

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Singularités non classiques d'une récurrence, et d'une équation différentielle d'ordre 2.* Note (*) de **Christian Mira**, présentée par René Thom.

Lorsqu'une récurrence, ou transformation ponctuelle T , bi-dimensionnelle, à variables réelles, est indéterminée en certains points, deux types de points singuliers qui ne sont ni points fixes, ni points de cycles, peuvent apparaître. Un type, appelé « point de focalisation », est tel qu'une infinité de courbes invariantes par T le traversent, certaines y revenant en faisant des boucles. L'autre type, appelé « col d'indétermination », est tel que les courbes invariantes en son voisinage ont l'allure de celles d'un col. Pour mettre en évidence ces singularités, le plus simple est de construire des récurrences dont les solutions s'obtiennent sous forme explicite. Les mêmes singularités se rencontrent dans les équations différentielles avec le même type d'indétermination.

Two types of non classical singular points are described when a two-dimensional point mapping is indeterminate for some values of the variables. These singularities are called: "point of focusing", and "saddle of indetermination", in relation to the aspect of the invariant curves in the neighbourhood of the corresponding points. The same occurs for differential equations with an equivalent type of indetermination.

Pour construire des récurrences bi-dimensionnelles, à variables réelles :

$$(1) \quad x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

telles que la solution $x_n = p(x_0, y_0, n)$, $y_n = q(x_0, y_0, n)$ s'exprime à l'aide des symboles élémentaires de l'analyse, on peut se donner *a priori* deux fonctions analytiques $v_1 = \gamma_1(x_0, y_0)$, $v_2 = \gamma_2(x_0, y_0)$, solutions d'équations fonctionnelles de Schröder :

$$(2) \quad \gamma_1(x_{n+1}, y_{n+1}) = S_1 \gamma_1(x_n, y_n), \quad \gamma_2(x_{n+1}, y_{n+1}) = S_2 \gamma_2(x_n, y_n)$$

et en déduire la récurrence (1) qui conduirait à ces fonctions γ_1, γ_2 . A partir des fonctions inverses $x_0 = \gamma_{-1}(v_1, v_2)$, $y_0 = \gamma_{-2}(v_1, v_2)$, l'expression de la solution est alors :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n = \gamma_{-1} [S_1^n \gamma_1(x_0, y_0), S_2^n \gamma_2(x_0, y_0)], \\ y_n = \gamma_{-2} [S_1^n \gamma_1(x_0, y_0), S_2^n \gamma_2(x_0, y_0)]. \end{array} \right.$$

Sous cette forme, on peut remarquer que n peut être une variable continue, $n \equiv t$, et (3) représente alors l'équation des courbes invariantes exprimée paramétriquement, c'est-à-dire représente le portrait de phase de (1). En se donnant sous forme simple γ_{-1}, γ_{-2} , on en tire alors v_1, v_2 , puis l'expression de (1) et de (3) ([1], [2]). Le problème de l'itération fractionnaire, ou continue, associé à (1) est alors résolu.

Cette méthode va permettre, à partir de (3), la mise en évidence de points singuliers non classiques, quand f et g sont indéterminées pour certains couples (x, y) (ici, f et g sont des fractions rationnelles), ceci grâce à la connaissance des équations des courbes invariantes. Sans cette connaissance, la mise en évidence de ces points serait très complexe, sinon impossible actuellement. En effet, à l'inverse des équations différentielles, dans le cas général, on ne sait construire que certaines courbes invariantes, solutions d'une équation fonctionnelle, celles passant par un point fixe, ou cycle, col, et l'une de celles passant par un nœud [3].

Soit comme premier exemple celui donné par Lattès dans [1], $f(x_n, y_n) \equiv y_n$, pour illustrer la construction de récurrences à partir de solutions (sous forme de deux fonctions analytiques connues) d'équations fonctionnelles de Schröder. Une étude plus poussée de ce cas fait apparaître, en effet, deux singularités non classiques. Pour cela, en choisissant $\gamma_{-1} = (v_1 + v_2)/(1 - v_1) = x_0$, on a alors $\gamma_{-2} = (S_1 v_1 + S_2 v_2)/(1 - S_1 v_1) = x_1 = y_0$. Soient $S_1 = 1/3$, $S_2 = 1/2$; à partir de γ_{-1}, γ_{-2} , on tire v_1, v_2 , d'où :

$$\gamma_1 = (3x_0 - 6x_1)/d, \quad \gamma_2 = (6x_1 - 2x_0 + 4x_0x_1)/d, \quad d = 1 + 3x_0 - 2x_1.$$

On obtient ainsi à partir de (3) la récurrence, ou transformation ponctuelle T :

$$(4) \quad x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = (5y_n - x_n + 6x_n y_n) / (6 + 16x_n - 8y_n)$$

et la solution générale de (4) :

$$(5) \quad x_n = [(3)^{-n}(3x_0 - 6y_0) + (2)^{-n}(6y_0 - 2x_0 + 4x_0 y_0)] / [1 + 3x_0 - 2y_0 - (3)^{-n}(3x_0 - 6y_0)],$$

si n est une suite d'entiers. En considérant dans (5) n comme une variable continue $n \equiv t$, l'équation des courbes invariantes de (4), sous forme paramétrique (paramètre = t) est alors :

$$(6) \quad \begin{cases} x = [(3)^{-t} a + (2)^{-t} b] / [c - (3)^{-t} a], \\ y = [(3)^{-(t+1)} a + (2)^{-(t+1)} b] / [c - (3)^{-(t+1)} a], \\ a = 3x_0 - 6y_0, \quad b = 6y_0 - 2x_0 + 4x_0 y_0, \quad c = 1 + 3x_0 - 2y_0. \end{cases}$$

Les points fixes de (4) sont $O(0; 0)$, nœud attractif de type 1 [3] avec multiplicateurs $S_1 = 1/3$, $S_2 = 1/2$, $P(-1; -1)$ nœud répulsif de type 1 ($S_1 = 3/2$, $S_2 = 3$). Par O passe la droite invariante $\delta_1, y = x/2$, ($a = 0$), et l'hyperbole invariante $\delta_2, y = x/(3 + 2x)$, ($b = 0$). Par P passe

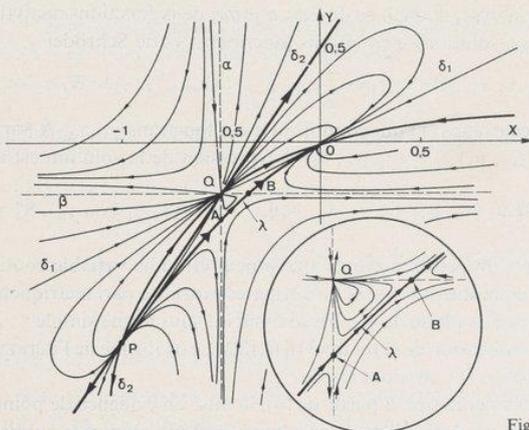


Fig. 1

δ_2 , et la droite invariante $\delta_3, y = (1 + 3x)/2$, ($c = 0$). Les trois courbes invariantes $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ se coupent en $Q(-1/2; -1/4)$. A partir de (6), on constate que par Q passe une infinité de courbes invariantes, Q n'étant pas un point fixe, mais un point tel que la fraction rationnelle $g(x, y)$ de (1) prend une forme indéterminée $0/0$. On appellera ce point singulier non classique *point de focalisation*. La figure 1 donne l'allure des courbes invariantes dans le plan (x, y) , le sens des flèches indiquant celui de t croissant.

Sur la figure 1 apparaissent deux autres points singuliers $A(x_A = -1/2, y_A = (\ln 2 - \ln 3) / \ln 3)$ et $B(x_B = y_A, y_B = -1/4)$, qui ne sont ni points fixes, ni points de cycle, et qui ont des propriétés remarquables détaillées ci-dessous. Les courbes invariantes au voisinage de A, B , ont l'allure de celles d'un col, si l'on ne tient pas compte du sens de t croissant. Par A passe la courbe singulière $\alpha : x = -1/2$, et par B passe la courbe singulière $\beta : y = -1/4$. Les

courbes α et β correspondent à une inversion du sens de t croissant sur les arcs de courbes invariantes, situées de part et d'autre de α , ou β , dans un voisinage suffisamment petit de celles-ci. En outre, pour tout point $(x_0, y_0) \in \alpha$, avec $t=0$, la courbe invariante (6) passant ce point n'est pas continue pour $t=0$, on a pour (6) $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = -1/2 = x_A$, $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = y_A$, c'est-à-dire de $(x_0, y_0) \in \alpha$ on fait un saut au point A. Il en est de même pour tout point $(x_0, y_0) \in \beta$, $t=0$, de (6), qui est tel que $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = x_B$, $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = y_B = -1/4$, c'est-à-dire de $(x_0, y_0) \in \beta$ on fait un saut au point B. Les points A et B sont situés sur la courbe invariante λ , qui passe par le second point R $(-0,625; -1/2)$ rendant y_{n+1} dans (4) indéterminé, et par S $(-1/4; -0,15625)$ qui rend la récurrence inverse T^{-1} , déduite de (4), indéterminée.

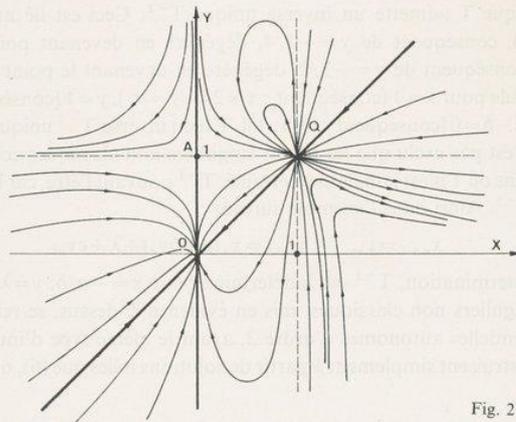


Fig. 2

L'indétermination est levée à partir de (6) en faisant $x_0 = x_R$, $y_0 = y_R$, $t = 1 + \epsilon$, on a alors $x(1) = x_1 = -1/2$, $y(1) = y_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(1 + \epsilon) = (\ln 2 - \ln 3) / \ln 3 = y_A$ c'est-à-dire A est le conséquent de rang 1, par application de T, de R. De même, on vérifie que B est le conséquent de rang 1 de S par application de T^{-1} , et aussi le conséquent de rang 1 de A, par application de T. Sur la courbe invariante λ les conséquents de A par T tendent vers le nœud 0, les antécédents de ces points tendent vers le nœud P. Les courbes α, β, λ limitent un domaine de forme triangulaire A B Q (agrandi sur la figure 1), à l'intérieur duquel les courbes invariantes forment une infinité de boucles passant par Q. On appellera les points singuliers non classiques A, B cols d'indétermination, à cause de la forme des courbes invariantes au voisinage de A, B.

Pour le deuxième exemple, partons de $x_0 = v_2 / (1 - v_1)$, $y_0 = v_1 + v_2$. On a :

$$\gamma_1 \equiv v_1 = (y_0 - x_0) / (1 - x_0), \quad \gamma_2 \equiv v_2 = x_0 (1 - y_0) / (1 - x_0).$$

Posons $a = x_0 (1 - y_0)$, $b = y_0 - x_0$, $c = 1 - x_0$, avec $S_1 = 1/3$, $S_2 = 1/2$. La récurrence T est alors :

$$(7) \quad \begin{cases} x_{n+1} = (x_n - x_n y_n) / (3 - 3 x_n / 2 - 3 y_n / 2), \\ y_{n+1} = (3 y_n - x_n - 2 x_n y_n) / (6 - 6 x_n), \end{cases}$$

l'équation des courbes invariées étant :

$$(8) \quad x = a 3^{-t} / (c - b 2^{-t}), \quad y = (a 3^{-t} + b 2^{-t}) / c.$$

Ces courbes sont représentées sur la figure 2. Ici, le point de focalisation est $Q (x = y = 1)$. Les courbes $y = x$, et $x = 0$ sont invariantes par T . Les courbes singulières $\alpha (x = 1)$ et $\beta (y = 1)$ correspondent à une inversion du sens de t croissant sur les arcs situés de part et d'autre de ces courbes, dans un voisinage suffisamment petit de celles-ci. Tout point M de β a pour conséquent $P (0; 1/2)$ antécédent du col d'indétermination $A (0; 1)$. Le point $R (x = 0, y = 2)$ est le second point qui rend indéterminé x_{n+1} de (7). A partir de (8) avec $t = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, on voit que le conséquent de R est A . Le point $x = y = 0$ est le seul point fixe à distance finie, c'est un nœud attractif de multiplicateurs $S_1 = 1/3$, $S_2 = 1/2$.

Il est intéressant de noter que pour (4), le jacobien J de T s'annule pour $y = -1/2$ et $y = -1/4$, bien que T admette un inverse unique T^{-1} . Ceci est lié au fait que la ligne critique [3] (LC), conséquent de $y = -1/4$, dégénère en devenant point S , que la ligne critique (LC'), conséquent de $y = -1/2$, dégénère en devenant le point $Q (-1/2; -1/4)$. Pour (7), J s'annule pour $x = 1$ (conséquent : $x = 2/3, y = \infty$), $y = 1$ [conséquent : $P (0; 1/2)$], et $3y - 2xy + 5x - 6 = 0$ [conséquent : $Q (1; 1)$]. T a un inverse T^{-1} unique. Il faut souligner, en outre, qu'il n'est pas exclu que les points singuliers non classiques considérés ici, soient présents dans le cas où T n'est jamais indéterminé, T^{-1} pouvant l'être, car le portrait de phase fait intervenir T^{-1} . Ainsi dans l'exemple suivant :

$$(9) \quad x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = x_n (a + b y_n) + \lambda + c y_n,$$

T n'a pas d'indétermination, T^{-1} est indéterminé pour $x = -a/b$, $y = \lambda + ac/b$.

Les points singuliers non classiques, mis en évidence ci-dessus, se rencontrent dans les équations différentielles autonomes d'ordre 2, ayant le même type d'indétermination. Ces équations se construisent simplement à partir de solutions telles que (6), ou (8). Pour (6) on a ainsi :

$$(10) \quad \begin{cases} dx/dt = [(2x - 6y - 4xy) \ln 2 + (6y - 3x)(x + 1) \ln 3] / (1 + 4y), \\ dy/dt = [(x - 3y - 2xy) \ln 2 + (2y - x)(y + 1) \ln 3] / (1 + 2x), \end{cases}$$

qui a pour trajectoires de phase celles de la figure 1.

(*) Remise le 5 janvier 1981.

[1] S. LATTES, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 3^e série, 3, 1912, p. 73-124.

[2] S. LATTES, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 39, 1911, p. 309-345.

[3] I. GUMOWSKI et C. MIRA, *Dynamique chaotique*, Cepadué Editions, 1980.

Groupe « Systèmes dynamiques non linéaires », U.P.S. et I.N.S.A.,
avenue de Rangueil, 31077 Toulouse Cedex.

Remarques de René Thom au sujet de la Note de Christian Mira

Le matériel présenté ici par M. Mira aurait sans doute bénéficié d'une présentation plus claire si l'auteur avait préalablement explicité les éléments critiques de la transformation γ^{-1} qui envoie le plan (x, y) sur le plan (v_1, v_2) . Dans le plan (v_1, v_2) , on a un champ exponentiel classique de la forme $v_2 = C v_1^c$, $c < 1$. Les singularités décrites dans la Note proviennent des positions des éléments critiques de la transformation γ (et γ^{-1}) par rapport à ce champ

exponentiel. Ainsi, dans le premier exemple, l'application γ envoie la droite Δ d'équation $2v_2 + v_1 + 1 = 0$ sur le point Q ; sur cette droite, les points $I(v_1 = 1, v_2 = -1)$, $J(3, -2)$ sont éclatés en les droites $y = -1/4$, $x = -1/2$ respectivement. Les points (A), (B) de la figure 1 de la Note correspondent en I, J aux éléments de contact de la ligne du champ issue de 0 coupant Δ en I, J respectivement (une situation probablement exceptionnelle due au mode particulier de construction de l'exemple). Il importerait de savoir de manière plus générale si l'existence d'une forme de Schröder pour un endomorphisme analytique de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{C}^2 implique des restrictions quant à la nature (birationnelle ?) de la transformation, et aux singularités (éclatements ?) qu'elle doit alors présenter.

The answer to this Professor Thom's remark was given by saying that such singularities are due to a vanishing denominator in the map equation. This topic was after developed in:

- BISCHI G.I., GARDINI L. and C. MIRA (2003). Plane Maps with Denominator. Part II: Noninvertible maps with simple focal points. *INTERNATIONAL JOURNAL OF BIFURCATION AND CHAOS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING*. 132253--2277
- BISCHI G.I., GARDINI L. and C. MIRA (2003). Plane Maps with Denominator. Part II: Noninvertible maps with simple focal points. *INTERNATIONAL JOURNAL OF BIFURCATION AND CHAOS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING*. 132253--2277
- BISCHI G.I., GARDINI L. and C. MIRA (2005). Plane Maps with Denominator. Part III: Non simple focal points and related bifurcations. *INTERNATIONAL JOURNAL OF BIFURCATION AND CHAOS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING*. 15(2) 451--496.