psi(\bar{1}) = 10 \\ \Psi(0) = 11 \\ \Psi(1) = 01 \\ \Psi(2) = 00 \end{cases} \quad (2.29)$$

où la transformation Ψ préserve la parité des symboles. Ainsi, l'orbite codée par $(\bar{1}11)$ voit sa séquence orbitale devenir $\tilde{\Psi}(\bar{1}11) = (100101)$ sur l'ensemble $\Sigma_2^{\mathcal{D}}$ lors de la réduction au domaine fondamental.

De ce fait, en utilisant la transformation inverse

$$\begin{cases} \Psi^{-1}(10) = \bar{1} \\ \Psi^{-1}(11) = 0 \\ \Psi^{-1}(01) = 1 \\ \Psi^{-1}(00) = 2 \end{cases} \quad (2.30)$$

l'ordre de création complexe que nous avons mis en évidence TAB. 2.4 peut être complètement prédit à partir de l'ordre unimodal [91].

2.4.2 Analyse de circuits électroniques

Parmi les systèmes dynamiques générant des comportements chaotiques souvent étudiés, nous relevons les circuits électroniques introduits sous l'impulsion de L. Chua [32]. Ils se caractérisent par des champs de vecteurs équivariants. Ils sont donc d'excellents candidats pour notre procédure spécifique de caractérisation topologique, d'autant plus qu'ils génèrent des comportements chaotiques relativement complexes associés à des patrons plus riches que ceux associés à une dynamique unimodale type fer-à-cheval de S. Smale [129]. En effet, comme le remarquent G. Boulant *et al* [20, 21], les dynamiques expérimentales se caractérisent généralement par des dynamiques unimodales triviales; citons, par exemple, les systèmes laser chaotiques [137, 112, 79, 80, 20], la célèbre réaction de Belousov-Zhabotinskii [107], la corde vibrante [139], l'électrolyse de cuivre [90]. Pourtant, et nous en rencontrerons quelques unes dans le chapitre 3, il existe des situations expérimentales, à l'exemple du circuit de Chua, dont la dynamique se caractérise par un patron plus complexe.

Le système électronique étudié ici a été réalisé par N. Rulkov [124]. Il est constitué d'un amplificateur non linéaire N qui transforme la tension d'entrée $X(t)$ en une tension de sortie $\alpha f(X)$ où α est un paramètre de contrôle caractérisant le gain de N autour de $X = 0$. L'amplificateur non-linéaire est pourvu d'une rétroaction linéaire constituée d'un filtre passe-bas (RC') et d'une boucle de résonance LC en série. Il a été montré que le comportement dynamique d'un tel circuit pouvait présenter des transitions d'oscillations périodiques vers un régime chaotique à travers une cascade de doublements de période, des intermittences et des crises entre attracteurs chaotiques [140]. Nous étudierons ce circuit pour des valeurs de α de 17.4 et de 18.9.

Il existe un modèle d'un tel circuit développé par A. R. Volkovski & N. F. Rulkov [140]. Il est constitué de trois équations différentielles ordinaires :

$(W)_{c_2}$	$(W)_{c_T}$	$c_j(W)_{c_i}$	$(W)_{c_1}$	$(W)_{c_2}$	$(W)_{c_T}$	$c_j(W)_{c_i}$	$(W)_{c_1}$
	$\frac{0}{1}$		$\frac{0}{1}$		$\bar{1}2\bar{1}1\bar{1}$		2120_0^1
	$\bar{1}0$		10	$\bar{1}2\bar{1}1_2^1$			$212\bar{1}_1^0$
	$\bar{1}0\bar{1}\bar{1}$		1011	$\bar{1}2\bar{1}0_1^2$			$211\bar{1}_0^1$
	$\bar{1}0\bar{1}\bar{1}_0^1$		1011_0^1		$\bar{1}2\bar{1}0_1^0$		2110_0^0
	$\bar{1}0_0^1$		10_0^1		$\bar{1}2\bar{1}_1^0$		211_1^0
	$\bar{1}00\bar{1}_1^0$		1001_1^0		$\bar{1}2\bar{1}\bar{1}_0^1$		2111_0^1
	$\bar{1}00_0^1$		100_0^1	$\bar{1}2\bar{1}\bar{1}_2^1$			2112_1^0
	$\bar{1}000_0^1$		1000_0^1		$\bar{1}2_0^1$		21_0^1
		$c_T(\bar{1}0_1^0\bar{1}_1^0)_{c_1}$		$\bar{1}20\bar{1}_1^2$			2102_0^1
	$\bar{1}0110$		$1\bar{1}\bar{1}00$		$\bar{1}20\bar{1}_1^0$		2101_1^0
	$\bar{1}010_1^0$		$1\bar{1}00_1^0$		$\bar{1}20_0^1$		210_0^1
	$\bar{1}01_1^0$		$1\bar{1}0_1^0$		$\bar{1}200_0^1$		2100_0^1
	$\bar{1}01\bar{1}_0^1$		$1\bar{1}01_0^1$	$\bar{1}200_2^1$			$210\bar{1}_1^0$
		$c_1(\bar{1}1_2^0)_{c_2}$		$\bar{1}201_1^2$			$21\bar{1}\bar{1}_0^0$
$\bar{1}11$			$2\bar{1}0$		$\bar{1}201_1^0$		$21\bar{1}0_1^0$
	$\bar{1}11\bar{1}_1^0$		$2\bar{1}01_1^0$	$\bar{1}20_2^1$			$21\bar{1}_1^0$
	$\bar{1}11_0^1$		$2\bar{1}0_0^1$		$\bar{1}202_0^1$		$21\bar{1}1_0^1$
	$\bar{1}110_0^1$		$2\bar{1}00_0^1$			$c_1(\bar{1}2_1^0\bar{1}_2^1)_{c_2}$	
$\bar{1}110_2^1$			$2\bar{1}0\bar{1}_1^0$	$\bar{1}2121$			$22\bar{1}20$
$\bar{1}111_1^2$			$2\bar{1}\bar{1}\bar{1}_0^1$		$\bar{1}212_1^0$		$22\bar{1}1_1^0$
	$\bar{1}111_1^0$		$2\bar{1}\bar{1}0_1^0$	$\bar{1}21_1^2$			$22\bar{1}_0^1$
$\bar{1}11_2^1$			$2\bar{1}\bar{1}_1^0$		$\bar{1}211_0^1$		$22\bar{1}0_0^1$
		$c_T(\bar{1}1_0^1\bar{1}_0^1)_{c_1}$		$\bar{1}211_2^1$			$22\bar{1}\bar{1}_1^0$
	$\bar{1}1021$		$20\bar{1}\bar{1}1$	$\bar{1}210_1^2$			$220\bar{1}_0^1$
$\bar{1}10_1^2$			$20\bar{1}_0^1$		$\bar{1}210_1^0$		2200_1^0
	$\bar{1}101_0^1$		$20\bar{1}0_0^1$		$\bar{1}21_1^0$		220_1^1
$\bar{1}101_2^1$			$20\bar{1}\bar{1}_1^0$		$\bar{1}21\bar{1}_0^1$		2201_0^1
$\bar{1}100_1^2$			$200\bar{1}_0^1$	$\bar{1}21\bar{1}_2^1$			2202_1^0
	$\bar{1}100_1^0$		2000_1^0	$\bar{1}2_2^1$			22_1^0
	$\bar{1}10_1^0$		200_1^0	$\bar{1}22\bar{1}_1^2$			2212_0^1
	$\bar{1}10\bar{1}_0^1$		2001_0^1		$\bar{1}22\bar{1}_1^0$		2211_1^0
	$\bar{1}1_1^0$		20_1^0		$\bar{1}22_0^1$		221_0^1
	$\bar{1}1\bar{1}\bar{1}_1^0$		2011_0^1		$\bar{1}220_0^1$		2210_0^1
	$\bar{1}1\bar{1}_0^1$		201_0^1	$\bar{1}220_2^1$			$221\bar{1}_1^0$
	$\bar{1}1\bar{1}0_0^1$		2010_0^1	$\bar{1}221_1^2$			$222\bar{1}_0^1$
$\bar{1}1\bar{1}0_2^1$			$201\bar{1}_1^0$		$\bar{1}221_1^0$		2220_1^0
$\bar{1}1\bar{1}1_1^2$			$202\bar{1}_0^1$	$\bar{1}22_2^1$			222_1^0
	$\bar{1}1\bar{1}1_1^0$		2020_1^0		$\bar{1}222_0^1$		2221_0^1
$\bar{1}_2^1$			2_1^0	$\bar{1}222_2^1$			2222_1^0
$\bar{1}2\bar{1}1$			2120				

TAB. 2.4 – *Ordre de création des orbites de période inférieure à 6 extraites des attracteurs générés par le système de Burke et Shaw sous augmentation du paramètre V sur l'intervalle $[3.0, 4.272]$. Les séquences orbitales sont classées en colonnes selon le point critique impliquant leur création ; il est indiqué en indice en haut du tableau.*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \delta y + z \\ \dot{z} = \gamma [\alpha F(x) - z] - \sigma y \end{cases} \quad (2.31)$$

où x représente la différence de potentiel aux bornes du condensateur C et $y = \sqrt{L/C'} i(t)$ où $i(t)$ désigne le courant à travers la bobine L . z représente la tension aux bornes du condensateur C' . L'échelle temporelle est fixée par la quantité $\tau = t\sqrt{LC'}$. Les paramètres de ce système dépendent des paramètres physiques des éléments du circuit de la manière suivante :

$$\gamma = \frac{\sqrt{LC'}}{RC'}, \quad \delta = r\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \sigma = \frac{C}{C'} \quad (2.32)$$

où les valeurs des paramètres de contrôle correspondent aux valeurs expérimentales du circuit présenté précédemment. La fonction non-linéaire de l'amplificateur peut être estimée par

$$F(x) = \begin{cases} 0.528 & \text{pour } x < -1.2 \\ x(1-x^2) & \text{pour } -1.2 < x < +1.2 \\ -0.528 & \text{pour } 1.2 < x \end{cases} \quad (2.33)$$

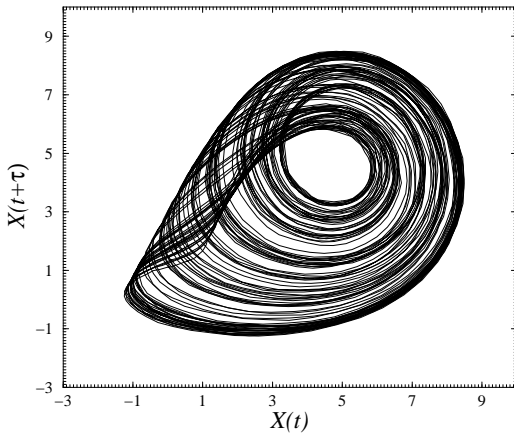


FIG. 2.27 - Un des deux attracteurs symétriques l'un de l'autre, $\alpha = 17.4$.

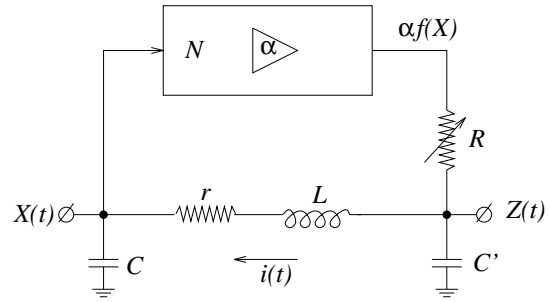


FIG. 2.26 - Un diagramme schématique du circuit électronique étudié. Pour ce circuit, les mesures sont réalisées pour $R = 3.38k\Omega$, $L = 145mH$, $C = 343nF$, $C' = 225nF$, $r = 347\Omega$, avec un échantillonnage de période de $20\mu s$ pour des valeurs de α de 17.4 et de 18.9.

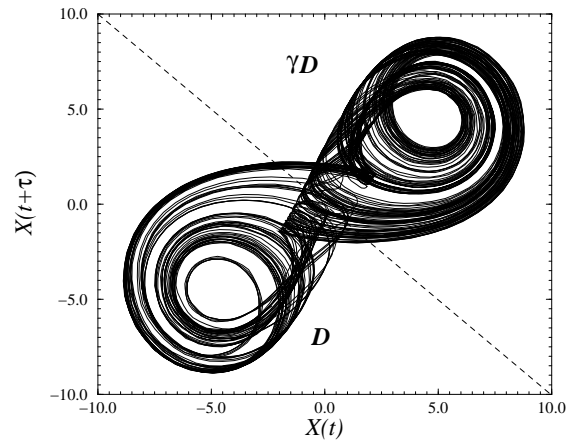


FIG. 2.28 - Le double attracteur symétrique \mathcal{A}_S , $\alpha = 18.9$.

Le modèle présente un comportement quasi-linéaire au voisinage de l'origine. Le développement des trajectoires est borné lorsque x excède une valeur seuil, la trajectoire étant alors réinjectée suivant les propriétés de symétrie. Les propriétés de symétrie de ce champ de vecteurs se caractérise par la matrice d'équivalence

$$\gamma \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

soit une symétrie centrale.

Nous nous bornerons ici à étudier le circuit expérimental, l'étude du modèle étant développée dans l'article [93] reporté dans les morceaux choisis. Pour les deux valeurs de α considérées, le comportement asymptotique s'installe sur des attracteurs chaotiques apparaissant après une cascade de doublements de période. Chaque série temporelle $X(t)$ est enregistrée aux bornes du condensateur C . Afin d'obtenir une représentation de l'espace des phases, nous utilisons les coordonnées décalées introduites par N. Packard *et al* [111]⁵. La dimension de plongement est estimée à trois et le décalage temporel à $10\delta t$ [24]. Pour $\alpha = 17.4$, nous observons une paire d'attracteurs, \mathcal{A}_{\pm} , symétriques l'un de l'autre (FIG. 2.27) alors que pour $\alpha = 18.9$ un attracteur \mathcal{A}_S présentant une symétrie centrale est observé (FIG. 2.28).

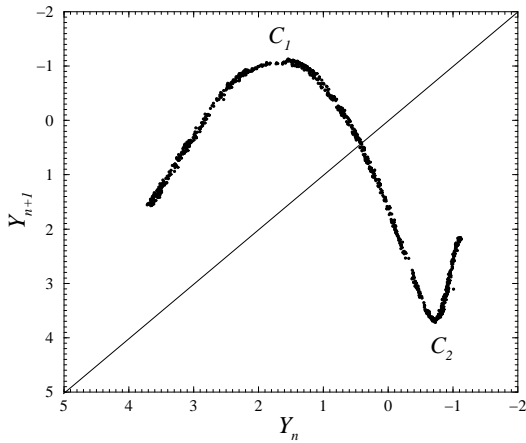


FIG. 2.29 – Application de premier retour $\alpha = 17.4$.

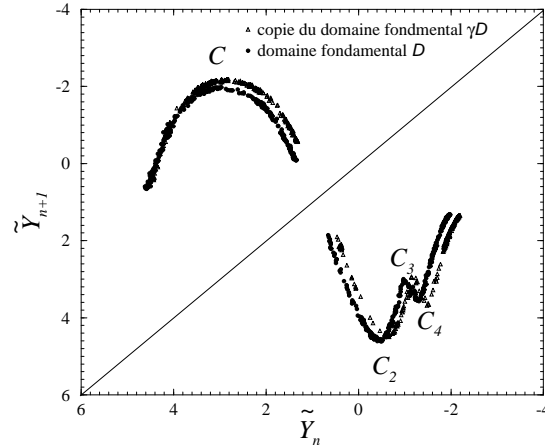


FIG. 2.30 – Application de premier retour fondamentale $\alpha = 18.9$.

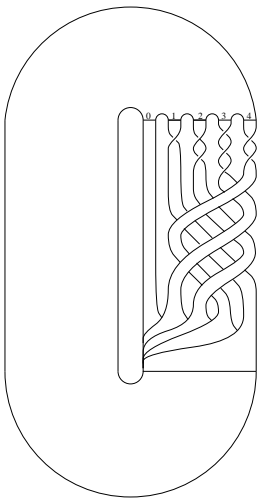


FIG. 2.31 – Patron du domaine fondamental de l'attracteur \mathcal{A}_S . Il synthétise également les propriétés topologiques de l'attracteur \mathcal{A}_+ ; dans ce cas, seules les bandes 0, 1 et 2 sont visitées par la trajectoire chaotique.

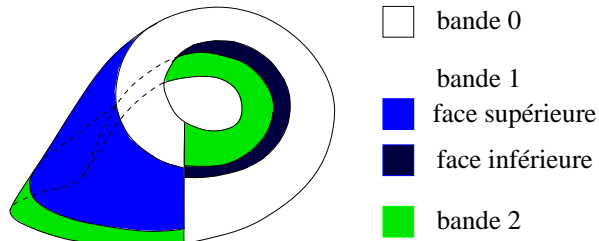


FIG. 2.32 – Masque représentatif des trois bandes visitées par la trajectoire chaotique pour $\alpha = 17.4$.

L'attracteur \mathcal{A}_+ est étudié selon la procédure générale de la caractérisation topologique alors que l'attracteur \mathcal{A}_S est analysé selon la procédure spécifique requise pour les systèmes équivariants.

⁵Les techniques de reconstruction seront détaillées dans le second chapitre de cette partie.

Les applications de premier retour à une section de Poincaré sont représentées pour chacun de ces deux attracteurs (FIG. 2.29 et FIG. 2.30).

Des reconstructions des attracteurs \mathcal{A}_+ et \mathcal{A}_S et de partitions induites par les applications de premier retour, nous construisons un patron à cinq bandes (FIG. 2.31) associé au domaine fondamental \mathcal{D} de l'attracteur \mathcal{A}_S . L'attracteur \mathcal{A}_+ est, quant à lui, caractérisé uniquement par les trois premières bandes en partant de la gauche. Une représentation explicite des trois bandes caractérisant l'attracteur \mathcal{A}_+ est donnée FIG. 2.32 ; la trajectoire chaotique ne visite que ces trois bandes.

Sur l'application de premier retour fondamentale (FIG. 2.30), nous pouvons constater un léger écart à la symétrie. Ceci peut provenir de légères différences dans les caractéristiques des composants électroniques. Nous pouvons envisager d'utiliser l'application de premier retour fondamentale pour l'optimisation de la symétrie parfaite de tels circuits électroniques.

2.5 Perspectives

Nous avons introduit la caractérisation topologique sur des systèmes associés à un espace des phases tridimensionnel et dont les dynamiques sont très dissipatives. Lorsque nous sommes confrontés à des systèmes de dimension supérieure et/ou à une dynamique peu dissipative, l'approche topologique se heurte à des limites intrinsèques : en effet, elle repose sur la notion de nœuds et la manière dont ils sont noués. Or dès la dimension quatre, tous les nœuds sont dénoués, donc triviaux ! La caractérisation par les nombres de liaisons et les patrons n'est donc plus de mise. Il nous faut alors introduire d'autres invariants topologiques, plus robustes à l'augmentation de la dimension de plongement. G. Mindlin *et al* [109] ont introduit une caractérisation à l'aide de surfaces nouées mais nous pensons qu'elle ne reculera la limite qu'à la dimension cinq. Dans le cas de dynamique faiblement dissipative, le problème provient de l'épaisseur du ruban sur lequel s'inscrivent les orbites périodiques : elle autorise les orbites à évoluer non plus sur une surface mais au sein d'un volume restreint qui n'autorise plus une description en terme de patron, en toute rigueur associé à un ruban d'épaisseur nulle.

La première étape de notre programme de recherche visant à dépasser ces limitations repose sur l'utilisation d'invariants topologiques plus restrictifs. En effet, les nombres de liaisons sont faiblement discriminants à l'exemple des deux liens représentés FIG. 2.33 présentant des nombres de liaisons identiques et pourtant de nature très différentes. A l'heure actuelle nous développons une approche basée sur la caractérisation des nœuds à l'aide de polynômes tels que le polyôme de Homfly [74, 60]. Malheureusement, ces polynômes sont assez fastidieux à calculer et nous développons une évaluation algébrique construite à partir d'une description des nœuds par des codes de Gauss.

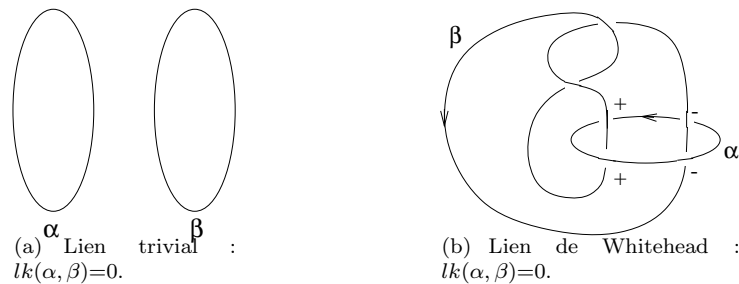


FIG. 2.33 – Exemple de deux liens différents caractérisés par le même nombre de liaisons.

2.5.1 Codes de Gauss

Les codes de Gauss utilisent la notion d'univers U , aussi appelé ombre, du diagramme d'un nœud N . L'univers U est obtenu à partir d'une projection plane régulière d'un nœud (FIG. 2.34.a)

en évinçant toute l'information concernant le signe des intersections (FIG. 2.34.b). Le code de Gauss C_U de l'univers U est une séquence de $2N$ symboles (ici des entiers), chaque symbole étant répété deux fois, où N désigne le nombre d'intersections ($N = 3$ dans l'exemple de la figure 2.34). Ensuite, à partir d'un point de base P , on choisit un sens de parcours de l'univers (naturellement orienté dans le cas d'une orbite périodique) et chaque intersection est désignée par l'entier qui lui est associé. Le code de Gauss de l'univers est alors augmenté de symboles précisant la nature de l'intersection : a si le segment de l'intersection est au dessus et b si le segment est au dessous. Dans le cas du nœud trèfle représenté FIG. 2.34, nous obtenons le code de Gauss suivant :

$$C_U = a1 b2 a3 b1 a2 b3 \quad (2.35)$$

Le calcul des polynômes de Homfly peut être réalisé à partir d'un tel code de Gauss.

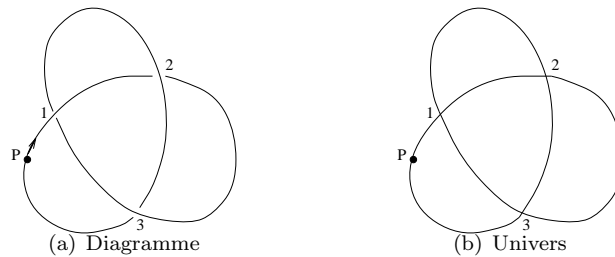


FIG. 2.34 – Construction de l'univers d'un nœud à partir de son diagramme.

2.5.2 Identification des nœuds et liens

Une autre voie est également à l'étude : celle de la démonstration de l'équivalence entre deux nœuds sous une isotopie ambiante par une description algébrique à base de code de Gauss [59]. En effet, Reidemeister montra qu'une classe d'équivalence sous une isotopie ambiante pouvait être obtenue grâce à trois *mouvements de Reidemeister* (FIG. 2.35). Cette équivalence est la plus restrictive qui soit. Pour cela, chaque lien sera caractérisé par son diagramme minimal obtenu à l'aide d'un algorithme basé sur l'algèbre des codes de Gauss (précisons un lien est dit minimal lorsque le nombre d'intersections ne peut plus être réduit par des mouvements de Reidemeister).

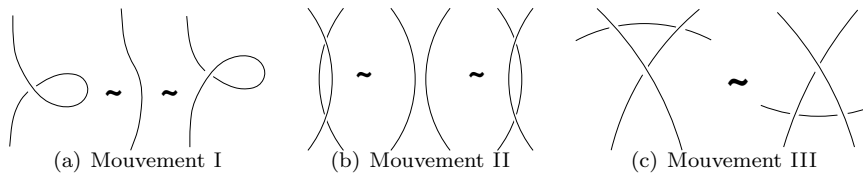


FIG. 2.35 – Les trois mouvements de Reidemeister.

De ce fait, armés d'un calcul algébrique, nous devrions être en mesure d'aborder les systèmes de dimension supérieure à trois en travaillant dans des projections tridimensionnelles de l'espace des phases (on s'attend à obtenir alors des nœuds singuliers également susceptibles d'être étudiés par une approche algébrique). Un modèle serait alors validé si chacune de ces projections tridimensionnelles est équivalente à celle correspondante de l'espace original. L'équivalence serait démontrée en vérifiant que la structure des orbites périodiques dans les projections de l'espace des phases et celles de l'espace reconstruit sont équivalentes à une isotopie près. Pour plus de détails sur ce programme de travail, consulter [61].

Chapitre 3

Reconstruction de champs de vecteurs

3.1 Introduction

L'un des problèmes essentiels de la science est de construire des modèles de systèmes réels à partir de données expérimentales. Selon le dictionnaire Larousse, un modèle est *une structure formalisée utilisée pour rendre compte d'un ensemble de phénomènes qui possèdent entre eux certaines relations*. Une telle étape est nécessaire à la connaissance [71] et l'esprit humain éprouve le besoin d'avoir recours à des modèles pour expliquer la complexité de la réalité. Néanmoins, selon Emmanuel Kant, *la construction d'un modèle n'est ni neutre ni objective*. En effet, selon l'approche classique, le physicien construit un modèle à partir d'observations sur le monde réel lui-même et, très souvent, le modèle ne représente efficacement qu'une infime partie du monde réel; la réalité se révélant toujours beaucoup plus complexe que le modèle. Cette démarche repose sur le fait que la réalité puisse être approchée par un modèle que notre esprit soit capable de concevoir.

Depuis l'antiquité, lorsque l'on parle de modèle, on y adjoint systématiquement les mathématiques. Ainsi, lorsque Platon énonce sa cosmologie [114], il est novateur car il propose pour la première fois une représentation cohérente et rigoureuse de l'Univers physique, fondée sur un ensemble limité de présupposés axiomatiques, à partir desquels sont déduites logiquement les propriétés de l'Univers [22] : un véritable modèle! Il se base sur quatre éléments primordiaux associés aux quatre polyèdres réguliers alors connus (FIG. 3.1) : le feu assimilé au tétraèdre, l'air assimilé à l'octaèdre, l'eau assimilée à l'icosaèdre et enfin la terre assimilée à l'hexaèdre ou cube. Un cinquième élément, la quintessence, sera ajoutée par la suite lorsque le cinquième polyèdre, le dodécaèdre, fût découvert. On comprend dès lors que la limite des mathématiques grecques de l'époque de Platon fixent celles de la cosmologie du *Timée*.

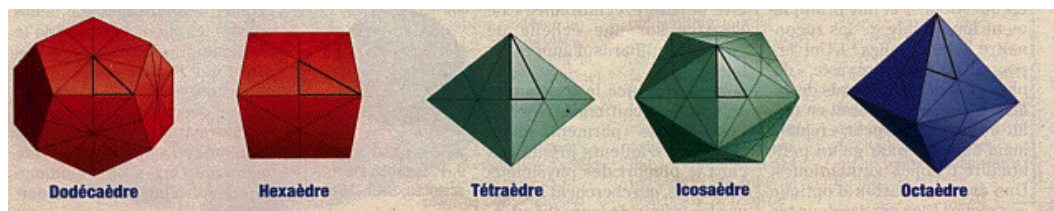


FIG. 3.1 – Les cinq polyèdres réguliers.

Platon est aussi novateur par la nature de l'explication de l'Univers qu'il propose. Il pose le problème de la connaissance scientifique : *une explication scientifique doit présenter un caractère de nécessité et d'idéalité qui ne peut être déduit de façon immédiate des données fournies par la*

perception sensible. Il développe une méthodologie de la recherche scientifique bien que les axiomes qui constituent son système soient posés *a priori* mais, comme l'a montré récemment la théorie algorithmique de l'information (théorème de Gödel), toute connaissance d'un système formel se réduit à des axiomes fondamentaux et toute extrapolation de l'information de ces axiomes est indécidable ou nécessite un nouvel axiome, sans preuve. Pour Platon, les mathématiques sont l'instrument permettant d'exprimer certaines des conséquences qui découlent de ces axiomes mais, en raison du faible développement de celles-ci, l'outil formel auquel a eu recours la cosmologie comme la plupart des autres domaines de la physique est le langage ordinaire, et ce, jusqu'à la Renaissance.

L'irruption des mathématiques date du XVI^e siècle avec Galilée qui énonce pour la première fois clairement que *le grand livre de la nature est écrit en langage mathématique*; elle débute donc dans le contexte de la science du mouvement, la *dynamique*. Johannes Kepler est le premier qui ne fait pas accessoirement appel aux mathématiques comme à un élément étranger à sa discipline, mais qui les pose directement comme intérieures à sa pensée, et donc, comme constituante de la mécanique qu'il met en place [29]. Dans les conceptions de Kepler, les mathématiques et l'expérience entretiennent un double rapport : les mathématiques sous-tendent la nature dans sa conception divine, et elles doivent donc l'exprimer. Inversement, si l'observation réelle dément les calculs, c'est que les calculs ont été faits d'après une prémisse fautive et qu'il faut changer celle-ci puisque, par définition, les calculs ne peuvent pas mentir [29]. Nous pouvons affirmer que c'est le véritable moment où naît la science moderne, c'est à dire le moment où l'on passe des *qualités* d'Aristote à l'énonciation d'une loi sous forme mathématique, et d'une loi qui rend compte des phénomènes observés.

Dès lors, parler de modélisation, c'est faire référence à une structure mathématique, véritable élément constitutif de la science. Comme la langue aide à structurer la pensée, les mathématiques sont un moyen d'élaboration de la compréhension des phénomènes physiques. G. Israël [69] précise que les caractéristiques spécifiques de la modélisation mathématique moderne sont essentiellement au nombre de deux. En premier lieu, le renoncement d'aboutir à une image unifiée de la nature : un modèle mathématique est un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité. Non seulement un modèle peut décrire différentes situations réelles¹ mais encore le même fragment de réalité peut être représenté à l'aide de modèles différents. En second lieu, la méthode fondamentale de la modélisation est l'analogie mathématique (où le fragment des mathématiques unifie tous les phénomènes qu'il est censé représenter), et non plus l'analogie mécanique, qui a été pendant très longtemps le procédé initial de la mathématisation².

De manière générale, la traduction en langage mathématique d'un phénomène se déroule selon deux étapes :

- déterminer l'ensemble des variables décrivant d'une façon sinon complète du moins satisfaisante, les différents états du phénomène. Ces variables constituent l'ensemble des variables dynamiques du modèle.
- déterminer ensuite parmi tous les états possibles du système, ceux dans lequel il se trouvera effectivement. Un ensemble de valeurs numériques exprimera ces différents états selon l'ordre défini par l'écoulement du temps : c'est la représentation mathématique de la loi d'évolution du phénomène étudié.

Il est bien entendu que le choix des variables dépend de ce que nous avons choisi d'analyser et non pas uniquement de raisons intrinsèques liées à la complexité du phénomène étudié : pour ces raisons, le problème du choix des variables dynamiques n'est jamais simple et nécessite une appréhension initiale du système par le physicien. Cette étape, cruciale, n'est régie par aucun principe rationnel clairement défini mais résulte de l'imprégnation du système étudié sur le physicien et des principes sur lequel il conçoit sa cosmologie, au sens large du terme. A considérer soigneusement les œuvres de J. Kepler ou de I. Newton, on s'aperçoit que leurs intuitions scientifiques sont inséparables de cet exercice de l'imagination que représentent l'alchimie, la mystique ou l'astrologie [29]. C. Jung affirme d'ailleurs que *la science dans sa totalité est dépendante de l'âme, dans laquelle toute connaissance est enracinée*³.

¹cf. l'universalité de la fonction logistique

²Ainsi, nous nous intéressons plus au comportement dynamique qu'aux phénomènes impliqués

³cité par M. Cazenave in [29].

Dans le cadre d'un monde linéaire, l'identification précise des caractéristiques importantes des phénomènes est réalisée, permettant la détermination des variables d'état du système. La structure mathématique descriptive est ensuite élaborée et les prévisions obtenues à l'aide de cette structure sont comparées aux données réelles. Cette conception classique de la physique s'inspire de la méthode expérimentale fondée sur l'idée galiléenne du *cimento* : interroger la nature et comparer les résultats obtenus avec les prévisions mathématiques. La conscientisation des rôles importants joués par les non-linéarités du monde interdit désormais la comparaison à proprement parler et, comme l'a compris H. Poincaré, une approche globale du comportement asymptotique doit être utilisée. La théorie de la dynamique des systèmes non linéaires ouvre une autre voie : à partir des données expérimentales, un modèle peut être construit automatiquement sans aucune intervention du physicien. Elle se limite en fait au choix de la structure mathématique employée : des polynômes, des fonctions radiales, ... C'est maintenant la structure mathématique qui compte et c'est elle qui joue le rôle de modèle. Toutefois, la construction de modèle ne peut être arbitraire car on ne peut supprimer l'exigence d'une justification - ici de nature topologique - rendant l'analogie légitime [69]. Il n'est plus possible de prédire à long terme le comportement du système étudié en raison des non-linéarités rendant le système sensible aux conditions initiales. Seul le comportement global peut être comparé au système réel : ce ne sont plus les belles régularités que vénéraient Aristote qui sont objets de connaissance mais une permanence structurelle. Le système est intelligible car, dans son évolution incessante, il demeure des entités immuables identifiées comme les processus dynamiques impliqués : c'est ce lien permanent qui est modélisé.

Selon G. Israël, la diffusion de cette approche modéliste en physique témoigne du déclin du rôle de la physique mathématique et classique [69]. Elle se présente comme un processus de crise, car quoi qu'on en dise, la physique s'est bâtie autour de l'aspiration à une image unitaire de la réalité. La modélisation représente donc un renoncement. La tradition historique de la physique s'accommode mal de l'idée que les mathématiques constituent un réservoir d'images qu'on peut appliquer de diverses manières à la réalité. Pour preuve, les nombreuses réticences de certains collègues qui acceptent difficilement que des analyses de qualités de systèmes aussi disparates que les réactions chimiques [90, 100], les étoiles pulsantes [92], les moteurs atmosphériques [99], les circuits électroniques [93], puissent être développées avec les mêmes concepts.

Ce chapitre est consacré à cette nouvelle approche de la modélisation qui, nous le verrons, permet l'obtention de modèles générant des dynamiques qui correspondent correctement à la réalité. Toutefois, nous verrons que leur efficacité à décrire les comportements dynamiques est réduite par le fait que l'identification des processus physiques responsables de cette dynamique est, à l'heure actuelle, difficilement réalisée.

3.2 La méthode

3.2.1 Principe

Les systèmes de coordonnées

Les trois systèmes de coordonnées utilisés dans les différentes techniques de reconstruction couramment utilisées sont les *décalages temporels*, les *dérivées* et les *composantes principales*. Tous ces systèmes de coordonnées s'appuient sur la construction de variables indépendantes à partir de l'évolution de la variable dynamique observée par le physicien : ces nouvelles variables sont obtenues par décalages temporels, par estimation des dérivées de la série ou par une analyse en composantes principales. Chacune de ces représentations permet d'accéder à une reconstruction de la trajectoire représentative de l'évolution du système dans un espace équivalent à l'espace des phases original. Le comportement dynamique du système peut être caractérisé à l'aide de paramètres globaux importants tels que les dimensions fractales [63], les exposants de Lyapunov [43] ou des propriétés topologiques du portrait de phases [106, 107, 138].

L'un de nos objectifs est d'obtenir une approximation du champ de vecteurs régissant la dynamique du système étudié à partir de la seule série expérimentale. La connaissance d'un champ de vecteurs équivalent permet de générer de nouvelles séries temporelles s'inscrivant sur un attrac-

teur équivalent à l'original. Cette possibilité permet une meilleure caractérisation de la dynamique lorsque la quantité de données est limitée.

La méthode des décalages temporels [111] est la plus populaire car sa mise en œuvre est relativement élémentaire. L'idée de base des méthodes de reconstruction d'un espace des phases est que le passé et le futur d'une série temporelle contiennent de l'information sur les variables d'état inobservées qui peut être utilisée pour définir l'état à l'instant présent.

Connaissant une série temporelle $\{x(i\delta t)\}_{i=0}^{N-1}$ échantillonnée avec un pas de temps δt constant, l'information sur le passé et le futur de la série peut être reportée dans le *vecteur délai* de la forme

$$\mathbf{x}(t) = (x(t + d_f\tau), x(t + (d_f - 1)\tau), \dots, x(t), \dots, x(t - d_p\tau))^\dagger \quad (3.1)$$

où τ est un décalage temporel multiple du temps d'échantillonnage ($\tau = h\delta t$), d_f est le nombre de coordonnées futures et d_p le nombre de coordonnées passées. Ici \dagger désigne la transposée et nous adoptons la convention de représenter les états par un vecteur colonne. La dimension du vecteur délai est $d = d_p + d_f + 1$.

Soit d la dimension du système dynamique qui génère la série temporelle $x(t)$. F. Takens [135] montre qu'en l'absence de bruit, si $d_E \geq 2d + 1$, alors, génériquement, le vecteur délai forme un plongement de l'espace des phases original. Bien que $d_E \geq 2d + 1$ garantisse un plongement, nous verrons qu'il existe des cas où il y a plongement pour $d_E = d$ (à partir de la variable y du système de Rössler).

Du point de vue de l'idéalisation de mesures arbitrairement précises de $x(t)$, un plongement existe quel que soit τ : le choix du décalage temporel τ est sans influence sur la reconstruction. Cependant les données réelles sont nécessairement bruitées et une quantité finie de données introduit des erreurs d'estimation. Ces limitations rendent le choix de τ important [26, 27].

A partir de ces coordonnées décalées, les composantes principales peuvent être construites à l'aide d'une méthode de décomposition en valeurs singulières [23] dont l'algorithme est décrit dans la littérature [116]. T. Sauer, J. Yorke et M. Casdagli [125] étendent le théorème de Takens aux composantes principales, montrant que génériquement $2d + 1$ composantes principales forment un plongement. Dans certains cas, moins de composantes principales sont nécessaires.

Une reconstruction de l'espace des états peut aussi être obtenue à partir des dérivées. L'estimation de celles-ci peut être réalisée soit à partir d'un schéma aux différences finies, soit par des filtres linéaires [51]. A l'heure actuelle, nous estimons les dérivées successives par dérivation d'un polynôme estimé localement par une décomposition en valeurs singulières. Les dérivées présentent l'énorme avantage de permettre un certain nombre de manipulations algébriques entre système original et système reconstruit. Nous en verrons quelques exemples par la suite. Ainsi, notre technique globale de champ de vecteurs repose sur les *coordonnées dérivées*. Par opposition aux méthodes de reconstructions basées sur la prédiction du futur à partir de la connaissance du passé et dites *locales*, les reconstructions d'un champ de vecteurs sont dites *globales*. Au lieu d'estimer localement la dynamique, les techniques globales réalisent une approximation du champ de vecteurs original sur l'ensemble de l'espace des phases. De ce fait, elles permettent la reconstruction de l'ensemble de l'attracteur à partir de la connaissance d'une faible région de celui-ci [95].

Reconstruction globale de champ de vecteurs

Comme nous l'avons fait pour la caractérisation topologique, nous introduirons la reconstruction globale en utilisant le système de Rössler comme cas test. Nous sommes donc en présence d'un système non linéaire décrit par un système de trois équations différentielles ordinaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (3.2)$$

qui peut être vu sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est le vecteur des paramètres de contrôle (a, b, c) et \mathbf{x} le vecteur représentatif d'un état du système et fonction des variables dynamiques (x, y, z) . Ce système est appelé le *système original*. Dans un contexte expérimental, il est inconnu et, nous le verrons, inaccessible à la mesure. De manière à simuler un tel contexte, supposons que nous ne connaissions que l'évolution temporelle de la variable dynamique y (FIG. 3.2).

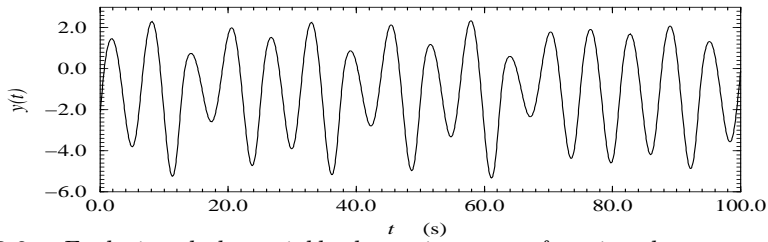


FIG. 3.2 – Evolution de la variable dynamique y en fonction du temps.

Nous avons vu que nous pouvons reconstruire un espace équivalent (nous verrons dans quel sens) à l'espace des phases original à l'aide des coordonnées dérivées. Pour cela, les dérivées temporelles successives de la série temporelle $y(t)$ sont estimées de manière à constituer un *vecteur dérivée*.

$$\left(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{d_E-1}y}{dt^{d_E-1}} \right) \quad (3.4)$$

où d_E est la dimension de plongement de la dynamique. Dans le cas du système de Rössler, la dimension de corrélation D_2 est estimée autour de 1.98 par une méthode du type de celle de Grassberger et Procaccia [63]. Nous pouvons donc espérer reconstruire une dynamique équivalente dans un espace de dimension 3. Ainsi, l'espace défini par les trois coordonnées $(X = y, Y = \dot{y}, Z = \ddot{y})$ constitue un espace des phases reconstruit (FIG. 3.4) que nous espérons équivalent à l'espace des phases original défini par les coordonnées (x, y, z) (FIG. 3.3).

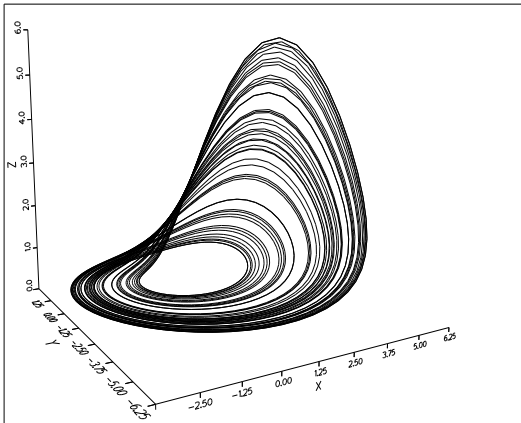


FIG. 3.3 – Espace des phases original associé au système de Rössler.

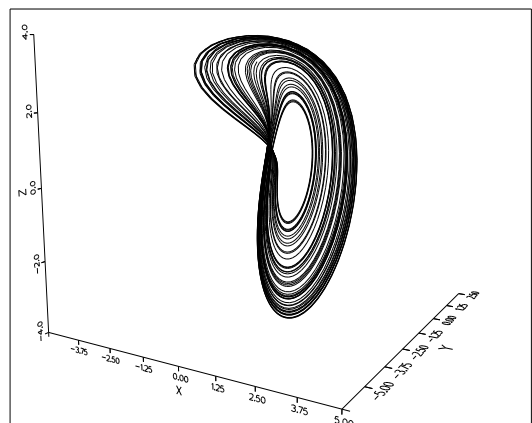


FIG. 3.4 – Espace des phases reconstruit à l'aide des dérivées successives de la variable dynamique y .

Afin de statuer sur la qualité de l'espace reconstruit, nous devons étudier les propriétés de la transformation Φ_y transformant l'espace des phases original en l'espace reconstruit, soit

$$(x, y, z) \xrightarrow{\Phi_y} (X, Y, Z) \quad (3.5)$$

où l'indice y désigne la variable dynamique à partir de laquelle la reconstruction est réalisée. Lorsque le champ de vecteur original est connu, cette transformation peut se dériver analytiquement. Dans notre cas test, elle s'exprime comme

$$\Phi_y \equiv \begin{cases} X = y \\ Y = x + ay \\ Z = ax + (a^2 - 1)y - z \end{cases} \quad (3.6)$$

La meilleure équivalence que nous puissions espérer est que la transformation Φ_y définisse un difféomorphisme, c'est à dire une application continue dont l'inverse est différentiable. Ceci est vrai si Φ_y vérifie le théorème suivant :

Théorème 1 *La transformation Φ_y définit un difféomorphisme de l'espace des états dans l'espace reconstruit (soit ici de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3) si son déterminant Jacobien $\mathcal{D}\Phi_y$ ne s'annule en aucun point de l'espace des états.*

Ainsi vérifier que Φ_y définit un difféomorphisme se réduit simplement à l'étude de son Jacobien. Dans notre cas test, ceci est aisément obtenu : l'espace des phases reconstruit à partir de la variable y définit donc un espace équivalent à l'espace des phases original.

Comme nous l'avons annoncé, l'utilisation des dérivées permet un certain nombre de manipulations algébriques. Ainsi, lorsque le champ de vecteurs original est connu, nous sommes en mesure de dériver algébriquement le champ de vecteurs reconstruit à partir d'une variable donnée. Ainsi, selon notre formalisme, tout système reconstruit peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = F_y(X, Y, Z) \end{cases} \quad (3.7)$$

où F_y est une fonction à estimer⁴ l'indice y désigne la variable dynamique à partir de laquelle la reconstruction est effectuée. Ce système est appelé le *système reconstruit exact*. Dans notre cas test, la fonction F_y est de la forme

$$F_y = -b - cX + (ac - 1)Y + (a - c)Z - aX^2 + (a^2 + 1)XY - aXZ - aY^2 + YZ \quad (3.8)$$

C'est une fonction polynomiale multivariable. Il semble que chaque fois que la fonction Φ définisse un difféomorphisme, la fonction F soit de forme polynomiale. Ceci est une propriété importante sur laquelle nous reviendrons.

Revenons à notre simulation d'une situation expérimentale. Nous ne connaissons pas le champ de vecteurs original et nous souhaiterions obtenir un système d'équations différentielles ordinaires modélisant le comportement dynamique du système étudié. Pour cela, nous devons estimer la fonction F_y uniquement à partir de la connaissance de l'évolution de la variable dynamique y . Ceci implique une évaluation de la fonction F_y à l'aide d'une méthode du type moindres carrés. Pour résoudre ce problème, nous devons commencer par choisir une base sur laquelle décomposer la fonction F_y . Initialement, une décomposition sur des fonctions rationnelles polynomiales fut retenue et permit une reconstruction des systèmes de Rössler [55] et de Lorenz [56] à partir de leurs variables dynamiques x respectives. Les fonctions rationnelles présentent l'avantage de modéliser des fonctions F pourvues de pôles (ce qui est effectivement le cas des fonctions F_x pour les systèmes de Rössler et de Lorenz). Cependant la présence des pôles rend délicate leur intégration (bien que

⁴Nous verrons quelques cas où cette estimation ne peut être réalisée.

les ensembles singuliers soient de mesure de Lebesgue nulle). De plus, l'approximation de la fonction F sur des fonctions rationnelles se comporte très mal en présence de bruit [86]. Précisons en outre qu'aucun critère de convergence n'est connu dans ce cas.

Par conséquent l'implémentation d'une nouvelle méthode d'approximation de la fonction F , plus robuste, s'est avérée nécessaire. Une approximation L_2 sur des polynômes multivariés est maintenant utilisée [58, 95]. Non seulement il existe un théorème de convergence du à Weierstrass [120] pour les approximations polynômiales, mais encore la méthode ne présente plus les problèmes d'intégration numérique en raison de l'absence de pôles. Les polynômes ne sont pas choisis a priori égaux à des polynômes répertoriés tels que ceux de Legendre comme dans le travail de J. Cremers et A. Hübler [35] ou de J. F. Gibson *et al* [51], mais sont générés par la dynamique elle-même.

Toutefois, que le système original soit connu ou pas, le but à atteindre est une reconstruction du système reconstruit exact à partir d'une seule des variables dynamiques du système original. Pour cela, il est supposé que le physicien enregistre numériquement (ou expérimentalement) la série scalaire temporelle échantillonnée $\{x_i\}_{i=1}^N$ où l'entier i représente le temps discret tel que $t = i\delta t$. Les dérivées successives de l'observable $x(t)$ peuvent être estimées par dérivation d'un polynôme estimé par une décomposition en valeurs singulières. Toute l'information sur le champ de vecteurs original \mathbf{f} est reportée au sein de la fonction F .

L'estimation de la fonction F est réalisée par une décomposition de Fourier sur une base de polynômes multivariés. La procédure de reconstruction se décompose en différentes étapes qui sont :

- Simultanément à la lecture de la série temporelle $\{y_i\}_{i=1}^N$, une série vectorielle temporelle $\{X_i = y_i, Y_i = \dot{y}_i, Z_i = \ddot{y}_i, \dot{Z}_i = \ddot{\dot{y}}_i\}_{i=1}^{N_q}$ est calculée. A chaque point de l'ensemble de coordonnées $\{X_i, Y_i, Z_i\}_{i=1}^{N_q}$ est ajoutée une valeur \dot{Z}_i puisque le système reconstruit exact (3.7) nécessite la connaissance de cette variable pour l'approximation de la fonction F .
- Une estimation numérique de la décomposition de Fourier de la fonction F est réalisée sur une base de polynômes multivariés par une technique de moindres carrés. Un spectre naturel est alors calculé à partir des coefficients de Fourier. Nous possédons à ce stade une approximation \tilde{F} de la fonction F .
- L'attracteur reconstruit A_y peut être obtenu par intégration du système reconstruit.

L'espace fonctionnel sur lequel est décomposée la fonction F va maintenant être introduit.

Estimation du champ de vecteurs

Afin d'établir une décomposition robuste de la fonction F , nous choisissons de la projeter sur un espace de Hilbert E^n de polynômes P . Ces polynômes seront construits à partir des trois variables X, Y et Z selon l'arrangement des triplets (i, j, k) correspondant aux puissances respectives des variables X, Y et Z suivant l'ordre donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} 000 \\ 100 \ 010 \ 001 \\ 200 \ 110 \ 101 \ 020 \ 011 \ 002 \\ 300 \ 210 \ 201 \ 120 \ 111 \ 102 \ 030 \ 021 \ 012 \ 003 \\ \dots \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Nous pouvons étiqueter chaque triplet suivant le même ordre :

$$\phi^k = \sum_{\alpha=1}^k A_{\alpha}^k P^{\alpha} \quad (3.18)$$

Ainsi, les coefficients B_j^k s'écrivent aussi :

$$B_j^k = \sum_{\alpha=1}^j A_{\alpha}^j (P^k, P^{\alpha}) \quad (3.19)$$

En insérant les relations (3.17) et (3.18) dans la relation (3.13), nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^k A_{\alpha}^{*k} P^{\alpha} = P^k - \sum_{\beta=1}^{k-1} B_{\beta}^k \sum_{\alpha=1}^{\beta} A_{\alpha}^{\beta} P^{\alpha} \\ A_{\alpha}^{*k} = A_{\alpha}^k \|\phi^{*k}\| \end{cases} \quad (3.20)$$

Avec une permutation sur la double sommation :

$$\sum_{\beta=1}^{k-1} \sum_{\alpha=1}^{\beta} = \sum_{\alpha=1}^{k-1} \sum_{\beta=\alpha}^{k-1} \quad (3.21)$$

nous obtenons

$$\sum_{\alpha=1}^k A_{\alpha}^{*k} P^{\alpha} = P^k - \sum_{\alpha=1}^{k-1} \left(\sum_{\beta=\alpha}^{k-1} B_{\beta}^k A_{\alpha}^{\beta} \right) P^{\alpha} \quad (3.22)$$

Les coefficients A_{α}^{*k} sont alors déterminés par identification entre chaque membre de la relation (3.22). Nous obtenons la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} A_k^{*k} = 1 \\ A_{\alpha}^{*k} = - \sum_{\beta=\alpha}^{k-1} B_{\beta}^k A_{\alpha}^{\beta} \end{cases} \quad \text{pour } \alpha < k \quad (3.23)$$

De manière à ne conserver qu'une relation sur les coefficients A_{α}^{*k} , nous remplaçons les coefficients B_{β}^k par leur expression suivant la relation (3.19); nous obtenons alors :

$$A_{\alpha}^{*k} = - \sum_{\beta=\alpha}^{k-1} A_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{\gamma=1}^{\beta} A_{\gamma}^{\beta} (P^k, P^{\gamma}) \right] \quad (3.24)$$

Il reste alors à normaliser chaque A_{α}^{*k} comme suit :

$$A_{\alpha}^k = \frac{A_{\alpha}^{*k}}{\left[\sum_{\beta=1}^k \sum_{\gamma=1}^k A_{\beta}^{*k} A_{\gamma}^{*k} (P^{\beta}, P^{\gamma}) \right]^{1/2}} \quad (3.25)$$

Nous possédons maintenant une base complète de n polynômes orthogonaux ϕ^k . Nous souhaitons une approximation \tilde{F}_s de la fonction F sur l'ensemble des points :

$$F_s(X_i, Y_i, Z_i) = \dot{Z}_i \quad (3.26)$$

Une telle approximation est donnée par :

$$\tilde{F}_s = \sum_j c_j^* \phi^j \quad (3.27)$$

où les c_j^* représentent les coefficients de Fourier. L'approximation de Fourier ainsi définie est la meilleure approximation possible sur la base choisie (selon la norme L_2). Les N_p points de l'espace reconstruit nous permettent de définir le produit scalaire à partir duquel on construit la base orthonormée, tandis que l'approximation s'effectuera sur N_{cp} fonctions de base. On définit ainsi une approximation de Fourier de F , qui est la meilleure au sens des moindres carrés sur la base des N_{cp} fonctions choisies, c'est à dire qui minimise l'expression :

$$L_2(\tilde{F}_s - F_s) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_p} \left(\sum_{j=1}^{N_{cp}} \tilde{c}_j \phi^j - \dot{Z}_i \right)^2} \quad (3.28)$$

Les coefficients de Fourier c_j^* sont alors donnés par la relation :

$$\begin{aligned} c_j^* &= \left(F_s, \sum_{p=1}^j A_k^j P^k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_p} \left(\sum_{k=1}^j A_k^j P^k \dot{Z}_i \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nous avons ainsi

$$c_j^* = \left(\dot{Z}_i, \sum_{k=1}^j A_k^j P^k \right) \quad (3.30)$$

L'approximation de la fonction dans E^n s'écrit aussi en fonction des P^j :

$$\tilde{F}_s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i c_i^* A_j^i P^j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n c_i^* A_j^i P^j \quad (3.31)$$

En posant

$$K_p = \sum_{i=p}^n c_i^* A_p^i \quad (3.32)$$

nous pouvons réécrire la relation (3.31) comme :

$$\tilde{F}_s = \sum_{p=1}^n K_p P^p \quad (3.33)$$

Ainsi l'information concernant la structure dynamique du système est contenue dans l'ensemble des coefficients K_p qui forme une signature de l'attracteur. L'ensemble $\{K_p\}$ est appelé *spectre naturel* de l'attracteur.

Le modèle obtenu constitue un *modèle phénoménologique* suivant le sens que donne L. Boltzmann à ce qualificatif : la *phénoménologie* est la tendance qui cherche à représenter des domaines limités du monde physique à l'aide d'équations différentielles ; ce n'est qu'une sorte de modélisation mathématique abstraite qui ne prend pas vraiment en compte la nature des phénomènes étudiés [69]. Un modèle obtenu par reconstruction globale de champ de vecteurs se contente, comme la plupart des approches scientifiques, de décrire, de fournir des descriptions, et non d'expliquer.

La qualité de la reconstruction obtenue dépend d'un certain nombre de paramètres appelés *paramètres de reconstruction*. Certains relèvent de l'expérimentation, le taux de l'échantillonnage τ_s ou le nombre de points de la série temporelle, alors que d'autres sont associés à la méthode de reconstruction. Ces derniers sont :

- la dimension d_E de l'espace dans laquelle la trajectoire représentative de l'évolution du système est représentée. Elle est usuellement choisie comme étant égale à la partie entière de la dimension de corrélation D_2 plus un. Elle peut être efficacement estimée à l'aide de la méthode des faux voisins [1, 2, 28].

- le nombre de points total N_p retenus pour l'estimation. Il définit directement l'échantillon sur lequel est réalisée la statistique utilisée pour estimer les coefficients de la fonction \tilde{F} .
- le nombre de points N_q retenus par pseudo-période. Ce paramètre est d'une extrême importance. Récemment, J. Maquet [103] a observé que ce nombre N_q devait être choisi de manière à être un diviseur du nombre moyen de points par pseudo-période estimé sur l'ensemble de la série temporelle disponible. Il apparaît qu'un tel choix améliore la stabilité des modèles obtenus. Le nombre moyen de points est actuellement estimé à partir d'un spectre de Fourier.
- Le nombre N_{cp} de coefficients K_p retenus. Initialement ce nombre était choisi par incrémentation unitaire [85]. Néanmoins, si nous considérons l'estimation de la fonction F comme un développement en série de Taylor [9], nous avons :

$$\tilde{F} = \sum_{n=0}^{N_0} \left\{ \sum_{l_n=0}^n K_{l_n} P^{l_n} \right\} + \mathcal{O}(P^{N_0+1}) \quad (3.34)$$

où $\{l_n\}$ désigne l'ensemble des indices tels que P^{l_n} soit un monôme de degré n . Un degré l définit alors un cluster de monômes de même degré. Par exemple, le cluster de degré 3 est représenté par les monômes indexés de 11 à 20 (relation 3.10). Ainsi, il apparaît pertinent [103] de choisir d'estimer la fonction F à un ordre donné. Ainsi, le nombre de coefficients ne peut prendre qu'un ensemble restreint de valeurs entières. Par exemple, dans le cas où $d_E = 3$, $N_{cp} \in \{1, 4, 10, 20, 32, 47, \dots\}$.

Par ailleurs, il peut arriver que le nombre de coefficients calculés soit largement supérieur au nombre minimal de coefficients nécessaires à l'estimation de la fonction F . Pour réduire l'expression de la fonction estimée, L. Aguirre [4, 5] utilise l'information contenue dans les points fixes du système pour réduire, *a priori*, le développement de la fonction F . Il identifie également certains groupes de monômes qui ont des effets sur la dynamique qui se compensent : il élimine alors ces termes fallacieux. Les propriétés de symétrie peuvent aussi être utilisées pour réduire le développement de la fonction \tilde{F} [25].

Nous avons vu que notre cas test est particulièrement favorable puisque la fonction F_y est polynômiale. De ce fait, il nous est possible de dériver analytiquement chaque coefficient et de vérifier nos estimations directement avec les valeurs théoriques. Les coefficients K_p étant estimés avec une très bonne précision (TAB. 3.1), l'erreur relative est inférieure à 0.001 %.

p	\mathcal{K}_p	K_p	\tilde{K}_p	ϵ_p (%)
1	$-b$	-2	-1.9999842	$0.8 \cdot 10^{-03}$
2	$-c$	-4	-3.9999729	$0.7 \cdot 10^{-03}$
3	$ac - 1$	0.592	0.5919901	$0.2 \cdot 10^{-02}$
4	$a - c$	-3.602	-3.6019751	$0.7 \cdot 10^{-03}$
5	$-a$	-0.398	-0.3979973	$0.7 \cdot 10^{-03}$
6	$a^2 + 1$	1.158404	1.1583972	$0.6 \cdot 10^{-03}$
7	$-a$	-0.398	-0.3979960	$1.0 \cdot 10^{-03}$
8	$-a$	-0.398	-0.3979978	$0.6 \cdot 10^{-03}$
9	1	1	0.9999936	$0.6 \cdot 10^{-03}$
10	0	0	$1.1426 \cdot 10^{-06}$	-

TAB. 3.1 – Coefficients K_p de la fonction F_y dans le cas du système de Rössler. Les valeurs théoriques K_p et estimées \tilde{K}_p sont reportées avec l'erreur relative de l'estimation.

L'une de nos grandes ambitions est de remonter à la phénoménologie du système physique étudié à partir d'un système reconstruit. En effet, l'un des objectifs de tout physicien est de comprendre comment se structurent différents phénomènes pour générer tel ou tel comportement complexe. Avec le paradigme de la physique linéaire, les physiciens isolaient une partie du système qu'ils

voulaient comprendre et la disséquaient. Une fois cette partie comprise, ils en isolaient une autre, et ce, jusqu'à être capables de réunir toutes les composantes afin d'élaborer une approche globale du système complexe. Depuis que les physiciens ont réalisé que les processus physiques du monde réel sont souvent gouvernés par des dynamiques non linéaires, il a fallu introduire de nouvelles méthodes car la somme des parties d'un système non linéaire n'est pas égale à son tout. Il devient primordial d'appréhender le système dans sa globalité dès la première approche... C'est tout l'intérêt d'une technique de reconstruction globale de champ de vecteurs. Bien sûr, l'information disponible sur le système est différente de celle obtenue à partir de principes premiers et il nous faut apprendre à la lire.

Le paradigme de la physique linéaire nous avait habitués au *problème dynamique direct* : à l'aide de principes premiers, des modèles sont construits pour mimer le comportement de la nature. Si le modèle génère des comportements proches de ceux observés, nous pensons que nous avions correctement compris quels étaient les phénomènes physiques mis en jeu et comment ils étaient régis. Cette méthode de la physique mathématique se décompose en deux phases. La première est une phase empirique : il est nécessaire de déterminer des propriétés empiriques fondamentales caractérisant l'allure d'un phénomène ou d'une classe de phénomènes physiques. Un ensemble de variables caractéristiques du phénomène doit être ainsi identifié. La seconde phase est mathématique. Elle consiste en l'énonciation des lois dynamiques décrivant l'évolution des variables dynamiques, écrites le plus souvent sous la forme d'équations différentielles. Une description de la variation du système dans le temps et le jeu des interactions entre les variables de base sont alors donnés. La résolution de ces équations doit alors être effectuée ou, au moins, l'obtention d'une solution approchée. Avec la physique du non linéaire, nous sommes confrontés dans notre approche au *problème dynamique inverse* [72, 77] : à partir des observations de la nature, typiquement une série temporelle, nous construisons un modèle à partir duquel nous essayons de déduire des principes premiers. La première phase, également empirique, est consacrée à un processus de mesure, quantitatif, et non d'observations qualitatives. La phase mathématique est essentiellement constituée par une approche numérique réalisée par un algorithme. La compréhension de la dynamique en termes de processus physiques termine la résolution de ce problème dynamique inverse.

Nous estimons être maintenant en mesure d'attaquer la deuxième étape : la déduction de principes premiers à partir de modèles reconstruits. Pour cela, il est crucial de pouvoir réécrire le modèle reconstruit sous la forme du système original, c'est à dire sous la forme de trois équations différentielles ordinaires de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sum_{l=1}^{N_x} a_l P^l \\ \dot{y} = \sum_{l=1}^{N_y} b_l P^l \\ \dot{z} = \sum_{l=1}^{N_z} c_l P^l \end{array} \right. \quad (3.35)$$

où P^l désigne les monômes du type $x^i y^j z^k$. Lorsque le système original est connu, cela est possible en dérivant l'expression de Φ^{-1} . Par exemple, dans notre cas test, nous avons

$$\Phi^{-1} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = Z - aY \\ y = Y \\ z = aZ - X - Y \end{array} \right. \quad (3.36)$$

qui nous permet de retrouver le système original (3.2) à partir du système reconstruit (3.7). C. Lainscseck *et al* [77] ouvre la voie à une écriture selon un modèle de la forme (3.35). Ils remarquent que ceci n'est possible que sous certaines conditions ; notamment, la transformation inverse Φ^{-1} doit être partout définie. Nous retrouvons là une nouvelle dépendance de la qualité d'une reconstruction aux propriétés de la fonction Φ et de son inverse Φ^{-1} et, par conséquent, du choix de la variable dynamique observée. De manière plus générale cependant, l'obtention de principes premiers par l'approche actuelle représente un sujet ouvert et ambitieux.

3.2.2 Problème du choix de la variable mesurée

La dépendance mentionnés ci-dessus de la qualité de la reconstruction est implicite dans le constat que ce que nous nommons les lois de la nature telles que nous les appréhendons sont relatives à notre propre état d'observateur : elles sont donc relatives à un espace descriptif particulier lié, dans le cas de la reconstruction globale de champ de vecteurs, au choix de l'observable. Selon telle ou telle variable, les lois peuvent être perçues différemment et le modèle obtenu diffère.

En effet, nous avons introduit la méthode de reconstruction globale de champ de vecteurs sur un cas test particulièrement favorable. Lorsque la transformation Φ ne définit pas un difféomorphisme, nous ne pouvons plus assurer systématiquement une reconstruction de grande qualité. Ainsi, si un modèle reconstruit est aussi obtenu à partir de la variable dynamique x du système de Rössler, il ne nous a pas été possible d'en obtenir un à partir de la variable z . Nous pouvons apporter plusieurs éléments de réponse à ce problème. Nous commençons par faire une classification des difficultés à estimer une fonction F donnée en fonction du degré des pôles qu'elle présente. Nous avons vu que, pour le système de Rössler, la fonction F_y ne présentait pas de pôles : c'est le cas le plus favorable, et Φ_y définit un difféomorphisme. Par contre, la fonction

$$F_x = ab - cX + X^2 - aXY + XZ + acY + (a - c)Z - \frac{(a + c + Z - aY + b)Y}{a + c - x} \quad (3.37)$$

est pourvue d'un pôle du premier degré alors que la fonction

$$F_z = b - cX - Y + aZ + aX^2 - XY + \frac{(ab + 3Z)Y - aY^2 - bZ}{X} + \frac{2bY^2 - 2Y^3}{X^2} \quad (3.38)$$

présente un double pôle du second degré. Nous pouvons concevoir qu'une décomposition en série de Taylor sera d'autant plus difficile à obtenir que le degré du pôle sera élevé. De manière naturelle, nous classerions les variables dynamiques par ordre d'observabilité décroissante⁵ de la dynamique pour le système de Rössler : $y \triangleright x \triangleright z$.

De fait, différents essais de reconstruction ont généré des cycles limites : la méthode identifie toutes les trajectoires à une orbite périodique (FIG. 3.7), seule possibilité pour qu'une trajectoire visite le même point de l'espace des phases. D'autres reconstructions génèrent un modèle de faible stabilité numérique qui finit par diverger à l'infini (FIG. 3.8).

3.2.3 Prise en compte d'un paramètre de contrôle

Un paramètre de contrôle peut être pris en compte dans le modèle reconstruit. Prenons le cas test. Nous souhaitons obtenir un modèle reconstruit à partir de la variable y avec une dépendance explicite au paramètre de contrôle a . Du point de vue de la technique de reconstruction, la base de polynômes multivariés doit être étendue à quatre variables : les trois variables dynamiques (X, Y, Z) et le paramètre de contrôle a [85]. Les monômes P^l sont alors de la forme

$$P^l = X^i Y^j Z^k a^n$$

Afin d'estimer la fonction F_y , il est alors nécessaire d'enregistrer des séries temporelles pour plusieurs valeurs de a . Comme nous l'avons déjà vu, la fonction F_y est polynômiale. Dans notre cas test, nous avons enregistré quatre séries temporelles pour les valeurs suivantes de a :

- $a = 0.2$, $a = 0.2625$ et $a = 0.325$ où le comportement asymptotique est un cycle limite de période 1 dont la séquence orbitale est (1). C'est le cycle limite à l'origine de la cascade de doublements de période.
- $a = 0.3875$ où le comportement asymptotique, situé juste après le point d'accumulation $a_\infty = 0.386$.

⁵Par observabilité de la dynamique à partir d'une variable dynamique, nous entendons notre capacité à reconstruire un modèle à partir de cette variable. Nous avons élaboré cette terminologie avec L. Aguirre [7].

C'est effectivement ce que nous observons. La reconstruction est très facile à partir de la variable y du système de Rössler, un peu moins à partir de x (mais le modèle obtenu est tout de même de bonne qualité) et impossible à partir de la variable z [58, 87, 85]. Nous pensons que la variable z pose problème car elle présente des léthargies durant lesquelles elle ne "voit" pas l'évolution de la dynamique (FIG. 3.5). Ceci provoque des tangences d'ordre assez élevé impliquant dans l'espace des phases reconstruit des états identiques mais dont les futurs diffèrent : aucun système d'équations différentielles ne peut alors être reconstruit en pratique puisque le principe du déterminisme n'est pas préservé (aux incertitudes de mesure près).

Ceci se traduit par des tangences qui ne sont levées que des un espace de dimension 8 comme le met en évidence un calcul de dimension minimale de plongement (FIG. 3.6) [28]. Ceci contraste fortement avec la valeur de 3 obtenue sur les deux autres variables. Précisons que le critère donné par le théorème de Takens ne suffit pas pour obtenir un plongement correct.

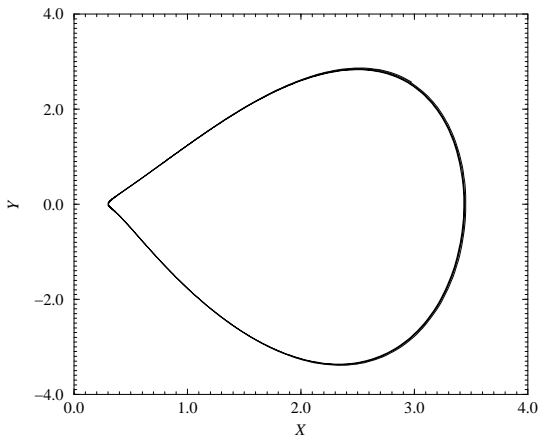


FIG. 3.7 – Reconstruction d'un cycle limite au lieu d'un attracteur chaotique à partir de la variable dynamique z du système de Rössler.

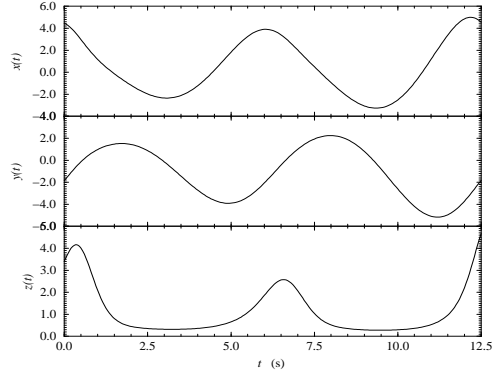


FIG. 3.5 – La variable dynamique z présente des léthargies durant lesquelles elle ne contient aucune information sur l'évolution dynamique des autres variables.

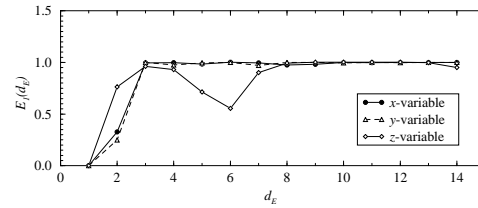


FIG. 3.6 – Estimation de la dimension minimale de plongement à partir de la variable du système de Rössler.

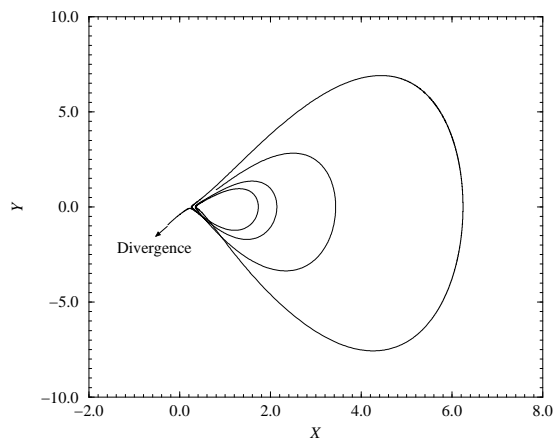


FIG. 3.8 – Reconstruction d'un modèle numériquement instable à partir de la variable dynamique z du système de Rössler. La trajectoire est éjectée à l'infini au voisinage du point fixe trivial associé au pôle de la fonction F_z .

Chaque série temporelle est constituée de 1000 points échantillonnés avec un pas de temps $\delta t = 10^{-2}$ s. Les paramètres de reconstruction sont fixés à $N_p = 100$, $N_q = 20$ et $N_{cp} = 51$. Nous avons alors obtenu un modèle en très bon accord avec le système original. Suivant les recommandations de L. Aguirre et S. Billings [6], nous avons utilisé le diagramme de bifurcation comme outil de validation de notre modèle. Il se révèle difficile de distinguer le diagramme original et le diagramme reconstruit. Afin d'avoir une validation vraiment fine, nous avons vérifié les lois d'échelle mises en évidence par P. Dutertre [42]. Elles sont au nombre de deux. La première est une relation entre les valeurs a_i du paramètre de contrôle pour lesquelles une nouvelle branche monotone apparaît sur l'application de premier retour [87, 42]. Par exemple, la troisième branche monotone apparaît pour $a_2 = 0.43295$. La loi d'échelle s'énonce

$$\delta_a = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i - a_{i-1}}{a_{i+1} - a_i} = 1.70 \pm 0.08 \quad (3.39)$$

où δ_a est une constante caractéristique du système de Rössler. Cette valeur est identique à celle obtenue sur le modèle reconstruit. La seconde loi d'échelle porte sur les coordonnées en y des points critiques C_i observés sur les applications de premier retour. Elle s'écrit

$$\delta_C = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i+1} - y_i} = 1.68 \pm 0.04 \quad (3.40)$$

où δ_C est là encore une constante caractéristique du système de Rössler. La valeur de cette constante associée au modèle reconstruit est égale à 1.72, soit peu différente de celle du système original. Nous pouvons donc en conclure que le modèle reconstruit a capturé avec une très bonne précision l'ensemble de la dynamique à partir de la connaissance de quatre régimes dynamiques différents (quatre valeurs du paramètre de contrôle a). Le modèle reconstruit permet alors de prédire le diagramme de bifurcation dans son ensemble, c'est à dire de prédire des comportements dynamiques qui n'ont pas été observés "expérimentalement".

Nous travaillons à l'heure actuelle sur l'obtention d'un modèle prenant en compte un paramètre de contrôle de l'électrolyse de cuivre dans de l'acide phosphorique [85, 62]. Néanmoins, des difficultés persistent car nous n'avons pas encore parfaitement compris comment devaient être choisies les valeurs du paramètre de contrôle. Il semble que les zones où apparaissent des cycles limites nécessitent l'observation d'un plus grand nombre de régimes dynamiques alors qu'une observation d'un comportement chaotique peut suffire à capturer la structure dynamique. Ceci peut se comprendre dans la mesure où un cycle limite visite une région restreinte de l'espace des phases alors qu'une trajectoire chaotique visite les voisinages d'une grande quantité d'orbites périodiques.

3.2.4 Systèmes non-autonomes

Les systèmes non-autonomes sont décrits par des champs de vecteurs dépendant explicitement du temps t à travers l'action d'une force extérieure $F(t)$. Ils sont alors de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t)) \quad (3.41)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur des n variables dynamiques, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ celui des p paramètres de contrôle et $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ représente la force extérieure. Nous ne considérerons ici que le cas où la force extérieure est de la forme

$$\mathbf{u}(t) = F(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.42)$$

où A représente l'amplitude de la force extérieure, ω sa pulsation et φ sa phase.

Ces systèmes non-autonomes peuvent être considérés comme non isolés du monde ambiant puisqu'une force extérieure agit sur eux. Nous avons alors à définir un espace des phases dans lequel la dynamique sera étudiée. Habituellement, les systèmes non-autonomes, considérés comme des systèmes de dimension n , sont étudiés dans un *espace des phases étendu* \mathbb{R}^{n+1} en posant $x_{n+1} \equiv t$.

Ainsi, le système de Duffing,

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x^3 = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.43)$$

où a est le taux de dissipation de l'énergie, peut être réécrit sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ay - x^3 + A \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (3.44)$$

et est dès lors considéré comme un système bidimensionnel sur lequel agit une force extérieure de la forme introduite précédemment. La dynamique de ce système est alors analysée dans l'espace des phases étendu associé au système tridimensionnel [131, 52]

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ay - x^3 + A \cos(\nu) \\ \dot{\nu} = \omega \end{cases} \quad (3.45)$$

rendu ainsi autonome. La phase n'apparaît alors plus explicitement : elle devient une condition initiale du système. Pourtant, l'espace des phases étendu ainsi défini n'est pas un espace des phases *stricto sensu* puisque le système ne possède pas de points fixes excepté le point fixe trivial pour lequel le temps cesse de s'écouler. Ceci signifie qu'un tel état n'est pas observable puisque nous sommes incapables d'interrompre le déroulement du temps. Nous devons admettre qu'il semble difficile que le comportement dynamique se structure autour d'une telle solution conformément aux résultats de Henri Poincaré selon lequel tout comportement dynamique se structure autour de points fixes. De plus, l'axe temporel ν se développe en tendant vers l'infini ; la trajectoire représentative de l'évolution temporelle n'est alors pas bornée (FIG. 3.9). Cette condition est requise par H. Solari *et al* [132] pour définir un flot, concept nécessaire à toute analyse des comportements chaotiques.

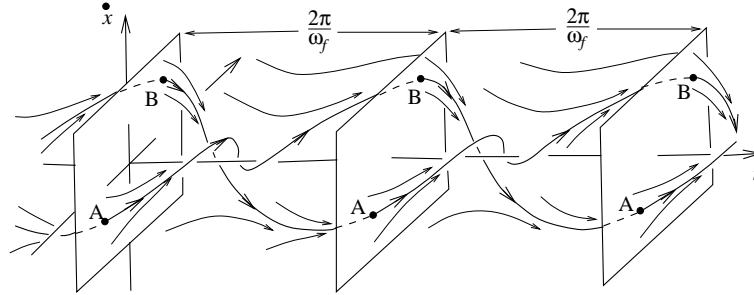


FIG. 3.9 – *Orbite périodique représentée dans un espace des phases étendu.*

Le problème est partiellement résolu en introduisant une réduction de l'espace des phases étendu en utilisant la période T_0 de la force extérieure $F(t)$. Le temps réduit

$$t^* = t(\text{mod } T_0) \quad (3.46)$$

est alors introduit. Il reste que cette période T_0 est efficace uniquement dans les cas où la synchronisation de phase est présente entre le sous-système et l'oscillateur. Dans les autres cas, abstraction faite du sous-espace associé à la force extérieure, l'intervalle de temps nécessaire à une révolution d'une section de Poincaré à elle-même peut différer de la période T_0 de la force extérieure : l'analyse est alors très différente puisque les orbites périodiques sont identifiées d'une manière très différente⁶. De manière à illustrer cette différence, l'évolution de la période de révolution sur le portrait de

⁶Rappelons que les orbites périodiques des systèmes autonomes sont définies selon leur périodicité dynamique et non leur périodicité temporelle, condition beaucoup plus restrictive.

phases généré par le système de Rössler sous l'action d'une force extérieure F de la forme donnée relation (3.42) est représentée FIG. 3.10. L'analyse est réalisée dans l'espace tridimensionnel du système de Rössler libre à l'aide d'une section de Poincaré telle que celle définie relation (2.3). La pseudo-période est trouvée égale à 5.9 s alors que celle de la force extérieure est de 6.2 s ; la période de révolution peut fluctuer de manière importante puisque la déviation standard est de l'ordre de la seconde.

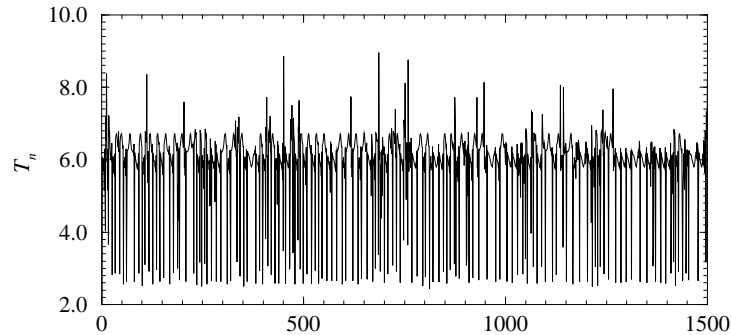


FIG. 3.10 – Evolution de la période T_n de révolution sur le portrait de phases généré par le système de Rössler forcé : $A = 1.0$, $\omega = \frac{2\pi}{6.2}$, $a = 0.398$, $b = 2.0$ et $c = 4.0$.

Un autre problème s'ajoute à ceux déjà mentionnés : le double statut du temps au sein d'un champ de vecteurs non autonome. En effet, le temps apparaît comme une variable indépendante (en fait un paramètre) sous la forme des dérivées temporelles $\dot{x} = dx/dt$ et comme une variable dynamique *stricto sensu* au sein de la force extérieure $\cos(\omega t + \varphi)$. La dualité du temps t est la racine des difficultés lors de l'analyse d'un système non-autonome. Ceci est confirmé par une tentative de reconstruction globale de champ de vecteurs à partir de la variable x du système de Duffing : dans ce cas, malgré une fonction F dont l'expression dérivée analytiquement est polynômiale, assurant théoriquement le succès de la reconstruction, aucun modèle n'a pu être obtenu [85]. Nous privilégions le rôle des dérivées temporelles. Nous pensons réellement que les sources de cet échec résident dans le double rôle du temps et qu'il nous faut privilégier le statut des dérivées temporelles.

Un dernier argument porte sur le fait que nous étudions un système non isolé. Ceci se traduit sous la forme d'une force extérieure dont les processus physiques ne sont pas décrits par le champ de vecteurs : le temps a du être introduit pour pallier cette déficience. Il est alors évident que l'espace des phases n'est pas correctement défini puisque des variables dynamiques nécessaires à la description complète des phénomènes étudiés ne sont pas prises en compte.

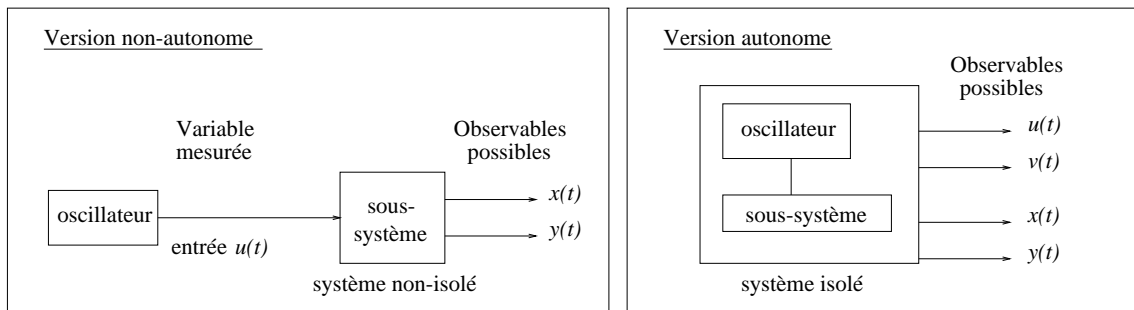


FIG. 3.11 – Représentation schématique du système non isolé et du système isolé.

La solution consiste alors à isoler le système en considérant le système étudié comme le système dynamique constitué du sous-système de dimension n et du système générant la force extérieure (FIG. 3.11). Dans notre cas, la force extérieure est solution de l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (3.47)$$

qui peut être réécrite sous la forme d'un système de deux équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 u \end{cases} \quad (3.48)$$

où les conditions initiales (u_0, v_0) définissent l'amplitude A de la force extérieure et sa phase φ . Le système de Duffing isolé est alors un système de dimension quatre régi par le champ de vecteurs suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ay - x^3 + u \\ \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 u \end{cases} \quad (3.49)$$

Le comportement asymptotique est représenté FIG. 3.12 pour l'ensemble des conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} x_0 = 3.0 \\ y_0 = 4.0 \\ u_0 = 7.5/\omega \\ v_0 = 0.0 = \varphi \end{cases} \quad (3.50)$$

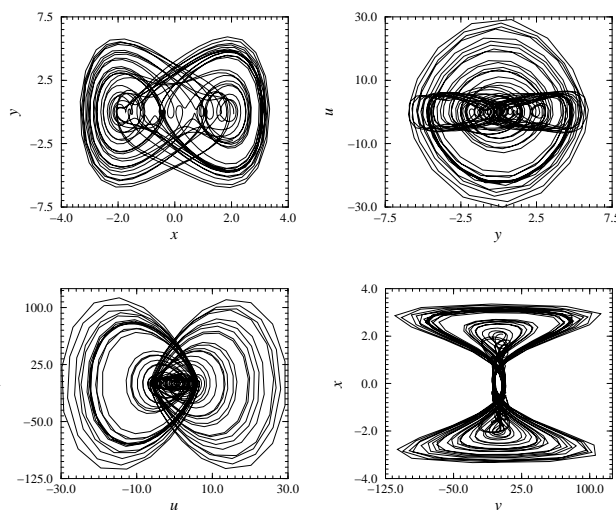


FIG. 3.12 – Projections planes du semi-attracteur de Duffing plongé dans un espace de dimension 4.

Nous constatons que la principale conséquence de cette approche des systèmes non-autonomes est que ce qui était considéré comme paramètre de contrôle, l'amplitude A de la force extérieure, est en fait une condition initiale. Ceci est important à réaliser car ce que l'on considère habituellement comme des diagrammes de bifurcation [52] n'en sont pas puisqu'ils correspondent à des transitions de comportements à d'autres sous l'effet du changement de conditions initiales. Nous notons que nous ne pouvons pas parler d'attracteurs puisque les phénomènes physiques générant la force extérieure sont conservatifs. De ce fait, pour chaque couple (u_0, v_0) de conditions initiales, il y a un comportement dynamique différent. Ceci est très probablement à l'origine des diagrammes plutôt complexes observés sur les systèmes non-autonomes [52]. Cette approche permet d'émettre une hypothèse concernant la difficulté de reproduction des diagrammes de bifurcation sur certaines expériences. En effet, la phase de la force extérieure est très rarement contrôlée impliquant des transitions d'un semi-attracteur⁷ à un autre. Des études plus poussées sont en cours de réalisation [96, 97].

3.3 Applications expérimentales

Les principales applications expérimentales que nous avons étudiées portent sur des réactions chimiques. La première est une électrolyse de cuivre dans de l'acide phosphorique. La seconde est la réaction de Belousov-Zhabotinskii. Si la première se présente comme un cas test expérimental de choix par la qualité des données expérimentales et la simplicité de la dynamique, la seconde offre un exemple de dynamique non triviale dont l'analyse demande un peu de tenacité, de là son intérêt particulier.

⁷Nous utilisons cette terminologie afin de bien mettre en évidence le fait que certaines variables dynamiques sont associées à des processus dissipatifs tandis que d'autres décrivent des processus conservatifs.

3.3.1 Electrolyse du cuivre

De nombreuses expériences d'électrochimie génèrent des oscillations dont la nature chaotique est maintenant largement étudiée [68, 13, 14, 76]. Nous étudierons ici l'électrolyse du cuivre dans de l'acide phosphorique (H_3PO_4). La route vers le chaos de cette réaction provient d'une bifurcation de Hopf suivie d'une cascade de doublements de période [8]. Comme l'ont étudié P. Coulet et C. Tresser [34] et M. Feigenbaum [46], le comportement chaotique qui suit cette cascade est caractérisé par une application de premier retour unimodale dont la structure bien connue a été étudiée au chapitre précédent. Précisons que ce scénario est celui qui est suivi par le système proposé par O. Rössler en vue de modéliser les comportements observés sur des systèmes chimiques.

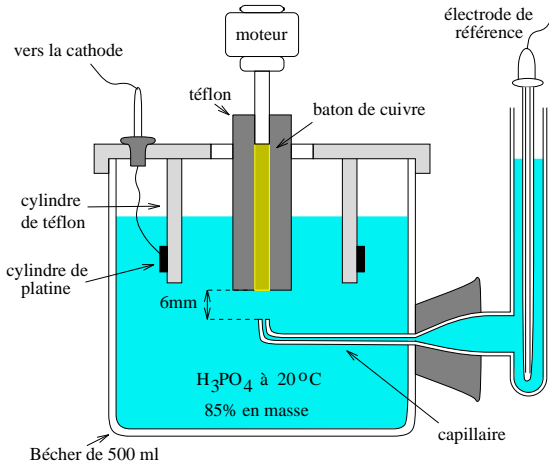


FIG. 3.13 – Montage expérimental de l'électrolyse de cuivre dans de l'acide phosphorique réalisé par Z. Fei et J. Hudson.

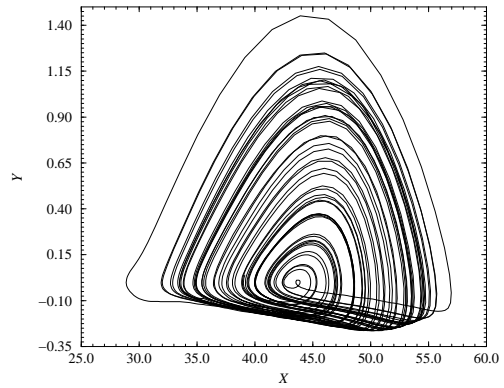


FIG. 3.14 – Projection plane de l'attracteur chaotique généré par l'électrolyse du cuivre.

L'électrolyse du cuivre dans de l'acide phosphorique est étudiée à partir de la mesure du courant traversant une électrode de référence. Le montage expérimental est composé d'une électrode constituée d'un cylindre de cuivre en rotation dont le diamètre est de 8.26 mm, plongé dans un cylindre de Téflon de 2cm de diamètre. La vitesse de rotation est maintenue à 4400 rad.mn^{-1} . Une bande de platine cylindrique est placée autour du disque comme électrode afin de maintenir un potentiel uniforme. L'ensemble est dans une cuve de 500ml contenant 250ml d'acide phosphorique à 85%. Un bain marie est utilisé pour maintenir la température constante à $20^\circ C$.

La série temporelle est constituée par la mesure de l'évolution temporelle du courant $I(t)$ circulant dans les électrodes. Nous ne considérons que le comportement asymptotique. Fidèle à nos habitudes, nous utilisons les coordonnées dérivées pour reconstruire l'espace des phases, ici inaccessible à la mesure. L'estimation de la dimension de corrélation D_2 à l'aide d'un algorithme du type Grassberger-Procaccia [63] nous indique qu'elle est égale à 2.3 ± 0.2 . Nous utiliserons donc un espace tridimensionnel, défini par le système de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} X = I \\ Y = \dot{I} \\ Z = \ddot{I} \end{cases} \quad (3.51)$$

Une projection plane du portrait de phases directement reconstruite à partir des données expérimentales est représentée FIG. 3.14.

L'attracteur chaotique obtenu est analysé par l'intermédiaire d'une section de Poincaré. L'application de premier retour (FIG. 3.15) est unimodale comme le suggérait la cascade de doublements de période. La partition de l'attracteur implique donc deux zones de topologies différentes. Dans ce cas, la dynamique est triviale puisqu'elle est associée à une dynamique du type "fer-à-cheval" de

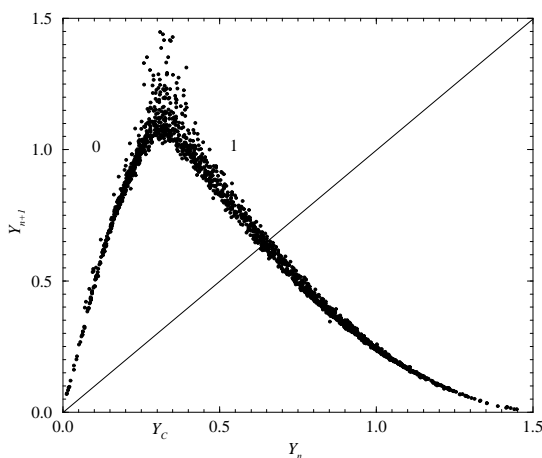


FIG. 3.15 – Application de premier retour unimodale associée à la dynamique de l'électrolyse du cuivre.

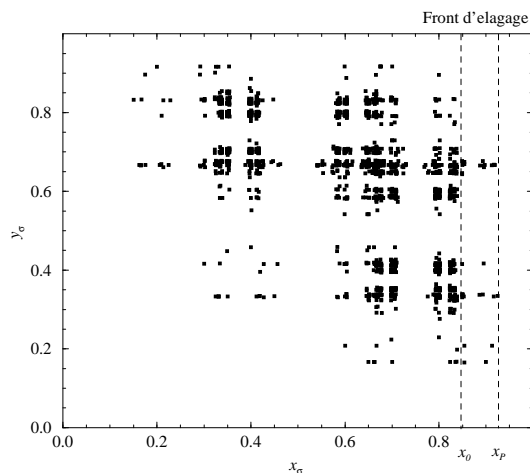


FIG. 3.16 – Plan symbolique caractéristique de la dynamique de l'électrolyse du cuivre.

Smale sans torsion globale. Le plan symbolique est calculé : nous trouvons que le front d'élagage n'est pas correctement défini par une ligne droite (FIG. 3.16). Ceci ne semble pas correspondre à une dynamique unimodale.

Le front d'élagage a pour coordonnée $x_P = 0.9250$ impliquant, comme séquence principale, la séquence associée à l'orbite de période 6 dont la séquence orbitale est (100110). Néanmoins, nous remarquons qu'une zone comprise entre $x_0 = 0.8420$ et x_P est peu visitée par la trajectoire chaotique. Ceci est clairement mis en évidence en calculant la probabilité de visite de la section de Poincaré. Une telle quantité est appelée la *densité naturelle invariante* [110] et nous la notons $\rho(y)$. Elle indique la fréquence de visite d'un intervalle donné de la section de Poincaré. Elle se présente donc sous la forme d'un histogramme. Sur un système théorique comme le système de Rössler, la densité invariante permet d'identifier l'orbite associée à la séquence principale. En effet, cette orbite périodique est la dernière à être apparue soit par bifurcation nœud-col, soit par doublement de période⁸. Elle est donc stable alors que toutes les autres orbites périodiques sont instables. De ce fait, la trajectoire chaotique passe plus de temps au voisinage de cette orbite périodique qu'au voisinage des autres, créant des pics sur la densité invariante $\rho(y)$. Nous avons représenté à titre d'exemple, la densité invariante du système de Rössler pour $a = 0.422$, valeur correspondant à la séquence principale (100110) (FIG. 3.17). Elle se révèle très différente de la densité invariante calculée sur les données de l'électrolyse de cuivre (FIG. 3.18) qui présente des extrémités évanescences : aucun pic n'est réellement distinct. Tout laisse à penser que cette diffusion de la structure de la densité invariante naturelle résulte de la présence d'un bruit dynamique de nature gaussienne dans les données expérimentales sur lequel nous reviendrons.

A partir de la série temporelle constituée de 300 000 points, une reconstruction globale de champ de vecteurs est obtenue avec les paramètres de reconstruction suivant : $N_p = 300$, $N_q = 14$, $N_{cp} = 52$. Les dérivées sont estimées à partir d'un polynôme calculé localement sur une fenêtre de $21\delta t$. L'intégration du modèle reconstruit génère la trajectoire chaotique dont une représentation plane est donnée FIG. 3.21. Cet attracteur chaotique est lui aussi caractérisé par un patron type "fer-à-cheval" sans torsion globale [90]. Néanmoins, la population d'orbites périodiques diffère légèrement de la population observée sur l'attracteur reconstruit directement à partir des données expérimentales. En effet, la densité naturelle invariante $\rho(Y_n)$ possède à nouveau une structure en pics caractéristique d'une dynamique chaotique et met en évidence le couple (1011 $\frac{1}{0}$) d'orbites périodiques dernièrement apparues par bifurcation nœud-col (FIG. 3.19). La dynamique est donc

⁸En toute rigueur, ceci n'est vrai que pour les systèmes dont la dynamique est unimodale. Dans les autres cas, d'autres bifurcations peuvent être impliquées. De plus, il peut co-exister plusieurs orbites stables ; la densité invariante présente alors une structure plus complexe puisque plusieurs séquences principales sont impliquées.

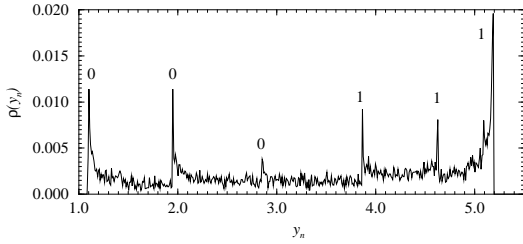


FIG. 3.17 – Densité invariante calculée pour le système de Rössler lorsque la séquence principale est (100110). ($a = 0.422$).

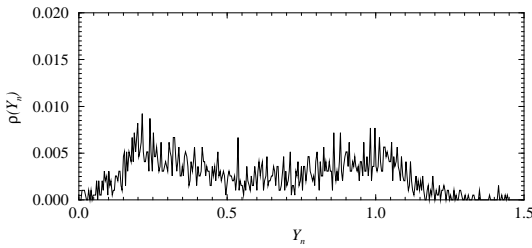


FIG. 3.18 – Densité invariante calculée pour le régime chaotique de l'électrolyse de cuivre.

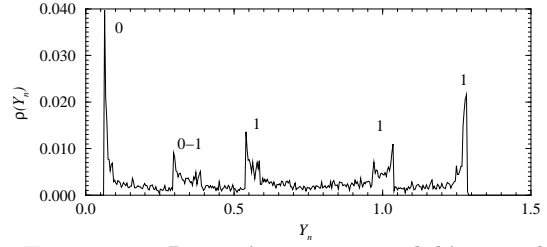


FIG. 3.19 – Densité invariante calculée pour le modèle reconstruit de l'électrolyse du cuivre. La séquence principale est (10110).

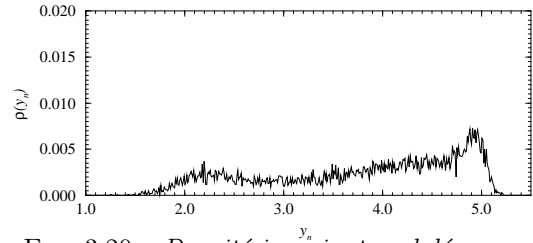


FIG. 3.20 – Densité invariante calculée pour le système de Rössler ($a = 0.401$) bruité multiplicativement.

légèrement moins développée que celle observée directement à partir des données expérimentales. Tout se passe comme s'il n'y avait pas de bruit dynamique au sein de notre modèle, ce qui est en fait implicite puisque qu'un bruit ne peut être modélisé par un système d'équations différentielles de basse dimension⁹.

De manière à vérifier notre hypothèse, nous bruitons multiplicativement le système de Rössler, pour une dynamique caractérisée par une séquence principale égale à (10110) (soit $a = 0.401$), à l'aide d'un bruit gaussien avec un rapport signal/bruit de 44 dB. La densité naturelle invariante alors obtenue est représentée FIG. 3.20. Nous retrouvons une densité invariante aux extrémités évanescentes comme nous l'avons observé sur la densité calculée à partir des données expérimentales (FIG. 3.18). Nous pouvons donc en conclure que le modèle reconstruit capture la composante déterministe de la dynamique en filtrant la composante stochastique. La technique de reconstruction globale de champ de vecteurs peut ainsi permettre d'extraire la composante déterministe d'une dynamique complexe, au moins sous certaines conditions.

Nous venons d'analyser le modèle reconstruit générant la trajectoire chaotique représentée FIG. 3.21. Nous avons précisé que la qualité de la reconstruction dépendait de paramètres de reconstruction. Ceux-ci sont déterminés à l'aide d'une fonction d'erreur [85] qui permet de sélectionner des ensembles de paramètres fournissant un modèle reconstruit numériquement stable. Il existe généralement plusieurs ensembles associés à des modèles stables. Nous pouvons alors être confrontés à des modèles générant des comportements qui peuvent sembler très différents. A titre d'exemple, nous avons obtenu un second modèle pour les paramètres de reconstruction suivants : $N_p = 470$, $N_q = 61$, $N_{cp} = 51$. Le modèle reconstruit génère alors un cycle limite de période 6 dont la séquence principale est (100110) (FIG. 3.22). Etant donné que la séquence principale sur l'attracteur chaotique (FIG. 3.21) est (100110), le modèle reconstruit est en fait très proche de celui générant le comportement chaotique. Ainsi, *une petite variation des paramètres de reconstruction implique une petite variation d'un des paramètres de contrôle du système étudié.*

⁹Nous suivons ici l'approche de R. Thom [136] selon laquelle le bruit résulterait d'une dynamique déterministe de haute dimension. Le caractère stochastique provient de notre incapacité à appréhender tous les processus responsables de ce bruit.

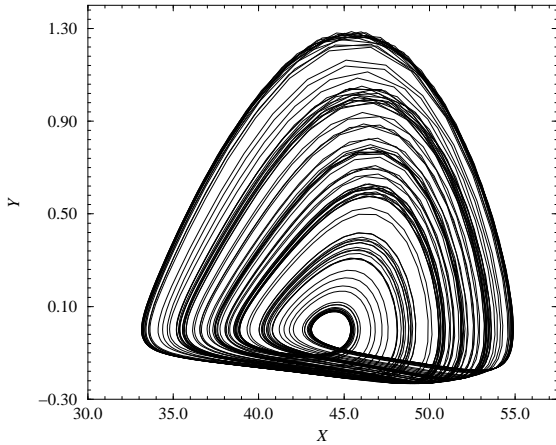


FIG. 3.21 – Projection plane de la trajectoire chaotique obtenue par intégration du modèle reconstruit. $N_p = 295$, $N_q = 14$, $N_{cp} = 52$.

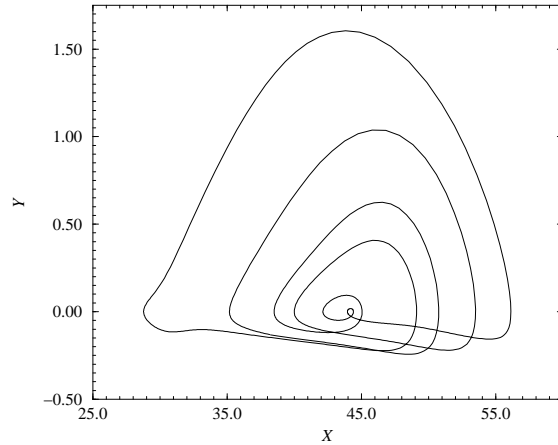


FIG. 3.22 – Projection plane du cycle limite obtenu par intégration du modèle reconstruit pour $N_p = 470$, $N_q = 61$, $N_{cp} = 51$.

3.3.2 Réaction de Belousov-Zhabotinskii

R. J. Field *et al* [47] ont publié en 1972 une analyse du comportement oscillant de la réaction de Belousov-Zhabotinskii. Depuis, de nombreuses équipes ont largement étudié la nature de ces oscillations [66, 123, 67, 10, 11]. La réaction de Belousov-Zhabotinskii se réalise dans un réacteur ouvert de 27 ml continuellement alimenté en trois espèces chimiques :

- 1) première espèce : $[NaBrO_3] = 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$ $[H_2SO_4] = 1.5N$
- 2) seconde espèce : $[CH_2(COOH)_2] = 0.15 \text{ mol.l}^{-1}$ $[H_2SO_4] = 1.5N$
- 3) troisième espèce : $[Ce_2(SO_4)_3] = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol.l}^{-1}$ $[H_2SO_4] = 1.5N$

Ces trois flux sont maintenus approximativement égaux à l'aide d'une pompe péristaltique. Le débit à travers le réacteur (φ) joue le rôle de paramètre de contrôle ; il est fixé à 0.130 ml.mn^{-1} . La solution est agitée à une vitesse de 600 rad.mn^{-1} et la température est maintenue constante à 41°C . La dynamique de cette réaction est étudiée par l'enregistrement de l'évolution temporelle de la concentration en Ce^{4+} (FIG. 3.23).

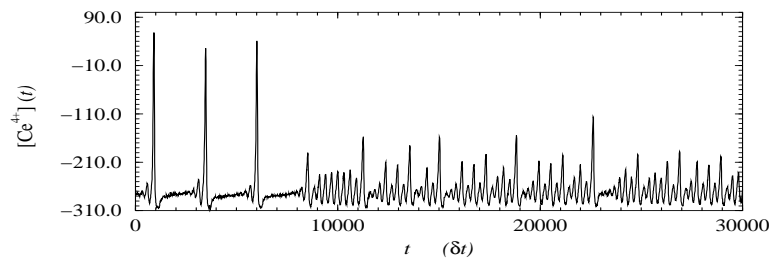


FIG. 3.23 – Série temporelle de l'évolution de la concentration en Ce^{4+} .

Nous pouvons remarquer que la série temporelle présente des oscillations de grandes amplitudes suivies de petites oscillations. Ce comportement est caractéristique des trajectoires homoclines décrites par L. Silnikov [128]. Nous les avons déjà rencontrées sur le système de Rössler. Parce qu'elles se développent au voisinage d'un point fixe nœud-col, ces trajectoires sont relativement délicates à analyser ; d'autant plus que nous utiliserons l'approche topologique plutôt que l'approche introduite par L. Silnikov [128, 11].

Nous commençons notre analyse par une reconstruction de l'espace des phases (FIG. 3.24) directement à partir des données expérimentales constituées par une série temporelle de 86 000

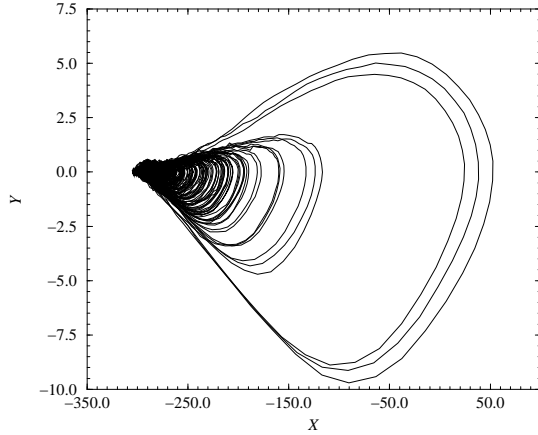


FIG. 3.24 – Projection de l'espace des phases construite sur les coordonnées dérivées à partir de la série temporelle expérimentale.

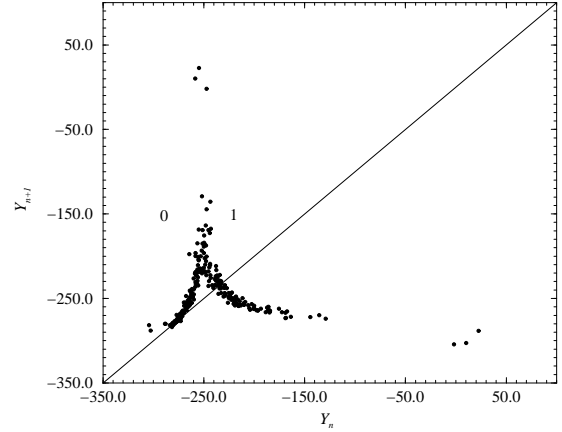


FIG. 3.25 – Application de premier retour à une section de Poincaré construite sur l'espace des phases reconstruit à partir des données expérimentales.

points. Les dérivées sont estimées après un lissage de la série temporelle ; l'échantillonnage un peu faible et la présence non négligeable de bruit ne nous permet pas de passer outre cette opération. La dimension de l'espace des phases est supposée égale à 3. En effet, G. Mindlin *et al* [107, 108] ont montré que la dynamique de la réaction de Belousov-Zhabotinskii pouvait être plongée dans un espace tridimensionnel pour des conditions opératoires différentes et P. Richetti *et al* [121] ont utilisé un système de trois équations différentielles ordinaires pour modéliser le comportement homoclinique observé sur les données expérimentales de notre étude. De ce fait, nous utilisons un espace des phases défini par la série temporelle $X(t) = [Ce^{4+}(t)]$ et ses deux premières dérivées, $Y = \dot{X}$ et $Z = \ddot{X}$.

Une application de premier retour à une section de Poincaré est construite : deux branches monotones relativement peu définies sont mises en évidence (FIG. 3.25). Cette absence de définition rend peu aisée la construction d'un patron à partir de l'attracteur reconstruit (FIG. 3.24). Ceci est dû au grand nombre d'intersections survenant au voisinage du point fixe. La détermination de leur signe est rendue délicate en raison du bruit perturbant la trajectoire. Malgré cela, après avoir calculé les nombres de liaisons de plusieurs couples d'orbites périodiques, il semble que la dynamique soit caractérisée par un patron dont la matrice de liaisons s'écrit de la manière suivante :

$$M_{ij} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Nous ne pouvons être très affirmatif sur cette caractérisation topologique car la série temporelle utilisée ne nous offre que deux cent pseudo-périodes ce qui se révèle être un peu juste pour une extraction correcte de la population d'orbites périodiques. Nous ne pouvons donc pas vérifier de manière très efficace une grande quantité de nombres de liaisons.

Nous avons obtenu un modèle reconstruit doté d'une fonction \tilde{F} constituée de 56 monômes. L'intégration de ce modèle génère le portrait de phases représenté FIG. 3.26. Nous avons superposé ce portrait de phases reconstruit à celui directement obtenu à partir des données expérimentales. Nous constatons que le modèle reconstruit modélise correctement les oscillations dont l'amplitude n'est pas trop importante. Par contre, les oscillations de très grande amplitude ne sont pas reproduites. A l'heure actuelle, nous ne savons pas exactement si cette défaillance de notre modèle provient du fait que ces oscillations aux grandes amplitudes qui interviennent au début de la série temporelle doivent être associées à un régime transitoire¹⁰ ou bien si ces grandes amplitudes

¹⁰Dans ce cas, le modèle peut ne pas reproduire ces comportements car l'espace des phases n'est pas nécessairement le même que celui du comportement asymptotique [130]. En effet, des processus physiques différents peuvent être

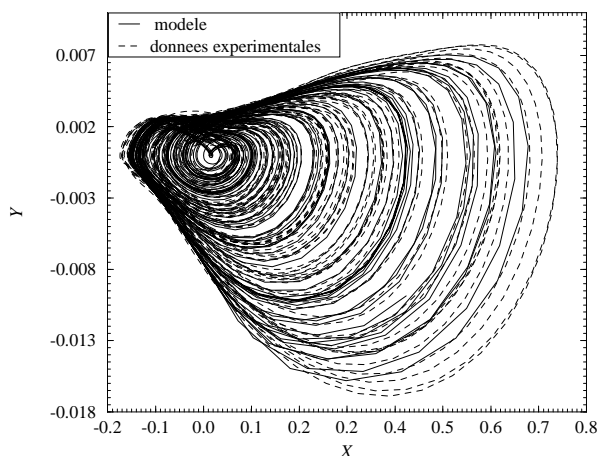


FIG. 3.26 – Portrait de phases obtenu par intégration du modèle reconstruit superposé à la trajectoire associée aux oscillations de moyenne amplitude des données expérimentales.

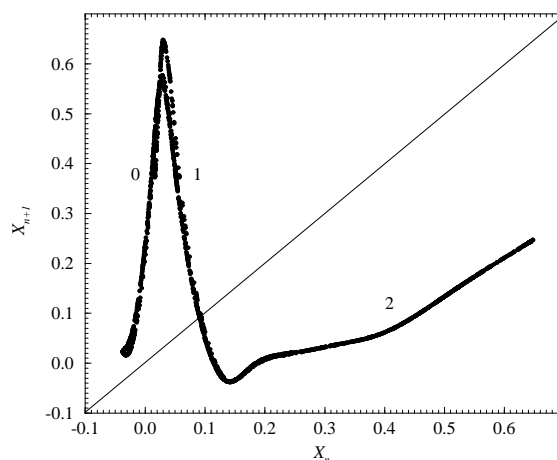


FIG. 3.27 – Application de premier retour à une section de Poincaré construite sur l'espace des phases généré par le modèle reconstruit.

nécessitent une fonction F d'une autre forme (plus de monômes¹¹).

L'application de premier retour (FIG. 3.27) est constituée de trois branches monotones. L'attracteur doit donc être divisé en trois zones de topologies distinctes. La dynamique de la réaction de Belousov-Zhabotinskii en situation homocline est donc plus complexe que celle étudiée par G. Mindlin *et al* [107, 108]. La structure de la trajectoire générée par le modèle reconstruit est beaucoup plus explicite que celle associée aux données expérimentales. Ainsi, nous avons pu dresser un patron dont la matrice de liaisons s'écrit :

$$M_{ij} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

L'avantage du modèle reconstruit est qu'il nous permet de générer un grand nombre de pseudo-périodes, ce qui permet une extraction très précise des orbites périodiques. Nous avons calculé plusieurs nombres de liaisons qui ont tous été trouvés en accord avec ceux prédits par le patron.

Suivant l'approche de Richetti *al* [121], deux points fixes sont requis pour modéliser un tel comportement. L'un autour duquel les trajectoires homoclines se développent et l'autre qui pilote le repliement des trajectoires comme sur le système de Rössler [87, 95]. Nous envisageons donc de réduire notre modèle en imposant à la fonction F de ne présenter qu'un nombre limité de points fixes. L. Aguirre et S. Billings [6] donnent un certain nombre de règles pour simplifier les modèles reconstruits à partir des propriétés des points fixes.

impliqués dans un régime transitoire et ne plus l'être après stabilisation de la dynamique : les variables nécessaires à la description des phénomènes peuvent donc ne plus être les mêmes.

¹¹ Il n'est pas impossible qu'un modèle de dimension supérieure soit requis pour modéliser ces oscillations de grande amplitude : des processus physiques supplémentaires peuvent être impliqués.

Une analyse des points fixes du modèle reconstruit, réalisée par H. Labro, révèle cinq points fixes. En raison de la structure du modèle reconstruit, les coordonnées en Y et Z sont nulles. Les coordonnées en X sont les suivantes :

$$\begin{cases} X_1 = -0.2111002 \\ X_2 = -0.1273600 \\ X_3 = -0.0145919 \\ X_4 = 0.0596228 \\ X_5 = 1.0208540 \end{cases} \quad (3.54)$$

Les points fixes sont représentés FIG. 3.28. Comme nous pouvons le constater, la corrélation entre la structure du portrait de phase et la localisation des points fixes n'est pas évidente.

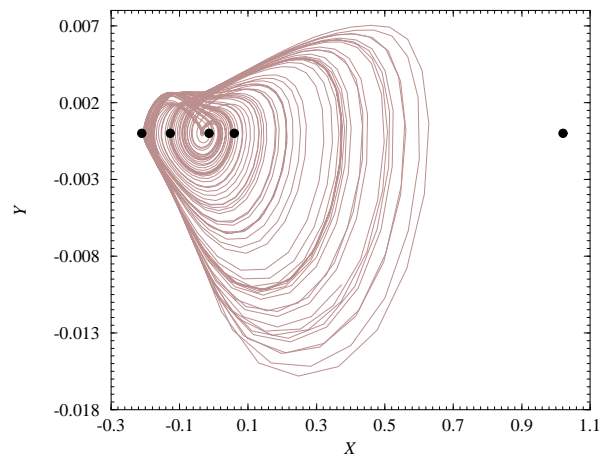


FIG. 3.28 – Localisation des points fixes du modèle reconstruit : il apparaît évident que leur nombre peut être réduit.

Chapitre 4

Applications aux Sciences Pour l'Ingénieur

4.1 Combustion turbulente

4.1.1 Le moteur à quatre temps

Le moteur à combustion interne devint une réalité pratique vers les années 1860 : à cette époque, il n'y avait pas de phase de compression avant la combustion. Le premier moteur commercialisable fut construit par J. J. Lenoir (1822-1900). Le carburant, du gaz, et l'air étaient injectés dans le cylindre durant la première demi-course du piston. La combustion du mélange était alors initiée avec une bougie, la pression augmentait, et les gaz brûlés délivraient la puissance au piston pour la seconde demi-course du piston. Le cycle était complété par un cycle de vidange. Près de cinq mille exemplaires de ces moteurs furent vendus entre 1860 et 1865. Leur puissance pouvait être de six chevaux.

Par la suite, un moteur atmosphérique, utilisant la pression résultant de la combustion du mélange essence-air pour accélérer le mouvement d'un autre piston libre et générer un vide dans le cylindre fut introduit par Nicolaus A. Otto (1832-1891) et Eugen Langen (1833-1895). La pression atmosphérique pousse alors le piston. Une soupape contrôlait l'injection du mélange, l'initiation par une flamme de gaz, et l'échappement. De manière à réduire le poids et accroître l'efficacité de la combustion, N. Otto proposa un moteur dont le cycle était divisé en quatre phases : une phase d'admission du mélange, une phase de compression avant l'allumage, une phase de combustion et finalement une phase d'échappement. Ce prototype fonctionna en 1876. En 1890, près de cinquante mille de ces moteurs furent vendus en Europe et aux Etats-Unis.

L'objectif d'un moteur thermique est de produire de l'énergie mécanique à partir de l'énergie chimique contenue dans un carburant. Dans le cas des moteurs à combustion interne, l'énergie est dégagée par combustion ou oxydation d'un carburant à l'intérieur du moteur. Le mélange air-carburant avant la combustion et les produits brûlés après la combustion constituent le fluide intervenant dans ce processus. Le rendement η est la caractéristique essentielle du degré de perfectionnement d'un moteur. La valeur du rendement thermodynamique dépend naturellement des transformations subies par l'agent moteur pendant le cycle moteur. Le cycle de rendement thermodynamique maximal a été défini par Sadi Carnot. Il est constitué par deux transformations adiabatiques réversibles : son rendement dépend uniquement des températures des deux sources de chaleur :

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (4.1)$$

où T_1 est la température de la source froide et T_2 celle de la source chaude.

Mais quel que soit le moteur thermique, le cycle thermodynamique théorique caractérisant son fonctionnement comporte des transformations différentes de celles du cycle de Carnot et son

rendement sera inférieur, ou tout au plus égal à celui-ci. C'est en 1884 que Alphonse Beau de Rochas (1815-1893) découvrit les principes du cycle à quatre temps (FIG. 4.1). Beau de Rochas donnait également les conditions sous lesquelles une efficacité optimale pouvait être obtenue avec un moteur à combustion interne : les quantités suivantes doivent être les plus grandes possibles

- Le volume du cylindre avec une surface minimum
- La vitesse de fonctionnement
- Le rapport de compression
- La pression en début de compression

Les deux premières assurent le minimum de pertes de chaleur. La troisième condition signifie que plus grande est la pression après la combustion, plus grand est le travail fourni et la quatrième que des pressions élevées assure un meilleur transfert du travail fourni. En réalité, un moteur thermique travaille selon un cycle réel qui est à son tour différent du cycle thermodynamique théorique (FIG. 4.1). Ce dernier serait réalisable dans des installations idéales où les transformations thermiques s'accompliraient sans aucune perte d'énergie. Cela est évidemment impossible et les cycles réels subissent des modifications dues aux imperfections inévitables des moteurs réels.

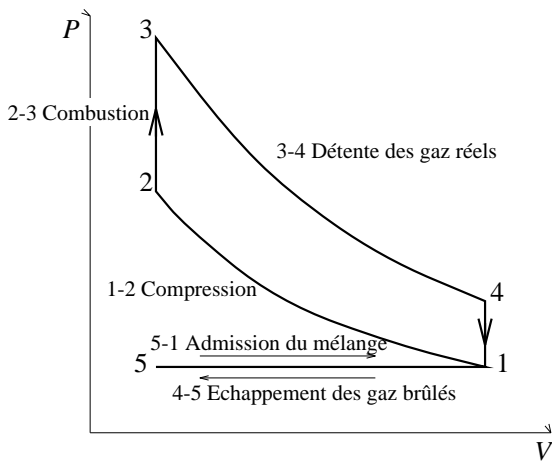


FIG. 4.1 – Cycle théorique du moteur à quatre temps proposé par Beau de Rochas.

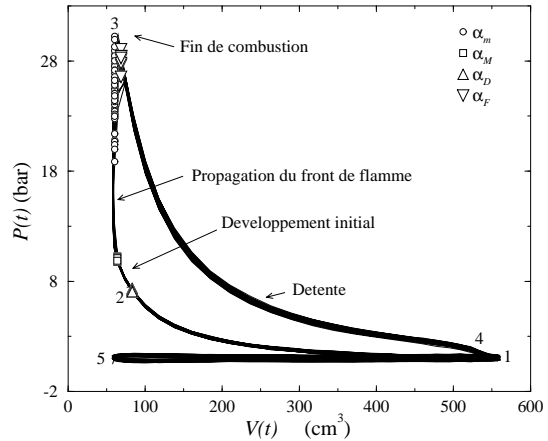


FIG. 4.2 – Diagramme PV caractéristique du moteur étudié pour le groupe Peugeot SA. Plusieurs cycles sont représentés : la dispersion des trajectoires est représentative de la dispersion cyclique.

Le moteur à pistons à allumage commandé tire son énergie de la combustion de gaz qui sont emprisonnés dans le cylindre après fermeture de la soupape d'admission. Auparavant, le combustible est prémélangé avec le comburant (air). Une fois le mélange admis dans le cylindre, il est comprimé. Suite à la phase de compression, qui s'accompagne d'un échauffement des gaz, le mélange est enflammé par une étincelle produite par une bougie électrique. La combustion se déroule alors sur environ quarante degrés vilebrequin et est approximativement centrée sur le *Point Mort Haut*. De ce fait, la combustion est déclenchée environ vingt degrés avant le point mort haut : c'est l'*avance à l'allumage*.

La nature de la combustion dépend de différents paramètres. Parmi ceux-ci, quatre sont particulièrement importants : l'avance à l'allumage, la richesse ϕ , la durée de la combustion et la charge du frein appliquée sur l'arbre moteur. La richesse est un nombre sans dimension qui quantifie l'écart à la stœchiométrie, c'est à dire l'écart à une combustion totale. Un mélange est dit *riche* si la richesse est supérieure à l'unité, il est dit *pauvre* lorsque la richesse est inférieure.

Dans l'hypothèse où le mélange enfermé dans le cylindre est constitué d'un prémélangé d'air et de gaz relativement homogène, l'étincelle électrique, qui se produit près d'une paroi du cylindre, va initier la propagation d'une flamme de prémélangé dans le milieu gazeux. La vitesse de combustion est caractérisée par la vitesse de ce front de flamme dans le cylindre. Si le gaz contenu

dans le cylindre est au repos et parfaitement homogène, la flamme se propage de manière isotrope et se développe selon une forme hémisphérique tant que les parois latérales ne la perturbent pas (FIG. 4.3.a). La flamme divise alors la chambre de combustion en une zone de gaz brûlés et une zone de gaz imbrûlés qui sont souvent considérés comme étant à la même pression [31, 30]. C'est ce qui se passe approximativement pour des moteurs à très faible vitesse de rotation, mais pour des moteurs rapides, l'entrée des gaz par la soupape d'admission et la remontée du piston provoquent des mouvements et des remous du mélange qui n'ont pas le temps de se calmer avant que l'étincelle ne se produise. La flamme du mélange se propage alors en milieu turbulent où des inhomogénéités peuvent apparaître. Lorsque la taille des remous est plus grande que l'épaisseur de la flamme, le front de flamme présente une structure plissée (FIG. 4.3.b). La production de flammes plissées est due aux mouvements de convection turbulente. Un tel phénomène est indispensable au fonctionnement normal des moteurs en régime élevé [19] puisque la structure plissée impose une vitesse de propagation plus grande.

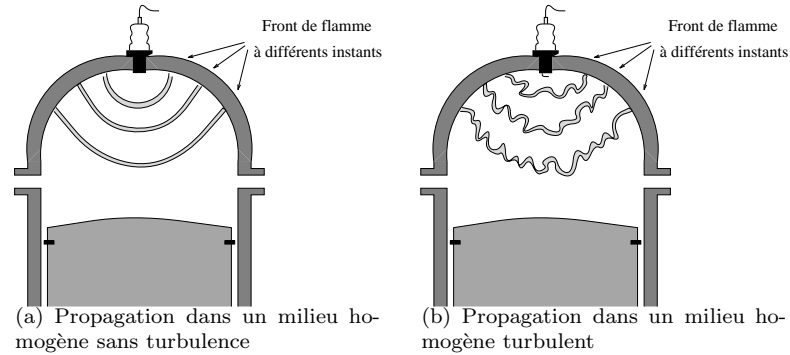


FIG. 4.3 – Aspect du front de flamme suivant l'état du mélange.

Pour l'analyse des processus internes de combustion dans un moteur à allumage commandé, le diagnostic principal est fourni par la mesure de l'histoire de la pression cylindre. A partir de cette quantité physique, quatre autres quantités sont très souvent utilisées :

- la pression maximale P_M atteinte au cours du cycle de combustion,
- l'angle vilebrequin θ_M pour lequel la pression maximale est atteinte,
- la Pression Moyenne Indiquée (PMI) au cours d'un cycle donné et
- la fraction de masses brûlées au point mort haut plus dix degrés vilebrequin

Nous utiliserons plus particulièrement la PMI définie par la relation

$$PMI = \int_{\theta=0^\circ}^{720^\circ} P \frac{dV_\theta}{V_d} \quad (4.2)$$

où dV_θ est la variation du volume à un angle vilebrequin θ donné et V_d est le volume déplacé. La PMI résultant d'une intégration sur l'ensemble du cycle moteur, elle fournit une vision globale de la combustion au cours du cycle moteur.

L'un des problèmes essentiels rencontrés dans la combustion turbulente survenant dans les moteurs automobiles est la dispersion cyclique. En effet, de nombreux facteurs entrent en jeu dans les conditions de combustion et il n'est pas toujours bien établi quels sont les paramètres de contrôle dont l'influence est cruciale sur la qualité de la combustion et de nombreux travaux sont encore réalisés afin de mieux comprendre comment contrôler l'efficacité de la combustion lors du cycle moteur.

Les variations de cycle à cycle de l'évolution de la pression à l'intérieur du cylindre constituent un phénomène important qui fait l'objet de nombreuses études par les motoristes [113] [12]. Dans son livre [65], J. Heywood identifie trois facteurs principaux responsables des variations de cycle à cycle : l'aérodynamique dans le cylindre durant la combustion, la quantité d'essence, d'air et de gaz de brûlés introduite dans le cylindre et la composition du mélange principalement au voisinage de la

bougie. Ces facteurs contribuent à la dispersion cyclique de manières différentes. L'aérodynamique des gaz et la composition du mélange au voisinage de la bougie juste avant l'initiation déterminent la croissance du noyau de flamme durant la *phase d'initiation* [78]. La manière dont la flamme est plissée peut produire des variations de la propagation de la flamme et, par conséquent, affecter le taux de combustion [141, 105, 119].

La combustion des gaz dans le cylindre peut être vue comme un système dynamique et peut donc être analysée à l'aide de concepts développés au sein de la théorie des systèmes dynamiques. Ainsi, J. Kantor [73] a suggéré que les causes réelles des variations pouvaient être générées par une dépendance non linéaire entre les maxima de température et de pression au cours d'un cycle et les conditions initiales au début du cycle. Plus récemment, J. Daily [38] a illustré la dispersion cyclique comme la conséquence d'un processus de cinétique chimique dont la dynamique pourrait être chaotique. Un autre modèle, plus intéressant, a été proposé par C. Daw *et al* [39] pour expliquer les interactions entre les fluctuations de nature stochastique des petites échelles de l'aérodynamique et une dynamique déterministe non linéaire associée aux processus de combustion.

4.1.2 Espace des phases

Comme toujours, l'analyse débute par une reconstruction de l'espace des phases à partir d'une série temporelle. Cette dernière sera constituée par l'évolution de la pression cylindre en fonction de l'angle vilebrequin habituellement utilisé pour la paramétrisation de la dynamique des moteurs à allumage commandé. Nous utiliserons donc l'espace des phases reconstruit sur les coordonnées dérivées : notons que, dans ce cas, ce sont les dérivées angulaires et non les dérivées temporelles qui sont calculées, bien que ceci n'ait aucune conséquence dans la suite de l'analyse (l'angle peut être considéré comme un temps reparamétrisé).

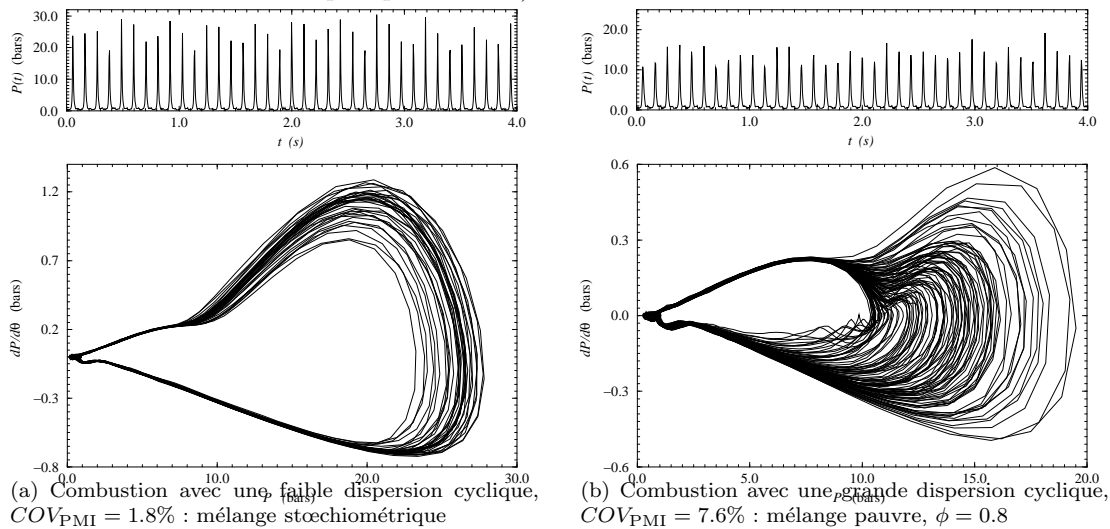


FIG. 4.4 – Portions de séries temporelles et projections planes des espaces reconstruits. La déviation standard relative COV_{PMI} de la Pression Moyenne Indiquée est précisée.

Le premier écueil survient dans l'estimation de la dimension possible de l'espace des phases associé à la combustion dans un moteur atmosphérique. En effet, nous avons déjà précisé que le théorème de Takens [135] présentait une certaine pertinence si la variable utilisée contenait toute l'information nécessaire à la description complète du système étudié. Or il apparaît que la variable dynamique utilisée pour l'étude de la dynamique d'un moteur, en l'occurrence la pression cylindre P_θ , ne contient pas d'information sur l'ensemble des processus mis en jeu dans la combustion. Elle constitue une grandeur globale sur l'ensemble du cylindre et, par conséquent, ne permet pas de définir des grandeurs locales comme la richesse du mélange au voisinage de la bougie, l'état de l'aérodynamique, etc. L'espace reconstruit à partir de la pression cylindre ne peut d'ores et déjà

pas être équivalent à l'espace des phases original, plus que jamais, inaccessible à la mesure. De ce fait, un calcul de dimension, hormis les problèmes rencontrés numériquement, se révèle de peu d'intérêt. Ceci est renforcé par le fait qu'un état du système constitué par le moteur est caractérisé par la pression, la température, les fractions de masse des espèces chimiques mises en jeu dans la cinétique de combustion, ... et un nombre indéfini de variables aérodynamiques¹. La dimension de l'espace des phases est telle que la connaissance de cet espace ne permet aucune analyse pratique... la dimension 4 nous posant déjà de nombreux problèmes!

Nous nous contenterons donc d'utiliser des projections tridimensionnelles de l'espace reconstruit. Nous n'affirmons en aucun cas que cet espace est équivalent à l'espace original. Tout ce que nous affirmons est que **ces projections sont représentatives de certains processus de la combustion** durant le cycle moteur. Notre objectif sera alors de tenter d'identifier ces processus et de comprendre comment ils dépendent les uns des autres. Les projections seront donc définies sur les variables suivantes :

$$\begin{cases} X = P(\theta) \\ Y = \frac{dP}{d\theta} \\ Z = \frac{d^2P}{d\theta^2} \end{cases} \quad (4.3)$$

Des reconstructions sont représentées pour deux ensembles de valeurs des paramètres de contrôle (FIG. 4.4). Comme le confirment les calculs de déviation standard relative de PMI, la dispersion cyclique des trajectoires est nettement corrélée à la dispersion de la PMI. Les trajectoires ainsi reconstruites sont donc représentatives de la qualité de la combustion. Nous remarquons que ces variations apparaissent sur une zone bien définie du portrait de phases reconstruit : celle associée avec la phase de combustion. Au delà, les trajectoires sont toutes confinées autour d'une trajectoire moyenne : seuls des effets aérodynamiques sont mis en jeu. La pression cylindre ne permet donc pas de quantifier les fluctuations, d'un caractère plutôt local, de l'aérodynamique au cours de l'admission et de l'échappement des gaz.

D'un point de vue modélisation, ceci a une conséquence importante : étant donné que deux trajectoires dont les futurs diffèrent peuvent être localisées à un même point de l'espace des phases reconstruit, le principe du déterminisme est violé. Suivant le théorème de Takens, il suffirait d'augmenter la dimension pour déplier la dynamique, mais l'intervalle angulaire sur lequel apparaît ce que nous pouvons appeler une *tangence* est suffisamment important pour que des dérivées d'ordre relativement élevé restent égales. Il n'est donc pas possible en pratique de séparer ces trajectoires en augmentant la dimension de l'espace reconstruit. De fait, le seul modèle qui a pu être reconstruit génère un cycle limite (FIG. 4.5), seule possibilité de satisfaire au déterminisme lorsque deux trajectoires sont confondues (l'orbite périodique).

Cette absence de structure déterministe de basse dimension est retrouvée par la construction d'une application de premier retour : un nuage de points est obtenu [99]. Plusieurs hypothèses

De plus, elle correspond, dans une certaine mesure, aux résultats de simulations numériques (FIG. 4.7) obtenues par C. Daw *et al* [39] à l'aide d'un modèle simple dans lequel l'aérodynamique est modélisée par une approche stochastique et les processus de combustion par une dynamique non-linéaire déterministe. S'il est très usuel de modéliser des écoulements turbulents par des modèles stochastiques, il n'est pas clairement établi que les processus de combustion puissent l'être par des dynamiques déterministes. Nos premiers travaux sur l'évolution de la pression cylindre vont néanmoins clairement dans ce sens. En effet, nous avons observé que, lorsque le mélange était stochiométrique et que le régime moteur n'était pas trop élevé [94], une fois la phase d'initiation achevée, les trajectoires sont localement parallèles entre elles, véritable signature d'un processus déterministe. A partir des conditions en fin de phase d'initiation, nous sommes capables de prédire l'évolution de la pression cylindre sur le reste de la phase de combustion.

¹A l'heure actuelle, tous les codes de turbulence ont recours à des modèles stochastiques ; en d'autres termes, et suivant l'approche de R. Thom de ces processus, le nombre de variables nécessaires à la description de ces phénomènes est trop grand pour être appréhendé par des modèles déterministes.

peuvent être avancées pour expliquer cette absence de structure déterministe générant la dispersion cyclique. Actuellement, nous privilégions le fait que la pression cylindre est une variable globale sur l'ensemble du cylindre; elle prend ainsi en compte un grand nombre de processus. En d'autres termes, son comportement dynamique est piloté par un grand nombre de processus dont la description complète nécessiterait un très grand nombre de variables dynamiques. La structure déterministe n'est donc pas identifiable.

Tout ce que nous pouvons maintenant espérer, c'est que d'un point de vue macroscopique, la dynamique puisse être identifiée à un système déterministe, ou au moins à un *mélange de déterminisme et de probabilités* comme le défend I. Prigogine [117]. Nous devons alors avoir recours à une variable globale : pour cela, nous utiliserons une variable intégrée sur l'ensemble du cycle moteur, la Pression Moyenne Indiquée (PMI). Lorsqu'une application de premier retour est construite à l'aide de cette variable, des structures apparaissent lorsque le mélange est pauvre (FIG. 4.6).

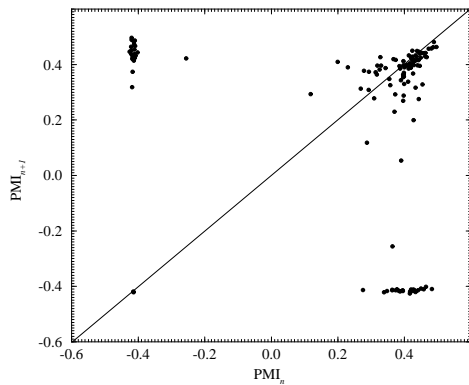


FIG. 4.6 – Application de premier retour à la PMI. Cas d'un mélange pauvre, $\phi = 0.8$.

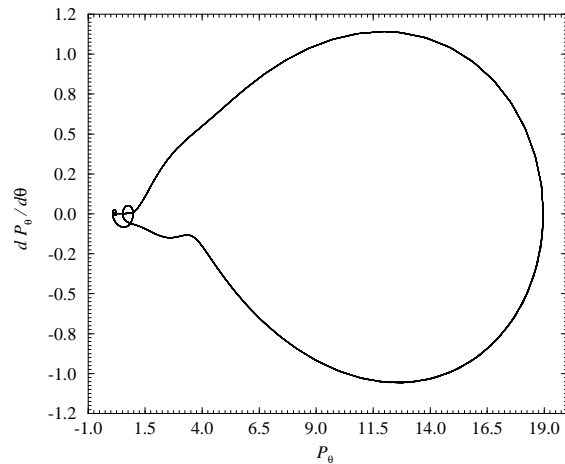


FIG. 4.5 – Orbite périodique générée par un modèle reconstruit à partir de l'évolution de la pression cylindre dans le cas du mélange stœchiométrique.

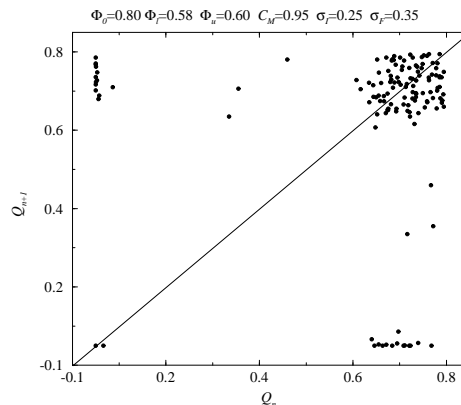


FIG. 4.7 – Application de premier retour générée par le modèle de Daw et al pour des conditions opératoires proches de celles utilisées pour l'enregistrement des données expérimentales.

Néanmoins, des processus physiques jouant un rôle important dans les variations de cycle-à-cycle ne sont pas pris en compte dans le modèle de Daw *et al* [101] : ceci implique une sur-estimation des composantes aérodynamiques dues à l'aérodynamique. Nous travaillons actuellement à l'élaboration d'un modèle plus complet afin d'utiliser des ordres de grandeur corrects. Un tel modèle devrait nous permettre d'identifier quels sont les paramètres de contrôle influençant la dispersion cyclique, et de comprendre comment agir sur eux afin de contrôler celle-ci.

4.1.3 Phases de la combustion

Nous avons vu que le cycle moteur était décomposé en quatre temps. Le cycle de combustion, typiquement compris entre l'instant d'allumage et la fin de la combustion, peut, lui-aussi, être décomposé en quatre phases. Classiquement, ceci est réalisé à l'aide d'un code de calcul de fractions de masses brûlées [134]. Le cycle de combustion se décompose selon

- *la phase d'initiation* associée à l'intervalle angulaire correspondant à une Fraction de Masses Brûlées (FMB) inférieure à 2% ; cette phase débute avec l'étincelle de la bougie et se termine par la formation d'un cœur de flamme. Cette phase n'est pas détectée par la pression cylindre car les énergies mises en jeu n'influencent pas suffisamment la pression dans le cylindre.
- *la phase de développement* correspond à une FMB comprise entre 2% et 10 % ; durant cette phase, le cœur de flamme se développe pour devenir un front de flamme.
- *la phase de propagation* est caractérisée par une FMB comprise entre 10 % et 90 % ; elle est associée à la propagation du front de flamme à travers le cylindre.
- *la fin de la combustion* correspond aux 10 % restant de la fraction de masses.

Cette distinction est celle couramment utilisée dans l'analyse des processus de combustion. Précisons qu'elle repose sur des codes de calcul de fractions de masses brûlées utilisant comme entrée l'évolution de la pression cylindre. Ces codes nécessitent de nombreuses hypothèses sur les processus de combustion : notamment, la combustion est supposée isentropique et adiabatique. Les processus de compression et de décompression sont supposés suivre une loi polytropique

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (4.4)$$

où l'exposant $\gamma = c_p/c_v$ est fixé à 1.3 (± 0.05) pour les carburants usuels [65]. Il est comparable à la valeur moyenne de γ_u pour les imbrûlés durant la phase de compression, mais il se révèle plus grand que l'exposant γ_b associé à un mélange de gaz brûlés durant la phase de décompression en raison des pertes de chaleur intervenant aux parois du cylindre. D'autres effets sont également pris en compte ; une description relativement complète peut être consultée dans le livre de J. Heywood [65]. Retenons simplement que de **nombreuses hypothèses sont faites sur les processus de combustion pour l'élaboration de ces codes.**

De plus, un grand nombre de paramètres de contrôle tels que l'exposant γ doivent être fixés pour le bon fonctionnement des codes de calculs de fractions de masses brûlées. Aussi, les dynamiques mises en jeu au sein de ces codes étant non linéaires, il n'est pas toujours compris comment les paramètres de contrôle peuvent influencer les résultats. A cela s'ajoute le fait que, lors d'une expérience, il n'est pas toujours aisé d'accéder simultanément à la mesure de l'ensemble de ces paramètres (température de la tête du piston, température des parois de la chambre de combustion, température des gaz brûlés, pertes de chaleur par les parois, ...).

On comprend donc pourquoi notre démarche s'insère dans le but d'élaborer une technique d'analyse des processus de combustion sans aucune hypothèse *a priori* sur les processus de combustion. Le début de la combustion est facilement identifié puisqu'il est associé à l'angle vilebrequin auquel survient l'étincelle produite par la bougie. Il est usuellement exprimé comme une avance à l'allumage A_A relativement au point mort haut. Lors de nos expériences, nous n'avons pas observé de différence significative entre des cycles moteur sans combustion et des cycles avec combustion avant l'angle d'allumage θ_{init} , en dépit de variations possibles dues aux gaz résiduels dont la température peut changer le rapport spécifique γ_u du mélange non brûlé. Ceci est illustré FIG. 4.8 où une trajectoire associée à un moteur en régime entraîné est superposée à une trajectoire correspondant à un régime de combustion ; les trajectoires divergent l'une de l'autre une fois la phase

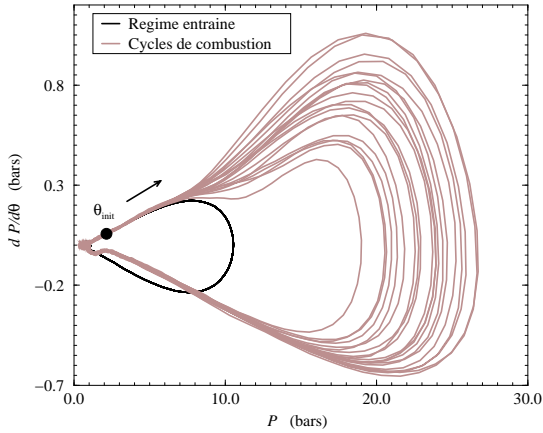


FIG. 4.8 – Comparaison entre des projections planes des trajectoires associées avec des cycles moteur d'un régime de combustion et du régime entraîné.

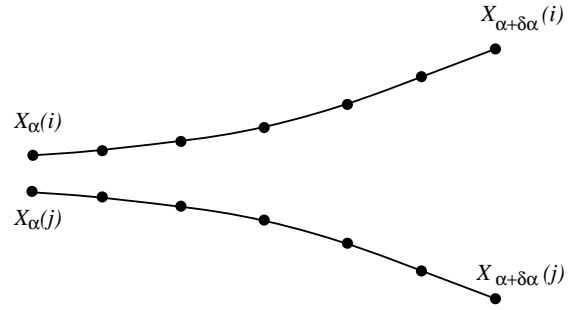


FIG. 4.9 – Evolution de la distance entre deux cycles en fonction de l'angle vilebrequin. Ici, la fenêtre angulaire est fixée égale à 6° .

d'initiation achevée. Nous notons également que, en raison de l'influence de conditions thermodynamiques différentes (pression, température, fractions de masses, ...) la trajectoire associée au régime entraîné diffère de celle du régime de combustion en fin de cycle moteur, même une fois la phase de combustion achevée.

Une fois la phase d'initiation achevée, peu après l'allumage, la trajectoire diffère significativement de la trajectoire correspondant au régime entraîné en raison de l'accroissement de pression induit par le développement de la flamme. Ajoutée à cela, une dispersion cyclique entre les différents cycles moteur du régime de combustion apparaît lors de la phase de combustion. Cette dispersion cyclique se réduit pour disparaître en fin de cycle moteur. D'une certaine manière, la dispersion cyclique représente une signature de la phase de combustion, débutant par une divergence marquée entre les différents cycles et s'achevant par une convergence des uns vers les autres.

Ces propriétés dynamiques nous permettent d'identifier les phases de la combustion jouant un rôle essentiel dans la dispersion cyclique sans aucune connaissance *a priori* sur les processus de combustion mis en jeu. Ceci est réalisé en associant différents angles critiques aux différents événements apparaissant durant un cycle, définis par le calcul d'un *taux de divergence* λ_θ à partir de la série temporelle de l'évolution de la pression cylindre. Ce taux de divergence est adapté de la définition de l'exposant de Lyapunov [70] aux données de pression cylindre. Il est défini par :

$$\lambda_\theta \approx \frac{1}{N!} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \log \frac{|X_{\theta+\delta\theta}(i) - X_{\theta+\delta\theta}(j)|}{|X_\theta(i) - X_\theta(j)|} \quad (4.5)$$

où $X_\theta(i)$ désigne la valeur de la pression cylindre à l'angle vilebrequin θ durant le $i^{\text{ème}}$ cycle, $\delta\theta$ est une fenêtre angulaire sur laquelle est estimé le taux de divergence (FIG. 4.9) et N est le nombre de cycles sur lequel le taux de divergence est estimé. Ce taux de divergence peut être assimilé, dans l'esprit, à un exposant de Lyapunov local.

La fenêtre angulaire est fixée empiriquement à 6° . En deçà, des oscillations parasites apparaissent lors de l'évaluation de λ_θ en raison de corruption des données par du bruit de mesure. Cette valeur de 6° est la plus petite valeur pour laquelle ces oscillations parasites ne perturbent pas les résultats. L'évolution du taux de divergence est représentée FIG. 4.10 pour des cycles de combustion et des cycles de moteur entraîné.

Comme nous l'attendions, le taux de divergence λ_θ est peu différent de zéro pour un moteur entraîné puisque la pression cylindre ne peut déceler des fluctuations uniquement dues à

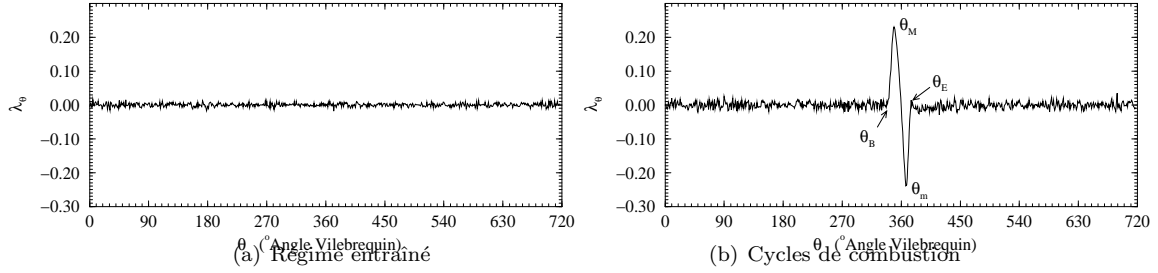


FIG. 4.10 – Taux de divergence λ_θ en fonction de l'angle vilebrequin pour deux ensembles de conditions opératoires différents. λ_θ est estimé sur environ 300 cycles.

l'aérodynamique. De ce fait, il n'y a pas de divergence d'un cycle à l'autre, excepté des petites variations dues au bruit de mesure. Inversement, lorsque la trajectoire est représentative de cycles de combustion, une large oscillation du taux de divergence sur le cycle de combustion apparaît (FIG. 4.10.b). A partir de la structure de l'oscillation, quatre angles critiques peuvent être définis :

- l'angle θ_B correspondant au début de l'oscillation,
- l'angle θ_M pour lequel λ_θ atteint sa valeur maximum,
- l'angle θ_m défini par la valeur minimum de λ_θ et
- θ_E associé à la fin de l'oscillation.

Nous avons assimilé les trois intervalles de l'oscillation du taux de divergence λ_θ aux trois phases usuelles de la combustion. L'intervalle $[\theta_B, \theta_M]$ est associé à la phase de développement, l'intervalle $[\theta_M, \theta_m]$ à la phase de propagation et l'intervalle $[\theta_m, \theta_E]$ à la fin de la combustion. La phase d'initiation n'est pas détectée par la pression cylindre et, par conséquent, est définie sur l'intervalle $[\theta_A, \theta_B]$ où θ_A est l'angle vilebrequin auquel se produit l'étincelle de la bougie. Nous avons engagé une validation de ces hypothèses par une confrontation avec des résultats de code de calcul de fractions de masses brûlées mais, en raison de leur utilisation rendue très lourde par le nombre de paramètres de contrôle et leur action, pas toujours très bien contrôlées, nous n'avons pu valider complètement nos suppositions.

Néanmoins, à l'aide du taux de divergence, nous avons retrouvé un certain nombre de résultats bien connus des motoristes [99, 101]. Par exemple, nous avons observé que l'initiation de la flamme dépend de la richesse du mélange ; l'initiation de la flamme est plus rapide lorsque le mélange est stoechiométrique que lorsqu'il est pauvre. Il en est de même pour la propagation de la flamme.

Nous avons également utilisé les reconstructions planes des trajectoires entre un régime entraîné et des cycles de combustion pour mettre en évidence une corrélation très forte entre les variations de la Pression Moyenne Indiquée et celles de l'intervalle angulaire associé à la phase d'initiation : cela plaide en faveur d'une importance prépondérante de cette phase d'initiation dans la qualité de la combustion et confirme le fait que la qualité d'un cycle de combustion se joue durant cette phase. Ensuite, tout peut être prédit à partir de ces conditions initiales (au moins pour de faibles régimes moteur).

Ces premiers résultats encourageants se poursuivent actuellement vers une modélisation de la dispersion cyclique à l'aide de modèles construits sur une double approche déterministe et stochastique telle que celle développée par Daw *et al.*, à la seule différence que nous travaillerons sur la base de la Pression Moyenne Indiquée et non sur la quantité de chaleur dégagée (issue d'un code de calcul de masses brûlées que nous jugeons par trop dépendant des paramètres de contrôle qui ne sont pas toujours correctement estimés).

4.2 Instabilités de jets

4.2.1 L'atomisation

L'atomisation des liquides est un processus impliqué dans de nombreuses applications industrielles (produits pharmaceutiques) et domestiques (produits ménagers, parfums). Nous avons

abordé précédemment les moteurs thermiques qui, eux aussi, ont recours à l'atomisation pour la préparation du mélange comburé. Il est maintenant clairement établi que les caractéristiques du *spray*² conditionnent fortement la qualité du mélange et, par conséquent, la qualité de la combustion.

Un spray est toujours issu d'un système liquide libre, défini par la création d'au moins une interface, véritable frontière physique entre la phase gazeuse et la phase liquide. Il peut alors se manifester des perturbations qui vont déformer la structure de l'écoulement liquide : le système liquide est instable. Parmi ces perturbations, certaines vont croître pour finalement conduire à la rupture du système liquide en gouttes dont la taille et la sphéricité dépendent de l'injecteur et des conditions opératoires utilisées.

Les caractéristiques de l'écoulement liquide sont imposées par l'écoulement qui se développe au sein même de l'injecteur. Nous supposons dans notre étude que l'injecteur est donné et que seul le processus d'atomisation de l'orifice de sortie de l'injecteur à la rupture en gouttes sera étudié. Les différentes étapes de la déformation du système liquide sont difficilement dissociables. À partir de l'orifice, l'écoulement liquide évolue librement dans un environnement gazeux dont les propriétés physiques et cinématiques ont, elles aussi, une influence importante sur la formation du spray.

Nous nous intéresserons donc plus particulièrement à l'évolution des perturbations imposées au niveau de l'injecteur par un système d'excitation ; nous suivrons ainsi la relaxation de ces oscillations forcées et la croissance de perturbations pouvant être initiées par l'interaction liquide/gaz ou par la structure interne de l'écoulement liquide. De la compétition résultant du réseau de forces et d'échanges d'énergies de ces perturbations naît la croissance de certaines d'entre elles qui conduisent à la déformation du système liquide impliquant la rupture en gouttes. Actuellement, il est très délicat de prédire avec exactitude le spectre des longueurs d'onde des perturbations qui conduisent à la rupture et de décrire les phénomènes physiques responsables de leur croissance.

Parmi le grand nombre des perturbations entraînant la déformation du système liquide, il en existe au moins une qui est amplifiée jusqu'à la rupture du système liquide. Ceci constitue le point de départ de la modélisation des processus d'atomisation par une théorie linéaire. Les théories linéaires sont basées sur la décomposition de l'écoulement liquide en un écoulement initial non perturbé et un écoulement aux perturbations. Supposé stationnaire, l'écoulement non perturbé est décrit par les caractéristiques géométriques du système liquide, sa vitesse moyenne. La première configuration étudiée est celle d'un jet cylindrique immobile (de faible vitesse) et évoluant dans le vide (faible densité de gaz) ; les bases de ce calcul ont été posées par Lord Rayleigh [118]. Pour un tel système liquide, pourvu d'une symétrie cylindrique, il existe une compétition entre des forces de tension de surface stabilisatrices dues à la présence de la perturbation et des forces de tension de surface déstabilisatrices initiées par la courbure naturelle de l'écoulement perturbé. Actuellement, nous nous limitons à une situation proche de celle étudiée par L. Rayleigh (pour une revue sur les différentes théories, consulter [41]).

Un jet cylindrique est généralement défini par son rayon r , sa vitesse débitante V ainsi que par les propriétés physiques du liquide qui le constitue et du gaz environnant dans lequel il évolue. La modification des processus d'atomisation en fonction de la vitesse débitante s'accompagne d'une variation continue de la longueur intacte du jet L_{BU} , ou longueur de rupture, qui représente la longueur de l'orifice de l'injecteur à la rupture en gouttes. Dans le cadre de la théorie développée par L. Rayleigh, cette longueur est donnée par :

$$L_{BU} = \frac{V}{\omega_{max}} \log \left(\frac{r}{\eta_0} \right) \quad (4.6)$$

où η_0 est l'amplitude initiale de la perturbation, r le rayon du jet et ω_{max} le taux de croissance de l'onde dominante.

Les jets que nous étudions actuellement sont proches de la configuration de L. Rayleigh. L'injecteur nous est fourni par l'équipe de M. Ledoux et C. Dumouchel du CORIA. Il nous permet ainsi de corrélérer nos résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes. Le montage expérimental de l'expérience est similaire à celui utilisé par S. Leroux *et al* [83, 17, 18]. Le liquide est poussé

²SPRAY. *n. m.* (1964 ; mot anglais). *Anglicisme.* Jet de liquide projeté en fines gouttelettes par pulvérisation. *Petit Robert.*

par la mise en pression d'un réservoir de quatre litres. La pression dans le réservoir est régulée de manière à contrôler le débit en sortie d'injecteur. L'injecteur est pourvu d'un milieu poreux tranquilisant le liquide et se termine par une aiguille d'injection de diamètre interne de $600 \mu\text{m}$ de diamètre. Cette valeur correspond à la valeur nominale du diamètre du jet.

Dans cette expérience, un haut-parleur, connecté à un générateur de fréquence, impose une perturbation sinusoïdale à l'aiguille. Le haut-parleur est placé contre l'aiguille, ce qui ne manque pas d'induire un déplacement transversal du jet. Contrairement au cas répandu où l'excitation est longitudinale, la symétrie cylindrique du jet est donc brisée. Des micro-déplacements rendent possible le déplacement simultané de l'injecteur, de l'aiguille, et du haut-parleur selon l'axe vertical. Cela permet d'étudier la dynamique du diamètre du jet, de la sortie de la buse à la rupture en gouttes, le long de l'axe du jet.

Une sonde optique associée à une chaîne d'acquisition permet d'obtenir la mesure de l'évolution temporelle de l'intensité d'une nappe laser diffusée par une section transversale du jet. Dans le cadre de sa thèse, J. Godelle a vérifié à l'aide de simulations numériques que l'intensité diffusée était directement proportionnelle à la section du jet.

4.2.2 Caractéristiques du jet

Dans cette étude, le liquide utilisé est de l'eau. La vitesse débitante est ajustée pour se situer dans un intervalle de 0.94 m/s à 1.02 m/s pendant la durée de l'acquisition, correspondant à un régime proche de celui prédit par la théorie linéaire de Rayleigh : le rapport de la longueur de l'aiguille L sur le diamètre $2r$ est égal à 200. Par conséquent, le profil des vitesses en sortie d'aiguille est considéré comme étant un profil de Poiseuille. La description de Rayleigh reste valide et nous pouvons prédire la nature de l'instabilité dominante, définie comme la perturbation sinusoïdale dont le taux de croissance est maximum. La théorie de Rayleigh définit une relation entre les caractéristiques du jet et la pulsation ω_M de ce mode prépondérant :

$$\omega_M = 0.343 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho r^3}} \quad (4.7)$$

où σ est la constante de tension superficielle (en N.m^{-1}). Dans notre cas, la fréquence correspondante F_{Ray} associée à la longueur d'onde de la perturbation la plus instable dans la description de Rayleigh est égale à 348 Hz. L'excitation réduit le temps caractéristique de rupture en gouttes du jet ; la longueur de rupture L_{BU} est, elle aussi, réduite par rapport à celle prédite par la théorie de Rayleigh, (cf. relation 4.6) : selon nos conditions opératoires, la longueur L_{BU} est de 16.8 mm. L'excitation associée à la distribution la plus étroite possible de la taille des gouttes a été obtenue pour $F_e \approx 360 \text{ Hz}$.

Précisons que l'excitation induit une brisure de la symétrie cylindrique, symétrie nécessaire au développement des instabilités décrites dans le cadre de la théorie de Rayleigh. Nous nous attendons donc à observer une dynamique inédite par rapport à celle prédite par la théorie de Rayleigh.

4.2.3 Analyse de la dynamique du diamètre du jet

L'analyse débute par la reconstruction d'un espace dans lequel les propriétés dynamiques vont être étudiées. Aucune reconstruction de champ de vecteurs n'étant tentée dans cette analyse, nous utiliserons les coordonnées décalées, plus simples d'utilisation. Ce sont essentiellement des projections bidimensionnelles qui seront utilisées : elles sont définies par les coordonnées $(V(t), V(t + \tau))$ où $V(t)$ représente l'intensité de la lumière diffusée (en fait une tension qui lui est proportionnelle) par le jet et τ le décalage temporel. Quelques unes de ces projections de l'espace reconstruit sont représentées de la sortie de la buse à la rupture en gouttes FIG. 4.11.

Suivant la théorie de Rayleigh, la fréquence censée jouer un rôle prépondérant dans la rupture en gouttes est voisine de F_{Ray} . Puisque nous sommes dans le cas d'un jet excité à la fréquence F_e , proche de celle de Rayleigh, il semble naturel que ce soit cette dernière qui influence de manière prépondérante la dynamique, au moins en sortie de buse. L'excitation étant sinusoïdale, en prenant

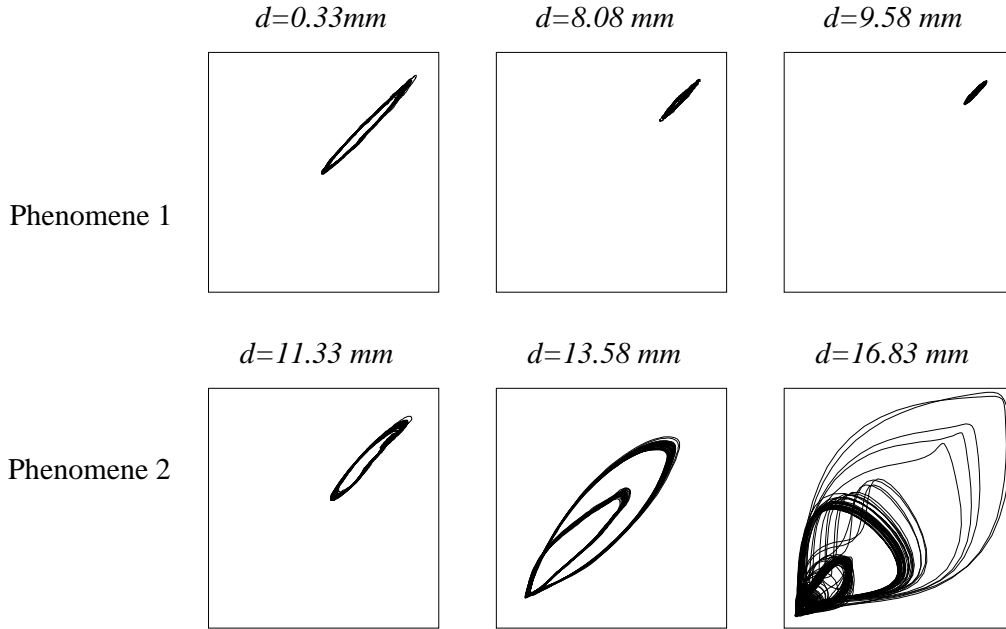


FIG. 4.11 – Portraits de phase reconstruits depuis la sortie de la buse jusqu'à la rupture en gouttes. Le décalage τ est de $1/40F_e$. Deux dynamiques différentes sont mises en évidence le long du jet.

A partir de cet extrait de l'évolution de la dynamique du jet, de la sortie de la buse à la rupture en gouttes, nous remarquons que jusqu'à une distance de 9.58 mm environ, le jet présente un comportement oscillatoire amorti (phénomène 1, FIG. 4.11); au delà, un second comportement se développe pour aboutir à la rupture en gouttes vers 16.8 mm (phénomène 2, FIG. 4.11). Afin de mieux analyser le premier phénomène, nous choisissons un autre décalage temporel pour construire les projections $(V(t), V(t + \tau))$. Le choix du décalage temporel τ a une influence importante sur la qualité de la reconstruction; typiquement, le décalage temporel doit être choisi sur l'intervalle $[0, T_0/2]$ où T_0 est la pseudo-période de la dynamique [27].

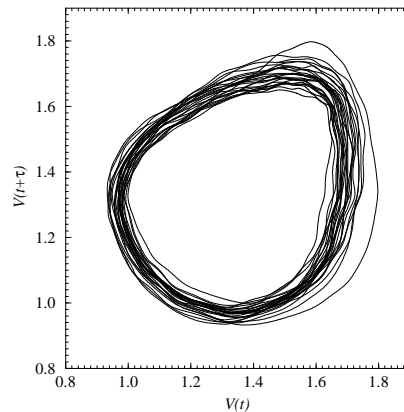


FIG. 4.12 – La forme quasi-circulaire du portrait révèle la nature sinusoidale de la perturbation due à l'excitation : $\tau = 1/4F_e$.

un décalage temporel τ égal au quart de la période $T_0 = 1/F_e$, le portrait doit être un cercle en vertu de la relation

$$\sin(\omega(t + \tau)) = \cos(\omega t) \quad (4.8)$$

où $\omega = 2\pi/T_0$. La reconstruction des projections avec une telle valeur du décalage est représentée FIG. 4.12 pour une distance à la buse de $d = 0.33$ mm. La configuration quasi-circulaire de la projection est une confirmation de la prépondérance de la perturbation liée à l'excitation de l'aiguille.

Si, maintenant, les projections de la dynamique sont reconstruites avec cette valeur du décalage temporel pour des distances à la buse supérieures à environ 9.58 mm, les portraits sont beaucoup plus développés suivant la seconde bissectrice (FIG. 4.13) : le décalage temporel est trop grand, la valeur de $\tau = 1/40F_e$ est bien mieux adaptée. De ce fait, les phénomènes physiques mis en jeu de part et d'autre de la valeur critique $d_c \approx 9.58$ mm sont de natures différentes. Le premier phénomène est donc lié à l'amortissement de la perturbation liée à l'excitation de l'aiguille.

Le second phénomène est associé à la croissance d'un mode prépondérant dont la fréquence est égale à la fréquence d'excitation F_e . Toutefois, nous n'avons plus affaire à une sinusoïde pure puisque des harmoniques sont impliqués. Il semble que la symétrie de révolution cylindrique soit nécessaire au développement des harmoniques comme le suggère la théorie de Rayleigh. Ainsi, l'amortissement des perturbations liées à l'excitation, brisant les propriétés de symétrie, est obligatoire avant la croissance des modes qui impliqueront la rupture en gouttes. Notons, toutefois, que l'application d'une perturbation initiale accélère le processus de rupture puisque la longueur L_{BU} est réduite par rapport à la longueur prédite par la théorie de Rayleigh.

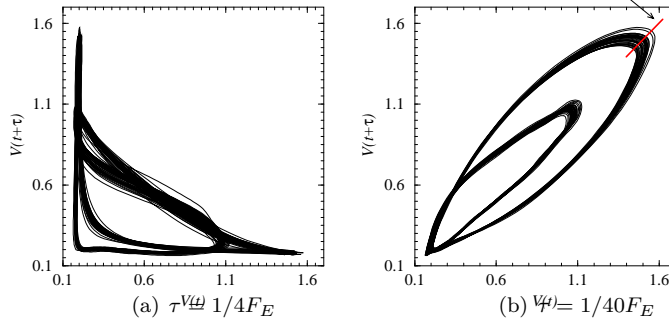


FIG. 4.13 – Effet de la valeur du décalage temporel sur les portraits reconstruits. Pour $\tau = 1/4F_e$, le portrait est trop déplié suivant la seconde bissectrice. Un décalage τ de $1/40F_e$ permet une meilleure lisibilité de la dynamique ($d = 13.58$ mm).

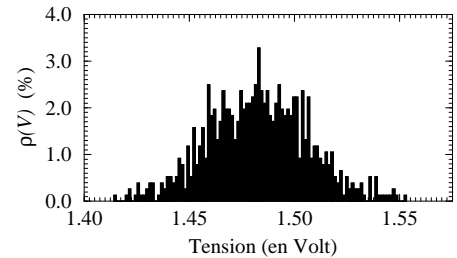


FIG. 4.14 – Densité de probabilité de présence sur les abscisses de la section de Poincaré à la distance $d = 13.58$ mm.

4.2.4 Extraction des orbites périodiques

De manière à avoir une représentation synthétique de l'évolution de la dynamique le long de l'axe du jet, nous réalisons l'extraction de l'orbite périodique la plus représentative de la dynamique à une distance donnée de la buse. Pour cela, une densité de probabilité de visite est calculée dans une section de Poincaré, choisie selon la FIG. 4.13.b. La densité de probabilité de visite $\rho(V)$ présente une configuration similaire à celle d'une gaussienne : cette structure particulière laisse à penser que des processus de nature stochastique sont impliqués. Nous considérons alors que l'orbite périodique la plus représentative est associée au maximum de cette densité de probabilité de visite.

Ces premiers travaux encourageants vont être poursuivis en étroite collaboration avec l'opération de recherche pulvérisation. Les travaux futurs seront orientés vers l'étude des dynamiques associées aux trois zones mises en évidence par S. Leroux *et al* [83]. Notre objectif à terme de cette investigation est l'élaboration d'une prédiction de la dispersion en taille des gouttes à partir d'une mesure effectuée en amont de la rupture en gouttes du jet.

L'orbite périodique la plus représentative est extraite pour chaque valeur de la distance d ; le tout est ensuite concaténé en fonction de la distance d (FIG. 4.14). Nous retrouvons distinctement les deux phénomènes déjà mis en évidence sous la forme d'une double oscillation qui se résorbe au niveau de la rupture en gouttes. La structure dynamique est très perturbée au niveau de la rupture en raison de la grande instabilité de la dynamique en ce point.

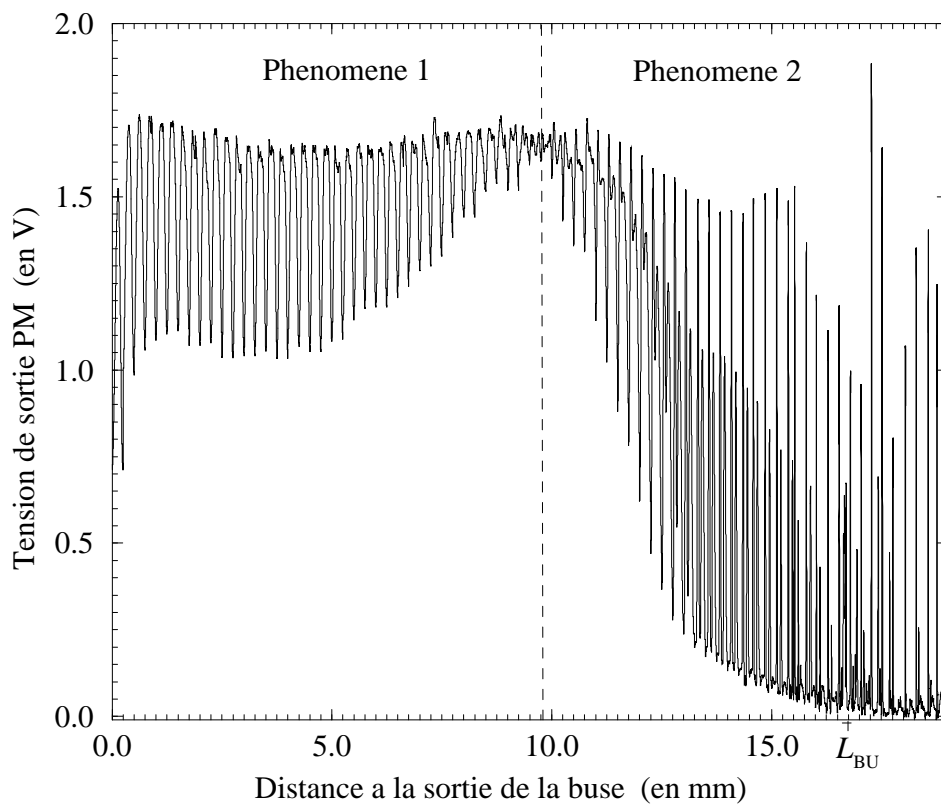


FIG. 4.15 – Evolution de l'orbite la plus représentative en fonction de la distance à la buse : cette vue globale de l'évolution de la dynamique le long de l'axe du jet est obtenue en concaténant chacune des portions de série temporelle correspondant à l'orbite la plus représentative. ($L_{BU} = 16.8$ mm est la longueur de break-up.)

4.2.5 Conclusion

L'utilisation des outils empruntés à la théorie de la dynamique des systèmes non linéaires permet de comprendre quelques processus menant un jet d'eau excité à la rupture en gouttes. Notamment, nous avons mis en évidence que la croissance des modes prédite par la théorie de Rayleigh n'intervenait qu'une fois la perturbation résultant de l'excitation de l'aiguille amortie, de manière à restaurer la symétrie de révolution cylindrique requise par la théorie de Rayleigh.

4.3 Mélange

L'étude et la compréhension des processus de mélange est un problème essentiel pour la détermination des conditions opératoires assurant l'optimisation de l'efficacité du mélange. De manière à répondre à cet objectif, le champ de vitesse généré au sein d'une cuve standard pourvue d'un agitateur de type Rushton est étudié à l'aide d'une technique de mesure non-intrusive, l'anémométrie Doppler laser [75]. Les processus de mélange peuvent être décrits par des dynamiques non linéaires et des interactions de structures provenant des nonlinéarités des équations de Navier-Stokes. L'analyse dynamique peut par conséquent être réalisée dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques si nous prenons soin de séparer les composantes déterministes associées aux grosses structures (comme celles simulées par des techniques du type Large Eddy Simulation) et les composantes stochastiques associées aux petites échelles de la turbulence.

L'extraction de la contribution des grosses structures est réalisée à l'aide d'une transformée de Hilbert appliquée à la série temporelle de la composante tangentielle de la vitesse. Une analyse est ensuite réalisée dans un espace des phases reconstruit et un système de quatre équations différentielles ordinaires est obtenu par une reconstruction globale de champ de vecteurs.

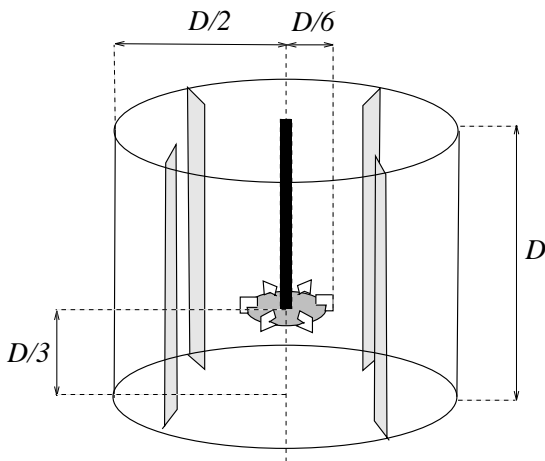


FIG. 4.16 – Réacteur standard avec agitateur de type Rushton.

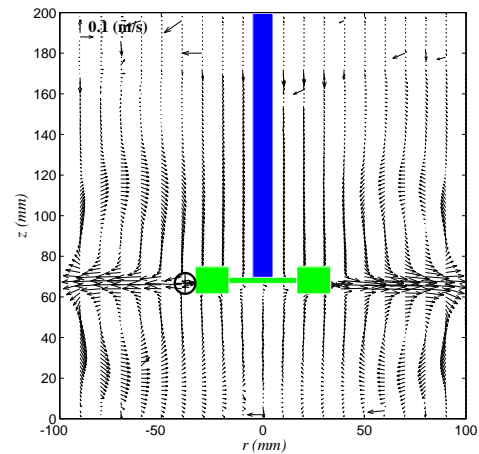


FIG. 4.17 – Champ moyen de l'écoulement du fluide au sein de la cuve.

4.3.1 Données expérimentales

Le réacteur utilisé est une cuve cylindrique standard dans laquelle une turbine du type Rushton est utilisée pour agiter une huile transparente. La cuve a un diamètre D de 0.2 m et est pourvue de quatre chicane de manière à interdire toute rotation en bloc du fluide (FIG. 4.16). Une cuve standard est une cuve dont toutes les caractéristiques géométriques dépendent d'une seule longueur, le diamètre D . Ainsi, la hauteur de la cuve est égal au diamètre alors que le diamètre de l'agitateur est de $D/3$. L'agitateur est situé à une distance de $D/3$ du fond de la cuve et les six pales qui le composent sont rectangulaires, d'une longueur de $D/15$ pour une hauteur de $D/12$. Le réacteur est réalisé en plexiglass dont l'indice de réfraction est égal à celui de l'huile de manière à réduire les problèmes de trajet optique. L'étude est réalisée pour une vitesse d'agitation de 88 rpm, correspondant à une fréquence caractéristique de 1.46 ± 0.06 Hz.

A l'aide d'un anémomètre commercial, F. Lusseyran et A. Kemoun ont effectué l'enregistrement de l'évolution temporelle de la composante tangentielle de la vitesse. La série temporelle est échantillonnée à la fréquence de 1024 Hz et est constituée de 2^{16} points (FIG. 4.18). Un spectre de Fourier révèle un grand nombre de fréquences (FIG. 4.19) faisant penser à un comportement quasi-périodique.

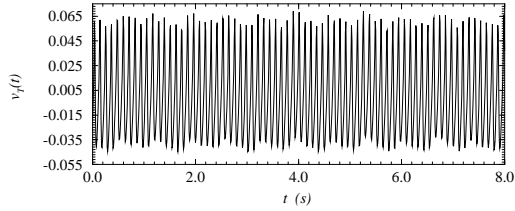


FIG. 4.18 – Portion de la série temporelle $V_T(t)$ de la composante tangentielle du champ de vitesse à 5 mm des pales de l'agitateur.

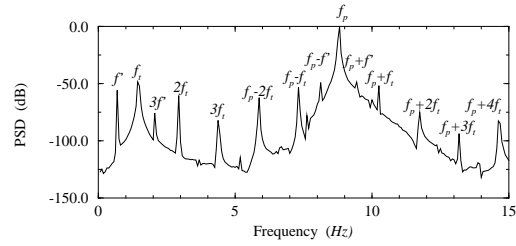


FIG. 4.19 – Spectre de Fourier de la série temporelle V_T .

4.3.2 Reconstructions de la dynamique

Une fois une transformée de Hilbert appliquée afin d'obtenir une séparation des composantes déterministes et des composantes stochastiques [98], une reconstruction de l'espace des phases est réalisée. La dimension de plongement de la dynamique est estimée égale à 3.9 [75] à l'aide d'un algorithme du type Grassberger-Procaccia [63]; l'espace reconstruit devra donc être de dimension 4.

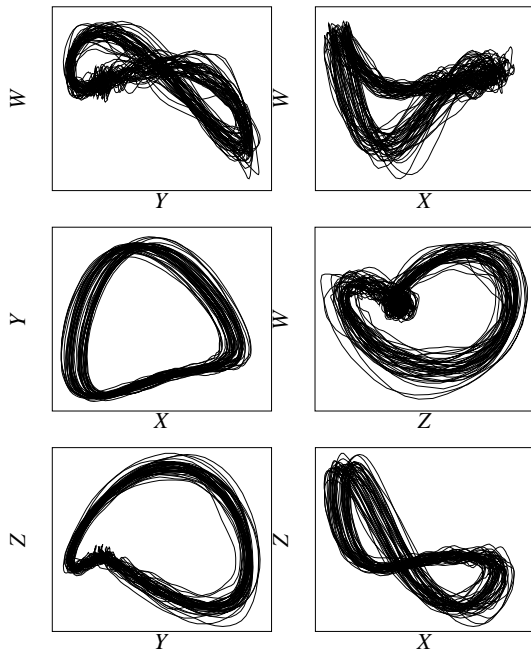


FIG. 4.20 – Six projections planes du portrait de phases obtenues directement à partir des données expérimentales.

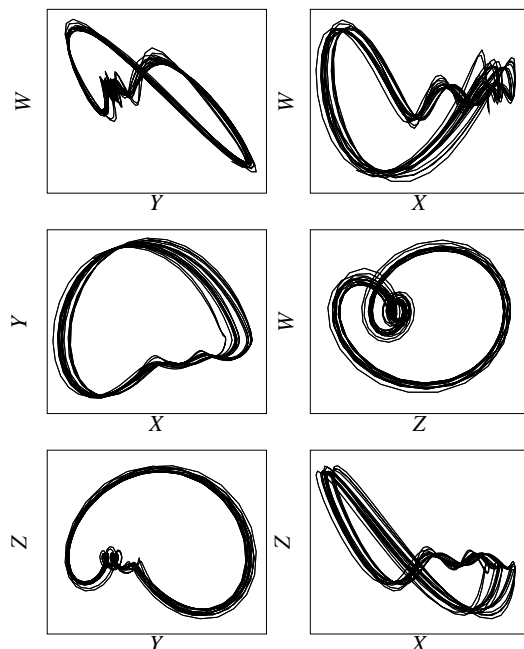


FIG. 4.21 – Six projections planes du portrait de phases obtenues par intégration du modèle reconstruit.

A partir d'un espace reconstruit sur les coordonnées dérivées :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = V_T(t) \\ Y = \frac{dV_T(t)}{dt} \\ Z = \frac{d^2V_T(t)}{dt^2} \\ W = \frac{d^3V_T(t)}{dt^3} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

nous avons effectué une analyse dans une section de Poincaré confirmant les fréquences observées sur le spectre de Fourier [98]. Une série de projections de l'espace des phases quadri-dimensionnel est représentée FIG. 4.20. La trajectoire révèle une structure évidente de la dynamique, démontrant un aspect déterministe. Une reconstruction globale de champ de vecteurs est tentée : un modèle de quatre équations différentielles ordinaires est obtenu. L'échec de toute reconstruction sur un espace de dimension trois confirme la dimension quatre de cette dynamique. Malheureusement une caractérisation topologique ne peut être fournie puisque seulement disponible, à l'heure actuelle, pour des espaces de dimension trois. Toutefois, une simple comparaison visuelle permet de vérifier que le modèle reconstruit capture l'essentiel de la dynamique filtrée par transformée de Hilbert. Ce résultat confirme donc l'existence d'une composante déterministe de basse dimension au sein d'une dynamique complexe de nature turbulente. L'extraction d'une telle composante, usuellement associée à l'évolution des grosses structures pourrait permettre de combiner une approche statistique, de type $k-\epsilon$, à un modèle reconstruit obtenu directement à partir de données expérimentales afin de construire des codes de simulation complets prenant en compte toutes les échelles de la turbulence.

Bibliographie

- [1] **H. D. I. Abarbanel, M. B. Kennel.** Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data, *Physical Review E*, **47** (5), 3057-3068, 1993.
- [2] **H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, L. Sh. Tsimring.** The analysis of observed chaotic data in physical systems, *Review of Modern Physics*, **65** (4), 1331-1388, 1993.
- [3] **H. D. I. Abarbanel.** Analysing and utilizing time series observations from chaotic systems, in *Nonlinearity and Chaos Engineering Dynamics*, edited by J. M. T. Thompson and S. R. Bishop, John Wiley, pp. 379-391, 1995.
- [4] **L. A. Aguirre, S. A. Billings.** Identification of models for chaotic systems from noisy data : implications for performance and nonlinear filtering, *Physica D*, **85**, 239-258, 1995.
- [5] **L. A. Aguirre, S. A. Billings.** Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering, *International Journal of Control*, **62** (3), 569-587, 1995.
- [6] **L. A. Aguirre, S. A. Billings.** Dynamical effects of overparametrization in nonlinear models, *Physica D*, **80**, 26-40, 1995.
- [7] **L. A. Aguirre.** Controllability and observability of linear systems : some noninvariant aspects, *IEEE Trans. on Education*, **38**, 33-39, 1995.
- [8] **F. Albahadily, M. Schell.** *Journal of Chemical Physics*, **88**, 4312, 1988.
- [9] **O. L. Anosov, O. Y. Butkovkii & Y. A. Kravtsov.** Strategy and algorithms for dynamical forecasting, in *Predictability of Complex Dynamical Systems*, pp. 105-122, Y. A. Kravtsov & J. Kadtke (Eds), Springer-Verlag Berlin, 1996.
- [10] **F. Argoul, A. Arnéodo, P. Richetti.** Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Physics Letters A*, **120** (6), 269-275, 1987.
- [11] **A. Arnéodo, F. Argoul, J. Elezgaray & P. Richetti.** Homocline chaos in chemical systems, *Physica D*, **62**, 134-169, 1993.
- [12] **R. K. Barton, D. K. Kenemuth, S. S. Lestz, W. E. Meyer.** Cycle-to-cycle variations of a spark ignition engine - a statistical analysis, *SAE Technical Paper Series*, 700488, 1970.
- [13] **M. R. Bassett, J. L. Hudson.** Quasi-periodicity and chaos during an electrochemical reaction, *The Journal of Physical Chemistry*, **93**, 2731-2737, 1989.
- [14] **M. R. Basset, J. L. Hudson.** The oscillatory electrodisolution of Copper in Acidic Chloride Solution, *Journal of the Electrochemical Society*, **137** (6), 1815-1826, 1990.
- [15] **J. Birman & R. F. Williams.** Knotted periodic orbits in dynamical systems - I : Lorenz's equations, *Topology*, **22** (1), 47-82, 1983.
- [16] **J. Birman & R. F. Williams.** Knotted periodic orbits in dynamical systems - II : Knot holders for fibered knots, *Cont. Math.* , **20**, 1-60, 1983.
- [17] **J. B. Blaisot, D. Allano, M. Ledoux** 8th Annual European Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, 271-276, Amsterdam, 1992.
- [18] **J. B. Blaisot, M. Ledoux, D. Ducret & J. Vendel** A new monosized drop generator : monitoring of isolated drop or drop packet, *Journal of Aerosol Science*, **25** (1), s231-s232, 1994.
- [19] **R. Borghi & M. Destriau.** *La combustion et les flammes*, Ed. Technip, Paris, 1995.

- [20] **G. Boulant, M. Lefranc, S. Bielawski & D. Derozier.** Horseshoe templates with global torsion in a driven laser, *Physical Review E*, **55** (5), 5082-5091, 1997.
- [21] **G. Boulant, M. Lefranc, S. Bielawski & D. Derozier.** A non-horseshoe template in a chaotic laser model, soumis à *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 1997.
- [22] **L. Brisson.** Le mythe du Big Bang, in *Science et Avenir*, Hors série **111** sur les Mythes et Légendes de la Science, 1997.
- [23] **D. S. Broomhead, G. P. King.** Extracting qualitative dynamics from experimental data, *Physica D*, **20**, 217-236, 1986.
- [24] **R. Brown, N. F. Rul'kov, E. R. Tracy.** Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data, *Physical Review E*, **49** (5), 3784-3800, 1995.
- [25] **R. Brown, V. In & E. R. Tracy.** Parameter uncertainties in models of equivariant dynamical systems, *Physica D* **102**, 208-226, 1997.
- [26] **Th. Buzug, T. Reimers, G. Pfister.** Optimal Reconstruction of Strange Attractors from Purely Geometrical Arguments, *Europhysics Letters*, **13** (7), 605-610, 1990.
- [27] **Th. Buzug, G. Pfister.** Optimal delay time and embedding dimension for delay-time coordinates by analysis of the global static and local dynamical behavior of strange attractors, *Physical Review A*, **45** (10), 7073-7984, 1992.
- [28] **L. Cao.** Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series, *Physica D*, in press, 1997.
- [29] **M. Cazenave.** *La science et les figures de l'âme*, Editions du Rocher, Paris, 1996.
- [30] **Y. W. Chin, R. D. Matthews, S. P. Nichols, T. M. Kiehne.** Use of fractal geometry to model turbulent combustion in S.I. engines, *Combustion Science and Technology*, **86**, 1-30, 1992.
- [31] **K. H. Chu, J. B. Heywood.** Estimating heat-release and mass-of-mixture burned from spark-ignition engine pressure data, *Combustion Science and Technology*, **54**, 133-143, 1987.
- [32] **L. O. Chua.** The genesis of Chua's circuit, *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik*, **46**, 250-257, 1992.
- [33] **P. Collet & J. P. Eckmann.** Iterated maps on the interval as dynamical systems, in *Progress in Physics*, A. Jaffe & D. Ruelle (Ed.), Birkhäuser, Boston, 1980.
- [34] **P. Coulet, C. Tresser.** Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *Journal de Physique*, Colloque C5, supplément au n°8 (39), C5-25, 1978.
- [35] **J. Cremers, A. Hübler.** Construction of Differential Equations from Experimental Data, *Zeitung Naturforsch*, **42** a, 797-802, 1987.
- [36] **P. Cvitanović.** Periodic Orbits as the Skeleton of Classical and Quantum Chaos, *Physica D*, **51**, 138-151, 1991.
- [37] **P. Cvitanović & B. Eckhardt.** Symmetry Decomposition of Chaotic Dynamics, *Nonlinearity*, **6**, 277-311, 1993.
- [38] **J. W. Daily.** Cycle-to-cycle variations : a chaotic process?, *Combustion Science and Technology*, **57**, 149-162, 1988.
- [39] **C. S. Daw, C. E. Finney, J. B. Green, M. B. Kennel, J. F. Thomas & F. T. Connolly.** A simple model for cyclic variations in a spark-ignition engine, *SAE Technical Papers*, 962086, 1996.
- [40] **S. P. Dawson, C. Grebogi, I. Kan, H. Koçak.** Antimonotonicity : inevitable reversals of period-doubling cascades, *Physics Letters A*, **162**, 249-254, 1992.
- [41] **C. Dumouchel.** *Atomisation et sprays*, Mémoire pour l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Rouen, 1996.
- [42] **P. Dutertre.** *Caractérisation des attracteurs à l'aide d'orbites périodiques*, Thèse de doctorat, LESP, Université de Rouen, 12 Avril 1995.

- [43] **J. P. Eckmann, S. Oliffson, D. Ruelle & S. Ciliberto.** Lyapunov exponents from time series, *Physical Review A*, **34** (6), 4971-4979, 1986.
- [44] **H. P. Fang.** Dynamics of strongly dissipative systems, *Physical Review E*, **49** (6), 5025-5031, 1994.
- [45] **H. P. Fang.** Dynamics for a two-dimensional antisymmetric map, *Journal of Physics A*, **27**, 5187-5200, 1994.
- [46] **M. J. Feigenbaum.** Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformation, *Journal of Statistical Physics*, **19** (1), 25-52, 1978.
- [47] **R. J. Field, E. Korös, R. M. Noyes.** *The Journal of American chemical Society*, **94**, 8649, 1972.
- [48] **J. A. C. Gallas.** The role of codimension in dynamical systems, *International Journal of Modern Physics C*, **3** (6), 1295-1321, 1992.
- [49] **P. Gaspard & G. Nicolis.** What can we learn from Homoclinic Orbits in Chaotic Dynamics?, *Journal of Statistical Physics*, **31** (3), 499-518, 1983.
- [50] **P. Gaspard, R. Kapral & G. Nicolis.** Bifurcation Phenomena near Homoclinic Systems : a Two Parameter Analysis, *Journal of Statistical Physics*, **35** (5/6), 697-727, 1984.
- [51] **J. F. Gibson, J. D. Farmer, M. Casdagli, S. Eubank.** An Analytic Approach to Practical State Space Reconstruction, *Physica D*, **57**, 1-30, 1992.
- [52] **R. Gilmore & J. W. L. McCallum.** Structure in the bifurcation diagram of the Duffing oscillator, *Physical Review E*, **51** (2), 935-956, 1995.
- [53] **P. Glendenning & C. Sparrow.** Local and Global Behavior near Homoclinic Orbit, *Journal of Statistical Physics*, **35** (5/6), 645-696, 1984.
- [54] **J. Godelle, G. Fougereux, C. Letellier, J.N. Letoulouzan, G. Gouesbet, G. Gréhan.** Etude de l'atomisation d'un jet : vers une prédiction de la taille des gouttes. *Proceedings of the 11th COFERAe*, CNAM, Paris, France, 1995.
- [55] **G. Gouesbet.** Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series, *Physical Review A*, **43** (10), 5321-5331, 1991.
- [56] **G. Gouesbet.** Reconstruction of Vector Fields : the Case of Lorenz System, *Physical Review A*, **46** (4), 1784-1796, 1992.
- [57] **G. Gouesbet, J. Maquet.** Construction of phenomenological models from numerical scalar time series, *Physica D*, **58**, 202-215, 1992.
- [58] **G. Gouesbet, C. Letellier.** Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 -approximation on nets, *Physical Review E*, **49** (6), 4955-4972, 1994.
- [59] **G. Gouesbet, S. Meunier-Guttin-Cluzel & C. Letellier.** Modified trace algorithm to identify valid crossing sequences for knot shadows, soumis à *Knots and Physics*, 1997.
- [60] **G. Gouesbet, S. Meunier-Guttin-Cluzel & C. Letellier.** Computer evaluations of Homfly polynomials by using Gauss codes, with a skin template algorithm, soumis au *Journal of Applied Mathematics*, 1997.
- [61] **G. Gouesbet, S. Meunier-Guttin-Cluzel & C. Letellier.** Un programme sur la théorie des nœuds, Actes des Premières Journées d'Etudes "Du chaos spatio-temporel à la turbulence", Rouen, 28-29 Mai 1997.
- [62] **G. Gouesbet, L. Le Sceller, C. Letellier, R. Brown, J. R. Buchler, Z. Kolláth.** Reconstruction of a set of equations from a scalar time series, Proceedings du 11th Florida Workshop in Nonlinear Astronomy and Physics, *Annals of the New York Academy of Sciences*, Vol. 808, 25-50, 1997.
- [63] **P. Grassberger & I. Procaccia.** Measuring the Strangeness of Strange Attractors, *Physica D*, **9**, 189, 1983.
- [64] **T. Hall.** The creation of Horseshoes, *Nonlinearity* **7** (3), 861-924, 1994.
- [65] **J. B. Heywood.** Internal combustion engine fundamentals, MacGraw-Hill, 1988.

- [66] **J. L. Hudson, M. Hart, D. Marinko.** An experimental study of multiple peak periodic and nonperiodic oscillations in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Journal of Chemical Physics*, **71** (4), 1601-1606, 1979.
- [67] **J. L. Hudson.** Chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Journal of Chemical Physics*, **74**, 6171-6177, 1981.
- [68] **J. L. Hudson.** Chaos in chemical systems, *Z. Phys. Chemie*, **270** (3), 497-514, 1989.
- [69] **G. Israël.** *La mathématisation du réel*, coll. Science ouverte, Seuil, Paris, 1996.
- [70] **E. A. Jackson.** *Perspective of nonlinear dynamics*, Vol. 1, Cambridge University Press, 1992.
- [71] **B. Jarroson.** *Invitation à la philosophie des Sciences*, Points Seuil, Paris, 1992.
- [72] **J. B. Kadtké & J. S. Brush.** Global modeling of chaotic time series with applications to signal processing, Proceedings of the *2nd ONR Conference on Chaos and Full Spectrum Processing*, 1993.
- [73] **J. C. Kantor.** A dynamical instability of spark ignition engines, *Science*, **224**, 1233, 1984.
- [74] **L. H. Kauffman.** *On knots*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1987.
- [75] **A. Kemoun.** *Caractérisation expérimentale de la structure de l'écoulement dans une cuve agitée : mélange*, Doctorat, I.N.P.L., Nancy, 1995.
- [76] **M. C. Kube, S. T. Pride, J. L. Hudson.** Local analysis of time series from the oscillatory electrocatalytic reduction of Hydrogen Peroxide, *Chaos, Soliton & Fractals*, **3** (5), 495-507, 1993.
- [77] **C. S. M. Lainscsek, F. Schürer & J. B. Kadtké.** A general form for global dynamical data models for three-dimensional systems, Proceedings of Saratov'96. A paraître dans *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 1997.
- [78] **M. Lebel, M. J. Cottureau.** Study of the effect of the residual gaz fraction on combustion in a S.I. engine using simultaneous CARS measurements of temperature and CO_2 concentration, *SAE Technical Paper Series*, 922388, 1992.
- [79] **M. Lefranc, P. Glorieux.** Topological analysis of chaotic signals from a CO_2 laser with modulated losses, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, **3** (3), 643-650, 1993.
- [80] **M. Lefranc, P. Glorieux, F. Pappoff, F. Molesti & E. Arimondo.** Combining topological analysis and symbolic dynamics to describe a strange attractor and its crises, *Physical Review Letters* **73** (10), 1364-1367, 1994.
- [81] **M. Lefranc & P. Glorieux.** Des nœuds dans le chaos, in *Pour la Science*, dossier sur le Chaos, Hors Série **6**, 58-63, 1995.
- [82] **M. Lefranc & P. Glorieux.** Dénouements dans le chaos, in *Pour la Science*, dossier sur la Science des Nœuds, Hors Série **15**, 92-97, 1997.
- [83] **S. Leroux, C. Dumouchel & M. Ledoux.** The stability curve of Newtonian liquid jets. *Atomization and Sprays*, **6** (6), 623-641, 1996.
- [84] **L. Le Sceller, C. Letellier & G. Gouesbet.** Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractor, *Physical Review E* **49** (5), 4693-4695, 1994.
- [85] **L. Le Sceller.** *Reconstruction globale de champ de vecteurs et applications*, Thèse de doctorat, LESP, Université de Rouen, 28 Février 1997.
- [86] **C. Letellier.** *Résistance au bruit de la méthode de reconstruction : cas des fonctions rationnelles polynômiales*, Rapport interne ESP/MO/01/92/I, LESP, Rouen, 1992.
- [87] **C. Letellier.** *Caractérisation topologique et reconstruction d'attracteurs étranges*, Thèse de doctorat, LESP, Université de Paris VII, 10 Mai 1994.
- [88] **C. Letellier, P. Dutertre, G. Gouesbet.** Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field, *Physical Review E* **49** (4), 3492-3495, 1994.
- [89] **C. Letellier, P. Dutertre & B. Maheu.** Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282, 1995.

- [90] **C. Letellier, L. Le Sceller, P. Dutertre, G. Gouesbet, Z. Fei & J. L. Hudson.** Topological Characterization and Global Vector Field Reconstruction from experimental electrochemical system, *Journal of Physical Chemistry*, **99**, 7016-7027, 1995.
- [91] **C. Letellier, P. Dutertre, J. Reizner, G. Gouesbet.** Evolution of multimodal map induced by an equivariant vector field, *Journal of Physics A*, **29**, 5359-5373, 1996.
- [92] **C. Letellier, G. Gouesbet, F. Soufi, J. R. Buchler, Z. Kolláth.** Chaos in variable stars : topological analysis of W Vir model pulsations, *Chaos*, **6** (3), 466-476, 1996.
- [93] **C. Letellier, G. Gouesbet, N. Rulkov.** Topological analysis of chaos in equivariant electronic circuits, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **6** (12B), 2531-2555, 1996.
- [94] **C. Letellier, S. Meunier-Guttin-Cluzel, G. Gouesbet, F. Neveu, T. Duverger & B. Cousyn.** *Caractérisation de l'évolution temporelle de la pression-cylindre d'un moteur à allumage commandé à l'aide de la dynamique des systèmes.* Rapport de contrat n° 1.2 (Peugeot SA), 18 Juin 1996.
- [95] **C. Letellier, E. Ringuet, B. Maheu, J. Maquet, G. Gouesbet.** Global vector field reconstruction of chaotic attractors from one unstable periodic orbit, *Entropie*, **202/203**, 147-153, 1997.
- [96] **C. Letellier, L. Le Sceller, O. Ménard & G. Gouesbet.** Vers une description complète des systèmes non-autonomes, Actes des Premières Journées d'Etudes *Du chaos spatio-temporel à la turbulence*, Rouen, 27-28 Mai 1997.
- [97] **C. Letellier, L. Le Sceller, O. Ménard & G. Gouesbet.** Which phase space for non autonomous systems?, *International Conference on Applied Nonlinear Dynamics near the Millennium*, San Diego, USA, 7-11 Juillet 1997. Affiche.
- [98] **C. Letellier, L. Le Sceller, G. Gouesbet, F. Lusseyran, A. Kemoun & B. Izrar** Recovering deterministic behavior from experimental time series in a standard mixing reactor, *AIChE Journal*, **43** (9), 2194-2202, 1997.
- [99] **C. Letellier, S. Meunier-Guttin-Cluzel, G. Gouesbet, F. Neveu, T. Duverger & B. Cousyn.** Use of nonlinear dynamical system theory to study cycle-to-cycle variations from spark ignition engine pressure data, *SAE Technical Paper Series*, 971640, 1997.
- [100] **C. Letellier, J. Maquet, L. Le Sceller, G. Gouesbet, F. Argoul & A. Arnéodo.** Reconstruction of a set of differential equations modelling an experimental homoclinic chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction, Proceedings of the Applied Nonlinear Dynamics near the Millennium 97, San Diego, USA, in press, 1997.
- [101] **C. Letellier, & L. Le Sceller.** *Modélisation de la dispersion cyclique de la pression cylindre*, Rapport de contrat n° 2.2 (Peugeot SA), Juin 1997.
- [102] **E. N. Lorenz.** Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, 1963.
- [103] **J. Maquet.** *Communication privée.*
- [104] **P. Melvin & N. B. Tufillaro.** Templates and framed braids, *Physical Review A*, **44** (6), 3419-3422, 1991.
- [105] **J. Meyer, M. Harry, M. Schreiber, S. Unverzagt.** Controlling combustion in a spark ignition engine by quantitative fuel distribution, *SAE Technical Paper Series*, 950107, 1995.
- [106] **G. B. Mindlin, X. J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore & N. B. Tufillaro.** Classification of Strange Attractors by Integers, *Physical Review Letters*, **64** (20), 2350-2353, 1990.
- [107] **G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore, X. J. Hou.** Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinski reaction, *Journal of Nonlinear Sciences*, **1**, 147-173, 1991.
- [108] **G. B. Mindlin & R. Gilmore.** Topological analysis and synthesis of chaotic time series, *Physica D*, **58**, 229-242, 1992.
- [109] **G. B. Mindlin, H. G. Solari.** Tori and Klein bottles in four-dimensional chaotic flows, *Physica D* **102** 177-186, 1997.

- [110] **E. Ott.** *Chaos in dynamical system*, Cambridge University Press, 1993.
- [111] **N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw.** Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, **45** (9), 712-716, 1980.
- [112] **F. Pappoff, A. Fioretti, E. Arimondo, G. B. Mindlin, H. G. Solari, R. Gilmore.** Structure of chaos in the laser with saturable absorber, *Physical Review Letters*, **68** (8), 1128-1131, 1992.
- [113] **D. J. Patterson.** Cylinder pressure variations : a fundamental combustion problem, *SAE Technical Paper Series*, 660129, 1966.
- [114] **Platon.** *Timée*, Garnier-Flammarion, Paris, 1992.
- [115] **H. Poincaré.** *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villard, Paris, 1892.
- [116] **W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling.** *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [117] **I. Prigogine.** *Les lois du chaos*, Coll. Champs, Flammarion, Paris, 1994.
- [118] **L. Rayleigh.** On the instability of jets, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **10**, 4-13, 1878.
- [119] **J. Reboux, D. Puechberty, F. Dionnet.** Influence of the injection configuration on mixture preparation and combustion development in a S. I. engine using laser induced fluorescence, *SAE Technical Paper Series*, 961205, 1996.
- [120] **J. R. Rice.** *The approximation of functions*, 1 et 2, Addison-Wesley, Reading, MA, 1964 et 1969.
- [121] **P. Richetti, P. De Keeper, J. C. Roux, H. L. Swinney.** A crisis in the Belousov-Zhabotinskii reaction : experiment and simulation, *Journal of Statistical Physics*, **48**, 977-990, 1987.
- [122] **O. E. Rössler.** An equation for Continuous Chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, 1976.
- [123] **J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, C. Vidal.** Representation of strange attractor from an experimental study of chemical turbulence, *Physics Letters A*, **77**, 391-393, 1980.
- [124] **N. F. Rulkov, A. R. Volkovski, A. Rodríguez-Lozano, E. Del Río, M. G. Velarde.** Mutual information of chaotic self-oscillator with dissipative coupling, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, **2** (3), 669-676, 1992.
- [125] **T. Sauer, J. Yorke, M. Casdagli.** Embeddology, *Journal of Statistical Physics*, **65** (3/4), 579-616, 1991.
- [126] **J. M. Schneider & C. D. Hendricks.** *Rev. Sci. Instrum.*, **35**, 134, 1964.
- [127] **R. Shaw.** Strange attractor, chaotic behavior and information flow. *Z. Naturforsch.*, **36** (a), 80-112, 1981.
- [128] **L. P. Sil'nikov.** The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **1** (172), 54-58, 1967.
- [129] **S. Smale.** *Bulletin of American Mathematical Society*, **73**, 747-817, 1967.
- [130] **L. A. Smith.** *Communication privée.*
- [131] **H. G. Solari & R. Gilmore.** Relative rotation rates for driven dynamical systems, *Physical Review A*, **37** (8), 3096-3109, 1988.
- [132] **H. G. Solari, M. A. Natiello & G. B. Mindlin.** *Nonlinear dynamics : a two way trip from physics to math*, Institute of Physics Publishing, London, 1996.
- [133] **C. Sparrow.** *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Applied Mathematical Sciences **41**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [134] **M. L. Szenderowicz & J. B. Heywood.** Mixture nonuniformity effects on S.I. engine combustion variability, *SAE Technical Papers Series*, 902142, 1990.

- [135] **F. Takens.** Detecting Strange Attractors in Turbulence, in : *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, eds. D. A. Rand and L. S. Young, pub. Springer-Verlag, New York, 366-381, 1981.
- [136] **R. Thom.** *Prédire n'est pas expliquer*, Coll. Champs, Flammarion, Paris, 1996.
- [137] **N. B. Tufillaro, R. Holzner, L. Flepp, E. Brun, M. Finardi, R. Badii.** Template analysis for a chaotic NMR laser, *Physical Review A*, **44** (8), 4786-4788, 1991.
- [138] **N. B. Tufillaro, T. Abbott & J. Reilly.** *An experimental approach to non linear dynamics and chaos*, Addison-Wesley, New York, 1992.
- [139] **N. B. Tufillaro, P. Wyckoff, R. Brown, T. Schreiber & T. Molteno.** Topological time series analysis of a string experiment and its synchronized model, *Physical Review E*, **51** (1), 164-174, 1995.
- [140] **A. R. Volkovski, N. F. Rulkov.** Using one dimensional mapping for the experimental study of chaotic dynamics of a self-oscillator, *Sov. Teck. Phys. Lett.*, **14**, 656-659, 1988.
- [141] **F. Zhao, T. Kadota, T. Takemoto.** Mixture strength measurements in the combustion chamber of S. I. Engine via Rayleigh scattering, *JSME Serie II*, **35** (4), 1992.